D-MATH/D-PHYS | Funktionentheorie | HS 2007
Prof. G. Felder

Lösung 4

1. Berechne die folgenden Wegintegrale, wobei alle Kurven im Gegenuhrzeigersinn zu durchlaufen sind:

a) $\int_\alpha (1+y)dx + (y+x^2)dy$
entlang dem Rand α des Quadrats $\{(x,y)|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$.

b) $\int_\beta (z + z\overline{z})dz$
entlang dem Rand β des Dreiecks mit Ecken $\{(1,0),(-1,0),(0,1)\}$.

c) $\int_{|z|=2} (1-z^2)^{-1} dz$.

a) Seien $\alpha_i :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ für $i = 1, \ldots 4$ die Wege $\alpha_1(t) = (t,0)$, $\alpha_2(t) = (1,t)$, $\alpha_3(t) = (1-t,1)$ und $\alpha_4(t) = (0,1-t)$. Ferner sei $\omega = (1+y)dx + (y+x^2)dy$. Wir haben

$$\int_{\alpha_1} \omega = \int_0^1 dt = 1, \qquad \int_{\alpha_2} \omega = \int_0^1 (t+1)dt = \frac{3}{2},$$
$$\int_{\alpha_3} \omega = \int_0^1 (-2)dt = -2, \qquad \text{und} \qquad \int_{\alpha_4} \omega = \int_0^1 -(1-t)dt = -\frac{1}{2}.$$

Folglich ist $\int_\alpha \omega = 1 + 3/2 - 2 - 1/2 = 0$.

b) Da $z \mapsto z$ ganz ist, gilt $\int_\beta (z + z\overline{z})dz = \int_\beta z\overline{z}dz$. Seien $\beta_i :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ für $i = 1, \ldots 3$ die Wege $\beta_1(t) = 1 - t + it$, $\beta_2(t) = -t + i(1-t)$ und $\beta_3(t) = 2t - 1$. Wir haben

$$\int_{\beta_1} z\overline{z}dz = \int_0^1 ((1-t)^2 + t^2)(i-1)dt = \frac{2(i-1)}{3},$$
$$\int_{\beta_2} z\overline{z}dz = \int_0^1 -(t^2 + (1-t)^2)(1+i)dt = -\frac{2(i+1)}{3}, \qquad \text{und}$$
$$\int_{\beta_3} z\overline{z}dz = \int_0^1 2(2t-1)^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Folglich ist $\int_\beta (z + z\overline{z})dz = -2/3$.

c) Es gilt $2/(1-z^2) = 1/(1-z) + 1/(1+z)$. Folglich ist

$$\begin{aligned} 2\int_{|z|=2} \frac{dz}{1-z^2} &= \int_{|z|=2} \frac{dz}{1-z} + \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z} \\ &= -\int_{|u-1|=2} \frac{du}{u} + \int_{|v+1|=2} \frac{dv}{v} \\ &= -2\pi i + 2\pi i = 0. \end{aligned}$$

Dabei verwenden wir die Berechnung $\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, welche für $|z_0| < r$ aus der Integralformel von Cauchy folgt.

2. **a)** Sei log ein beliebiger Zweig des Logarithmus. Bestimme seine Ableitung $\log'$.

b) Zeige: Die Funktion $\mathrm{inv} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1/z$ hat keine Stammfunktion. (Es gibt also keine analytische Funktion $L : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit Ableitung $L' = \mathrm{inv}$).

a) Da log ein Zweig des Logarithmus ist, gilt nach Definition $\exp \circ \log = \mathrm{id}_G$ für eine offene Menge $G \subset \mathbb{C}$, der Definitionsmenge des gewählten Zweiges des Logarithmus. Wir wissen dass $\exp'(z) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Die Kettenregel impliziert also für alle $z \in G$ die Gleichung

$$1 = \mathrm{id}'(z) = (\exp \circ \log)'(z) = \exp'(\log(z)) \cdot \log'(z) = \exp(\log(z)) \cdot \log'(z) = z \cdot \log'(z)$$

und somit $\log'(z) = 1/z$.

b) Hätte inv eine Stammfunktion, so gälte für alle geschlossenen differenzierbaren Wege γ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Gleichung $\int_\gamma \mathrm{inv}(z)\, dz = 0$, wie ein Satz aus der Vorlesung besagt. Aber für den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ ist $dz = \dot{\gamma}(t)dt = 2\pi i e^{2\pi i} dt$, und das Integral

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i t}} 2\pi i e^{2\pi i} dt = 2\pi i \cdot \int_0^1 dt = 2\pi i \neq 0.$$

3. Gegeben $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad \neq bc$ sehen wir die Möbiustransformation

$$M : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \mapsto \mathbb{C} \setminus \{a/c\}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

auf die übliche Weise als Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \widehat{\mathbb{C}}$ an, indem wir $M(-d/c) := \infty$ und $M(\infty) := a/c$ setzen. (Konvention: $z/0 = \infty$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

a) Wann ist ∞ ein Fixpunkt von M?

Siehe nächstes Blatt!

b) Zeige: Jede von der Identität verschiedene Möbiustransformation hat mindestens einen aber höchstens zwei Fixpunkte in $\widehat{\mathbb{C}}$.

c) Sei $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, eine invertierbare 2×2-Matrix. Der Satz über die Jordan-Normalform besagt dann, dass eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ existiert, so dass AMA^{-1} entweder eine Diagonalmatrix oder eine obere Dreiecksmatrix mit zwei gleichen diagonalen Einträgen ist. Beweise diese Aussage, indem Du die zu M gehörige Möbiustransformation untersuchst.
Hinweis: Wähle A so, dass ∞ ein Fixpunkt von AMA^{-1} ist.

a) Die Möbiustransformation M ist eine *bijektive* Selbstabbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$ (eine Inverse ist gegeben durch $z \mapsto (dz-b)/(-cz+a)$, wie sich nachrechnen lässt – eine leichte, aber aufwändige Rechnung, falls man alle Ausnahmefälle beachtet...). Dass ∞ ein Fixpunkt ist, bedeutet also, dass $M(-d/c) = \infty = M(\infty)$ gilt. Wegen der Bijektivität von M ist dies äquivalent zu $-d/c = \infty$, nach Definition (bzw. Konvention) also zu

$$c = 0 \text{ (sowie } d \neq 0).$$

Anders ausgedrückt: $M = \left(z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}\right)$ ist eine affin-lineare Abbildung.

b) Wir unterscheiden die Fälle $c = 0$ und $c \neq 0$. Im Fall $c = 0$ ist nach **a)** der Punkt ∞ ein Fixpunkt von M. Für $z \in \mathbb{C}$ bedeutet die Fixpunktgleichung $M(z) = z$ dann $(az + b)/d = z$. Falls

$$a/d \neq 1 \tag{1}$$

erhalten wir einen weiteren Fixpunkt, sonst nicht.

Im Fall $c \neq 0$ ist ∞ kein Fixpunkt von M, und die Fixpunktgleichung $M(z) = z$ ist äquivalent zur quadratischen Gleichung $az + b = (cz + d)z$, umgeordnet also $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Diese hat entweder zwei Lösungen in $\mathbb{C}$, oder eine (mit algebraischer Multiplizität 2).

c) Zu jeder Matrix $A_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gehört auf natürliche Art und Weise eine Möbiustransformation, nämlich $z \mapsto (a_0 z + b_0)/(c_0 z + d_0)$, aufgefasst als Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. Folgen wir dem Hinweis und suchen ein A, sodass ∞ ein Fixpunkt der zu $N := AMA^{-1}$ gehörigen Möbiustransformation ist.

Ist ∞ ein Fixpunkt von M, so wählen wir $A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ist ∞ kein Fixpunkt von M, so hat M nach **b)** mindestens einen Fixpunkt z_1 in $\mathbb{C}$. Die zur Matrix $A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -z_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gehörige Möbiustr'form. $z \mapsto (0 + 1)/(z - z_1)$

Bitte wenden!

bildet z_1 auf ∞ ab. Sei $N_1 := A_1 M A_1^{-1} =: \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion hat die zu N_1 gehörige Möbiustransformation den Fixpunkt ∞. Nach **a)** bedeutet dies, dass die Matrix N_1 eine obere rechte Dreiecksmatrix ist, also $c_1 = 0$.

Hat M nur einen Fixpunkt, so gilt nach der Diskussion in **a)**, um Ungleichung (1) herum, dass $a_1/d_1 = 1$, also $a = d$ ist. Folglich ist N_1 eine obere Dreiecksmatrix mit zwei gleichen diagonalen Einträgen, wie gewünscht, und $A = A_1$ tut das Gewünschte.

Hat M (und folglich auch N_1) zwei Fixpunkte, so müssen wir tiefer graben. Sei $z_2 \in \mathbb{C}$ der weitere Fixpunkt der zu N_1 gehörigen Möbiustransformation. Die zur Matrix $A_2 := \begin{pmatrix} 1 & -z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ gehörige Möbiustransformation $z \mapsto z - z_2$ bildet z_2 auf 0 ab (und ∞ auf ∞). Sei $N_2 := A_2 N_1 A_2^{-1} = (A_2 A_1) M (A_2 A_1)^{-1} =: \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$. Nach Konstruktion hat die zu N_2 gehörige Möbiustransformation die Fixpunkte ∞ und 0. Nach **a)** bedeutet dies wie zuvor, dass N_2 eine obere rechte Dreiecksmatrix ist, also $c_2 = 0$. Aber da auch 0 ein Fixpunkt ist, muss weiter $b_2 = (a_2 0 + b_2)/(0 + d_2) \stackrel{!}{=} 0$ gelten, also ist auch $b_2 = 0$. Das heisst: N_2 isteine Diagonalmatrix, und $A = A_2 A_1$ tut das Gewünschte.