Analysis Zusammenfassung (2012)

Karl Wüst

Teile dieser Zusammenfassung sind übernommen von der Analysis Zusammenfassung von Stefan Heule bzw. der Zusammenfassung von Jonas Passerini.

1 Verschiedenes

1.1 Ungleichungen

Dreiecksungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{C} : |x+y| \leq |x| + |y|$

Youngsche Ungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0 : 2|xy| \leq \varepsilon x^2 + \frac{1}{\varepsilon} y^2$

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : |x \cdot y| \leq ||x||\ ||y||$

Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall x \geq -1, n \in \mathbb{N}_0$

1.2 Trigonometrische Funktionen

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x) \qquad \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \qquad \cosh'(x) = \sinh(x) \qquad \tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x)$$

$$\sin(0) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \qquad \sin(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \qquad \sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(\frac{\pi}{2}) = \cos(0) = 1 \qquad \int \sin^2(x)dx = \frac{x - \sin(x)\cos(x)}{2} + C$$

1.3 Logarithmen

$y = \log_a x \ \Leftrightarrow\ a^y = x \qquad a^{\log_a x} = x \qquad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \log_a a = 1$ und $\log_a 1 = 0$

$\log(uv) = \log u + \log v \qquad \log(\frac{u}{v}) = \log u - \log v \qquad \log(\frac{1}{v}) = -\log v \qquad \log(u^r) = r \log u$

1.4 Komplexe Zahlen

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \qquad \overline{z} = x - iy = e^{-i\varphi} \qquad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$$\mathrm{Re}(z) = x = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \mathrm{Im}(z) = y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

1.5 Funktionen

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

1. Surjektiv: jedes $y \in Y$ hat **mindestens** ein Urbild.
2. Injektiv: jedes $y \in Y$ hat **höchstens** ein Urbild.
3. Bijektiv: jedes $y \in Y$ hat **genau** ein Urbild.

1.6 Algebra

Assoziativität: $a * (b * c) = (a * b) * c$
Neutralelement: $e * a = a \quad \wedge \quad a * e = a$
Inverses: $b * a = a * b = e$
Kommutativität: $a * b = b * a$
Distributivität: $a(b + c) = ab + ac$ und $(b + c)a = ba + ca$

Halbgruppe: Assoziativ
Monoid: Assoziativ, Neutralelement
Gruppe: Assoziativ, Neutralelement, Inverses für jedes Element
Abelsche Gruppe: Kommutative Gruppe
Ring: $+$ ist kommutative Gruppe, $\cdot$ ist Monoid, Distributivität
Kommutativer Ring: Falls $\cdot$ kommutativ
Körper: Nichttrivialer, kommutativer Ring, für welches jedes Element $\neq 0$ eine *Einheit* (u invertierbar; $uv = vu = e$) ist

2 Konvergenz von Funktionen/Folgen

2.1 Konvergenz von Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann in $\mathbb{R}$, wenn sie eine **Cauchy-Folge** ist. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heisst Cauchy-Folge, wenn gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) : |a_n - a_m| < \varepsilon$
Wenn eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und den Grenzwert a besitzt, gilt:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0(\varepsilon) : |a - a_n| < \varepsilon$
Beispiel-Beweis für Konvergenz:

$$(a_n)_{n \geq 1} = \sqrt[n]{n} \qquad (a_n \geq 1) \quad \Rightarrow \quad \text{Vermutung: } a = 1$$
$$\text{Dann muss gelten für } n \geq n_0 : 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$$
$$\Rightarrow (1 - \varepsilon)^n < n < (1 + \varepsilon)^n \left(= 1 + n \cdot \varepsilon + \frac{n(n-1}{2}\varepsilon^2 + \cdots \geq \frac{n(n-1}{2}\varepsilon^2 \right)$$
$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 > n \qquad \big(\text{Wenn das gilt, gilt auch } n < (1+\varepsilon)^n\big)$$
$$\Rightarrow n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad n_0(\varepsilon) = \lfloor \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \rfloor + 1$$
$$\Rightarrow \forall n \geq n_0(\varepsilon) : 1 - \varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$$

Satz von Bolzano-Weierstrass: Jede beschränkte Folge besitzt (min) eine konvergente Teilfolge, also auch (min) einen Häufungspunkt.
Ein **Häufungspunkt** ist der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge: $\limsup_{n \to \infty} a_n$ bezeichnet den Häufungspunkt mit höchstem Wert, $\liminf_{n \to \infty} a_n$ den mit niedrigsten Wert.

2.2 Regeln für Konvergenz von Funktionen/Folgen

Regeln für Grenzwerte (Gelten auch jeweils für $x_0 = \infty$ und für Grenzwerte von Folgen):

(1) $\lim_{x \to x_0} C \cdot f(x) = C \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) \qquad (C \in \mathbb{R})$

(2) $\lim_{x \to x_0} \big[f(x) + g(x)\big] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$

(3) $\lim_{x \to x_0} \big[f(x) \cdot g(x)\big] = \big[\lim_{x \to x_0} f(x)\big] \cdot \big[\lim_{x \to x_0} g(x)\big]$

(4) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} \qquad (\text{ für } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0)$

(5) $\lim_{x \to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim_{x \to x_0} f(x)}$

(6) $\lim_{x \to x_0} (f(x))^k = \big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big)^k$

(7) $\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim_{x \to x_0} f(x)}$

(8) $\lim_{x \to x_0} \big[\log_a f(x)\big] = \log_a \big[\lim_{x \to x_0} f(x)\big] \qquad (f(x) > 0)$

Bernoulli - de l'Hospitalsche Regel:
Für Grenzwerte die zu "$\frac{0}{0}$" oder "$\frac{\infty}{\infty}$" führen, gilt:

(9) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Umformungen zur Verwendung von Bernoulli - de l'Hospital:

Funktion $f(x)$	$\lim_{x\to x_0} f(x)$	Umformung
$u(x)\cdot v(x)$	$0\cdot\infty$	$\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$
$u(x)-v(x)$	$\infty-\infty$	$\frac{\frac{1}{v(x)}-\frac{1}{u(x)}}{\frac{1}{u(x)\cdot v(x)}}$
$u(x)^{v(x)} \quad (u(x)>0)$	$0^0, \infty^0, 1^\infty$	$e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$

2.3 Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{n\to 0} \frac{\sin(n)}{n} = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{nx\to 0} \frac{e^n-1}{n} = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to 0} \frac{a^n-1}{n} = \ln(a)$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to 0} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$

$\lim\limits_{n\to 1} \frac{\ln(n)}{n-1} = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^p q^n = 0 \;\;,\;\; p\in\mathbb{N}$ und $0<q$

$\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, a>0$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ $\quad$ $\lim\limits_{n\to\infty} x^k \ln x = 0,\; k>0$

$\lim\limits_{n\to 0} \frac{|n|}{n}$ existiert nicht

3 Reihen

Arithmetische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} (a+k\cdot d) = (n+1)\left(a+d\cdot\frac{n}{2}\right)$$

Geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{n} a\cdot q^k = \frac{a\cdot(q^{n+1}-1)}{q-1} \qquad (q\neq 1)$$

3.1 Konvergenzverhalten von Reihen

Reihe $s_a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, falls s_a konvergiert, konvergiert a_n nach 0.
Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \qquad \begin{cases} q<1: & \text{Reihe konvergiert} \\ q>1: & \text{Reihe divergiert} \\ q=1: & \text{Kriterium versagt} \end{cases}$$

Wurzelkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \qquad \begin{cases} q<1: & \text{Reihe konvergiert} \\ q>1: & \text{Reihe divergiert} \\ q=1: & \text{Kriterium versagt} \end{cases}$$

Majorantenkriterium:
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls eine konvergierende Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existiert mit $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$
Minorantenkriterium:
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, falls eine divergierende Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ existiert mit $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 : a_n \geq b_n$
Leibnizsches Konvergenzkriterium für alternierende Reihen:
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot a_n \quad (a_n > 0 \quad \forall n)$ konvergiert, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \wedge \quad \forall n \geq n_0 : a_n > a_{n+1}$
Absolute Konvergenz: Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine absolut konvergente Reihe kann "umsortiert" werden und bleibt konvergent gegen den gleichen Grenzwert.

3.2 Wichtige konvergente Reihen

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot q^n = \frac{a}{1-q} \qquad (\text{für } |q| < 1,\ \text{divergiert für } |q| \geq 1) \qquad (\text{Geometrische Reihe})$$

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \qquad (\text{Eulersche Zahl})$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2 \qquad (\text{alternierende harmonische Reihe})$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

(7) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

3.3 Wichtige divergente Reihen

(8) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad (\text{harmonische Reihe})$$

4 Potenzreihen

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \qquad \text{Spezialfall } x_0 = 0 : P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Konvergenzradius $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ oder $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

$\Rightarrow$ Reihe P(x) konvergiert $\forall x \in \,]x_0 - r, x_0 + r[$ (eventuell auch für einen oder beide Randpunkte, muss geprüft werden)

4.1 Wichtige Potenzreihen

- $\sin(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$
- $\cos(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
- $e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \qquad = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + ...$
- $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (\text{für } -1 < x \leq 1)$

Wenn f durch eine Potenzreihe gegeben ist, so ist diese gleich der Taylorreihe.

5 Stetigkeit

Eine Funktion ist monoton wachsend, falls gilt: $f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$
Eine Funktion ist monoton fallend, falls gilt: $f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$
Eine Funktion heisst streng monoton, wenn $<$ bzw. $>$ gilt statt $\leq$ bzw. $\geq$.
Eine Funktion $f(x)$ ist stetig an der Stelle x_0, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Eine Funktion heisst stetige Funktion, wenn sie an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.
Sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig, streng monoton wachsend $\Rightarrow f : [a, b] \mapsto [f(a), f(b)]$ ist bijektiv und f^{-1} ist stetig.

5.1 Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz stetig mit Lipschitzkonstante L, falls gilt:
$||f(x) - f(y)|| \leq L \cdot ||x - y|| \qquad \forall x, y \in \Omega$
Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig (ergänzbar) in $\overline{\Omega}$ $\quad$ ($\overline{\Omega}$: Abschluss von Ω)

5.2 Komposition und Addition

Seien f und g stetig:

- $f + g$ ist stetig
- $f \cdot g$ ist stetig
- $f \circ g$ ist stetig

5.3 Kompaktheit

$K \subset \mathbb{R}^d$ heisst kompakt, falls jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K$ einen Häufungspunkt in K besitzt, d.h falls eine Teilfolge $S \subset \mathbb{N}$ und ein $x_0 \in K$ existiert mit:
$x_k \to x_0 \quad (k \to \infty, k \in S)$
Wenn k kompakt ist, gilt:

- $a = \inf K = \min K$
- $b = \sup K = \max K$
- $f(K)$ ist kompakt und nimmt inf und sup an

5.4 Topologie

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Der **offene Ball** mit Radius $r > 0$ um x_0 ist die Menge $B_r(x_0 = x \in \mathbb{R}^d ; |x - x_0| < r$
x_0 heisst innerer Punkt der Menge Ω, falls $\exists r > 0 : B_r(x_0) \subset \Omega$
Ω heisst offen, falls jedes $x_0 \in \Omega$ ein innerer Punkt ist. Es gilt:

- Ω_1, Ω_2 offen $\quad \Rightarrow \Omega_1 \cap \Omega_2$ offen
- $\Omega_i \subset \mathbb{R}^d$ offen, $\forall i \in I \quad \Rightarrow \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ offen

$A \subset \mathbb{R}^d$ heisst abgeschlossen, falls $\mathbb{R}^d \setminus A$ offen ist. Es gilt:

- A_1, A_2 abgeschlossen $\quad \Rightarrow A_1 \cup A_2$ abgeschlossen
- $A_i \subset \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, $\forall i \in I \quad \Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen

Offener Kern/das Innere von Ω : $\quad \Omega^\circ = \text{int}(\Omega) = \bigcup_{U \subset \Omega, U \text{ offen}} U$
Abschluss von Ω : $\quad \overline{\Omega} = \text{clos}(\Omega) = \bigcap_{A \supset \Omega, A \text{ abgeschlossen}} A$
Rand von Ω : $\quad \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ$
Ω offen: $\quad \Omega = \Omega^\circ$
Ω abgeschlossen: $\quad \Omega = \overline{\Omega}$
$\emptyset, \mathbb{R}$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen. $\mathbb{Q}$ ist weder offen noch abgeschlossen:
$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset \qquad (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \qquad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
$K \in \mathbb{R}^d$ ist kompakt, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

5.5 Normen

Eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ ist eine Abbildung $||\cdot|| : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- Definitheit: $||x|| \geq 0, \quad ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
- Positive Homogenität: $||a \cdot x|| = |a| \cdot ||x||$
- Dreiecksungleichung: $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

$(a \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d)$
Für $1 \leq p < \infty$ definiert

$$||x||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p} \qquad x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^d$, ebenso

$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |x_i|$$

Zwei Normen $||\cdot||^{(1)}, ||\cdot||^{(2)} : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ heissen äquivalent, falls

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \ \exists C > 0 : \quad \frac{1}{C} \cdot ||x||^{(1)} \leq ||x||^{(2)} \leq C \cdot ||x||^{(1)}$$

Es gilt:

$$||x||_\infty \leq ||x||_p \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| = ||x||_1 \leq d \cdot ||x||_\infty$$

5.5.1 Supremumsnorm

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig auf $\overline{\Omega}$ ergänzbar. Dann ist die Supremumsnorm:

$$||f||_{C^0} := \sup_{x \in \Omega} ||f(x)|| < \infty$$

5.6 Topologisches Kriterium für Stetigkeit

$U \subset \Omega$ heisst Umgebung von x_0 relativ zu Ω, falls $\exists r > 0 : B_r(x_0) \cap \Omega \subset U$
$U \subset \Omega$ heisst relativ offen, falls U Umgebung jedes Punktes $x_0 \in U$ ist.
$A \subset \Omega$ heisst relativ abgeschlossen, falls $\Omega \setminus A$ relativ offen ist.
Sei $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n, x_0 \in \Omega$. Es sind äquivalent:

- f ist stetig an der Stelle x_0
- $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \Omega : \quad ||x - x_0|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$
- Für jede Umgebung V von $f(x_0)$ in $\mathbb{R}^n$ ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0 in Ω

Für $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- f ist stetig
- das Urbild $U = f^{-1}(V)$ jeder offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ ist relativ offen
- das Urbild $A = f^{-1}(B)$ jeder abgeschlossenen Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ ist relativ abgeschlossen

5.7 Zwischenwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und sei $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig, $f(a) \leq f(b)$ (bzw. $f(a) \geq f(b)$).
Dann gibe es zu jedem $y \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $y \in [f(b), f(a)]$) ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

5.8 Punktweise und gleichmässige Konvergenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, f, f_k : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$
$(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiergt punktweise gegen f, falls gilt: $\forall x \in \Omega : \lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$
$(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiergt gleichmässig gegen f, falls gilt: $\sup_{x \in \Omega} |f_k(x) - f(x)| \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$

5.8.1 Weierstrasssatz

Sei $I =]a,b[$ und sei $f \in C^0(\overline{I})$. Dann gibt es Polynome $P_k, k \in \mathbb{N}$ mit $P_k \xrightarrow{\text{glm}} f \quad (k \to \infty)$

6 Differentialrechnung auf $\mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

f heisst differenzierbar in x_0 , wenn $f'(x_0)$ existiert.
$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ heisst auf Ω differenzierbar, wenn $f'(x_0)$ für alle $x_0 \in \Omega$ existiert.
$f(x_0)$ differenzierbar $\Longrightarrow$ f ist stetig in x_0

6.1 Regeln

Summenregel:	$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
Produktregel:	$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
Quotientenregel:	$(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
Kettenregel:	$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

6.2 Mittelwertsatz

Seien $-\infty < a < b < \infty$ und sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in $]a,b[$, dann gilt:

$$\exists x_0 \in]a,b[: f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

6.3 Umkehrsatz

Sei $f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton mit Wertebereich $]c,d[$. Dann ist $f :]a,b[\mapsto]c,d[$ bijektiv und $f^{-1} :]c,d[\mapsto \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \forall x \in]a,b[$$

bzw. $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in]c,d[$$

6.4 Funktionen der Klasse C^k

f heisst von der Klasse $C^k(\Omega)$, falls f k-mal auf Ω differenzierbar ist und $f, f^{(1)}, ..., f^{(k)}$ stetig sind.
Sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C^1(\Omega)$ mit $f_k \xrightarrow{\text{glm}} f, f'_k \xrightarrow{\text{glm}} g \quad (k \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad f \in C^1(\Omega)$ und $f' = g$
Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$ ist im Innern ihres Konvergenzkreises differenzierbar mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a_k \cdot x^{k-1}$
sin, cos, Exp, Polynome, rationale Funktionen sind in C^m $\forall m \in \mathbb{N}$
Potenzreihen mit Konvergenzradius $r > 0$ sind in $C^m(B_r(0))$ $\forall m \in \mathbb{N}$

7 Taylor Formel

Eine $(m+1)$-mal differenzierbare Funktion $f(x)$ lässt sich um das "Entwicklungszentrum" a mit dem Taylorpolynom $T_m f(x;a)$ wie folgt entwickeln:

$$T_m f(x;a) = \sum_{k=0}^{m} f^{(k)}(a) \cdot \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Es gilt

$$f(x) = T_m f(x;a) + r_m f(x;a) \qquad \text{mit Restterm} \quad r_m f(x;a) = f^{(m+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} \qquad \text{für ein } \xi \in]a,x[$$

Die Genauigkeit für $x \in]a,b[$ der Annäherung durch das Taylor Polynom der m-ten Ordnung lässt sich abschätzen durch

$$\sup_{a<x<b} |r_m f(x;a)| \leq \sup_{a<x<b} |f^{(m+1)}(x)| \cdot \frac{(b-a)^{m+1}}{m!}$$

7.1 Zusammengesetzte Taylerpolynome

Sei $h(x) = f(g(x))$. Dann gilt:

$$T_m h(x;a) = T_m f\left(T_m g(x;a); g(a)\right) \qquad \text{(alle Komponenten von Grad} \leq m\text{)}$$

sowie für $h(x) = f(x) \cdot g(x)$:

$$T_m h(x;a) = T_m(f(x);a) \cdot T_m(g(x);a) \qquad \text{(alle Komponenten von Grad} \leq m\text{)}$$

8 Kurvendiskussion

	notwendig	hinreichend
Extremalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
Minimalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) > 0$
Maximalstelle	$f'(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) < 0$
Wendepunkt	$f''(x) = 0$	$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
Sattelpunkt	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0$	$f'(x) = 0 \wedge f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

Sei $f \in C^m(\Omega)$, $m \geq 1$ und sei $x_0 \in \Omega$ mit $f'(x_0) = \ldots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$.

- Falls $m = 2k+1$ und x_0 lokale Minimalstelle ist, so folgt $f^{(m)}(x_0) = 0$
- Falls $m = 2k$ und $f^{(m)}(x_0) > 0$, so ist x_0 strikte lokale Minimalstelle.

8.1 Konvexe Funktionen

8.1.1 Definition konvexe Funktion

Sei $f \in C^2(]a,b[)$ mit $f'' \geq 0$. Dann heisst f konvex und es gilt für alle $x_0, x_1 \in\,]a,b[$ und $0 \leq t \leq 1$

$$f\left(tx_1 + (1-t)x_0\right) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_0)$$

8.1.2 Satz von Jensen

Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für $x_1, \ldots, x_N \in]a,b[$, $0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_N \leq 1$ mit $\sum \alpha_i = 1$

$$f\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(x_i)$$

9 Integration

F ist Stammfunktion von f , falls gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{und} \quad \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

Eigenschaften

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

$$\frac{d}{dx} \int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^b \frac{d}{dx} f(x)\, dx \qquad \text{Ableitung und Integral dürfen vertauscht werden)}$$

9.1 Partielle Integration

$$\int u'(x) \cdot v(x)\, dx = u \cdot v - \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

9.2 Substitution

1. Aufstellung der Substitutionsgleichungen:
   $u = g(x), \quad \frac{du}{dx} = g'(x), \quad dx = \frac{du}{g'(x)}$
2. Durchführung der Integralsubstitution:
   $\int f(x)\ dx = \int \varphi(u)\ du$
3. Integration (Berechnung des neuen Integrals):
   $\int \varphi(u)\ du = \Phi(u) \qquad (\text{mit } \Phi'(u) = \varphi(u))$
4. Rücksubstitution:
   $\int f(x)\ dx \ = \ \int \varphi(u)\ du \ = \ \Phi(u) \ = \ \Phi(g(x)) \ = \ F(x)$

9.3 Partialbruchzerlegung

$f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$, x_1 und x_2 sind die Nullstellen des Nenners

Beispiel: $\int \frac{-x^2+2x-17}{x^3-7x^2+11x-5}dx \quad = \quad \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{4\cdot dx}{(x-1)^2} - \int \frac{2\cdot dx}{x-5} \quad = \quad \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} - 2\cdot\ln|x-5| + C$

9.4 Riemann-Integral

Riemann-Summe: $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

9.5 Uneigentliches Riemann-Integral

Sei $f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ über jedes $[c,d] \subset]a,b[$ Riemann-integrabel. Dann ist f uneigentlich R-Integrabel, falls

$$\int_a^b f(x)\ dx := \lim_{c\downarrow a, d\uparrow b} \int_c^d f(x)\ dx$$

existiert.

10 Differentialgleichungen

10.1 Separierbare Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\text{Sei} \quad y' = \frac{dy}{dx} = h(x)\cdot g(y) \qquad \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\ dy = \int h(x)\ dx$$

10.2 Homogene lineare Differentialgleichungen

Eine homogene lineare Differentialgleichung der Ordnung m hat die Form:

$$y^{(m)} + a_{m-1}\cdot y^{(m-1)} + \cdots + a_0\cdot y = 0$$

Lösungsansatz:

Charakteristisches Polynom: $Q(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1}\cdot\lambda^{m-1} + \cdots + a_0$

finde Nullstellen: $0 = \lambda^m + a_{m-1}\cdot\lambda^{m-1} + \cdots + a_0$

Sei l die Anzahl der Nullstellen λ_i . λ_i sei eine m_i-fache Nullstelle und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$. Dann ist die Lösung gegeben durch:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{k=0}^{m_i-1} C_{ik}\cdot t^k\cdot e^{\lambda_i\cdot t}\right)$$

Falls nur einfache Nullstellen bestehen, gilt:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{l} C_i\cdot e^{\lambda_i\cdot t}$$

10.2.1 Komplexe Nullstellen

Seien $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ und $\overline{\lambda_1} = \alpha + i\beta$ komplexe Nullstellen der Differentialgleichung (Komplexe Nullstellen treten immer konjugiert auf).

$\Rightarrow$ zugehörige komplexe Lösungen: $\quad e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} \qquad e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t}$

$\Rightarrow$ zugehörige reelle Lösungen: $\quad e^{\alpha t} \cdot \underbrace{\left(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}\right)}_{2\cos(\beta t)} \qquad \frac{1}{i} e^{\alpha t} \cdot \underbrace{\left(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}\right)}_{2i\sin(\beta t)}$

Für eine m-fache Nullstelle gilt (analog zu reellen Nullstellen):

$$C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + C_2 \cdot t \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) + \cdots + C_m \cdot t^{m-1} \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$$

bzw.

$$C_1 \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t) + C_2 \cdot t \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t) + \cdots + C_m \cdot t^{m-1} \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t)$$

(wird zur allgemeinenn Lösung der reellen Nullstellen addiert)

10.3 Inhomogene Differentialgleichungen

F_{hom} := allgemeine Lösung der der homogenen Gleichung.
F_{part} := partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung.
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann gegeben durch $F = F_{hom} + F_{part}$

Differentialgleichung: $\quad y^{(m)} + a_{m-1} \cdot y^{(m-1)} + \cdots + a_0 \cdot y = r(t)$

Charakteristisches Polynom: $\quad Q(\lambda) = \lambda^m + a_{m-1} \cdot \lambda^{m-1} + \cdots + a_0$

Lösungsansätze:

1. $r(t) = b \cdot e^{at}$

$$\Rightarrow F_{\text{part}} = \frac{b}{Q^{(p)}(a)} \cdot t^p \cdot e^{at} \qquad (a \text{ ist } p\text{-fache Nullstelle von } Q)$$

2. (a) $r(t) = b \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow F_{\text{part}} = b \cdot t^p \cdot \text{Im}\left\{\frac{1}{Q^{(p)}(\alpha + i\omega)} \cdot e^{(\alpha+i\omega)\cdot t}\right\} \qquad ((\alpha + i\omega) \text{ ist } p\text{-fache Nullstelle von } Q)$$

   (b) $r(t) = b \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos(\omega t)$

$$\Rightarrow F_{\text{part}} = b \cdot t^p \cdot \text{Re}\left\{\frac{1}{Q^{(p)}(\alpha + i\omega)} \cdot e^{(\alpha+i\omega)\cdot t}\right\} \qquad ((\alpha + i\omega) \text{ ist } p\text{-fache Nullstelle von } Q)$$

3. $r(t) =$ Polynom $R_m(t)$

   falls $a_i = 0 \forall i < q, a_q \neq 0$ (Koeffizienten der Diff. Gl.) :
   Ansatz: $\quad y(t) =$ Polynom $P_{m+q}(t) = b_m \cdot t^{m+q} + b_{m-1} \cdot t^{m+q-1} + \cdots + b_0 \cdot t^q$
   einsetzen in Diff. Gl., Koeffizienten vergleichen

4. $r(t) = R_m(t) \cdot e^{at}$

   Ansatz: $\quad y(t) = P_m(t) \cdot t^k \cdot e^{at} \qquad$ (a ist k-fache Nullstelle von Q)
   $P_m(t)$ über Koeffizientenvergleich ermitteln

5. Anderes $\Rightarrow$ **Variation der Konstanten**

   Inhomogene, lineare DGL's erster Ordnung, also von der Form $y'(x) = h(x) \cdot y(x) + g(x)$ von denen man die vollständige Lösung F_{hom} der homogenen Gleichung kennt, können mittels "Variation der Konstanten" gelöst werden:

   (a) Die Konstante der homogenen Lösung wird durch eine stetige, von x abhängige Funktion ersetzt: $y_{Ansatz} = c(x)F_{\text{hom}}$

   (b) Nun kann dieser Ansatz in die DGL eingesetzt werden:

$$y'(x) = \cancel{c(x) \cdot F'_{\text{hom}}} + c'(x) \cdot F_{\text{hom}} = \cancel{c(x) \cdot h(x)y(x)} + g(x)$$

   (c) Der so entstehende Ausdruck kann nun mittels Integration nach $c(x)$ aufgelöst werden, womit die allgemeine Lösung $y(x) = c(x) \cdot F_{\text{hom}}$ der inhomogenen Gleichung gefunden ist.

11 Differentialrechnung in $\mathbb{R}^n$

Differential von $f(x)$ in $\mathbb{R}^n$:

$$df(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \qquad \text{wobei } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Das Gradientenfeld ∇f bezüglich Standartbasis ist gegeben durch:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

$\nabla f(x_0)$ gibt die Richtung und den Betrag des steilsten "Anstiegs" des Graphen von f an der Stelle x_0

11.1 Richtungsableitung

Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $|a| = 1$. Dann ist die Richtungsableitung von f in Richung a gegeben (falls existent) als

$$D_a f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot a) - f(x_0)}{h} = \varphi_a'(0) \qquad \text{mit} \quad \varphi_a(t) = f(x_0 + t \cdot a)$$

Ist f diffbar, so gilt weiter

$$D_a f(x) := \mathrm{d}f(x_0)\, a = \langle \nabla f, a \rangle$$

11.2 Differentationsregeln

11.2.1 Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Seien $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_o \in \Omega$ diffbar. Dann sind $f + g$, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch ${}^f/_g$ an der Stelle x_o diffbar, und es gilt

1. $\mathrm{d}(f + g)(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) + \mathrm{d}g(x_0)$
2. $\mathrm{d}(fg)(x_0) = g(x_0)\mathrm{d}f(x_0) + f(x_0)\mathrm{d}g(x_0)$
3. $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)\mathrm{d}f(x_0) - f(x_0)\mathrm{d}g(x_0)}{g^2(x_0)}$

11.2.2 Kettenregel, Teil 1

Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_o \in \Omega$ diffbar und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $g(x_0)$ diffbar. Dann ist die Funktion $f \circ g : \Omega \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 diffbar und es gilt

$$\mathrm{d}\,(f \circ g)\,(x_o) = f'\,(g(x_0))\, \mathrm{d}g(x_0)$$

11.2.3 Kettenregel, Teil 2

Seien $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diffbar an der Stelle $x_0 \in \Omega$, $g : I \subset \mathbb{R} \to \Omega$ diffbar an der Stelle t_0, wobei $g(t_0) = x_0$. Dann ist $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ an der Stelle t_0 diffbar, und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ g)(t_0) = \mathrm{d}f(g(t_0)) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

oder dazu äquivalent

$$\mathrm{d}(f \circ g)(t_0) = \mathrm{d}f(g(t_0))\mathrm{d}g(t_0)$$

11.2.4 Integrale mit Parametern

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und partiell nach t diffbar mit stetiger Ableitungsfunktion. Betrachte

$$u(t) = \int_0^t h(s, t)\, ds$$

Dann ist $u \in C^1(\mathbb{R})$ und für die Ableitung gilt

$$\dot{u}(t) = h(t, t) + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(s, t)\, ds$$

12 Wegintegral

Sei $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)) \qquad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Dann ist die 1-Form von λ:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; dx_i$$

Sei

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

eine parametrisierte Kurve mit $t \in \,]a, b[$. Dann ist das Wegintegral von λ längs γ gegeben durch:

$$\int_\gamma \lambda := \int_a^b \lambda\left(\gamma(t)\right) \cdot \dot{\gamma}(t) \; dt$$

Beispiel:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\lambda(x, y) = 2y\, dx - x\, dy = (2y, \; -x) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_\gamma \lambda = \int_0^{2\pi} (2\sin(t), \; -\cos(t)) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \; dt = \int_0^{2\pi} \left(-2\sin^2(t) - \cos^2(t)\right) \; dt = -3\pi$$

Wege $\gamma_1, \gamma_2 \;\in C^1([0, a]; \Omega)$ mit $\gamma_1(a) = \gamma_2(0)$ können aneinandergehängt werden zu

$$\gamma = \begin{cases} \gamma_1(t) & 0 \leq t \leq a \\ \gamma_2(t-a) & a \leq t \leq 2a \end{cases}$$

Es gilt:

$$\int_\gamma \lambda = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \lambda = \int_{\gamma_1} \lambda + \int_{\gamma_2} \lambda$$

Das Wegintegral über ein Vektorfeld $\vec{\boldsymbol{v}}$ ist definiert als

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{s}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = \int_a^b \langle \vec{\boldsymbol{v}}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle = \int_\gamma \lambda \qquad \text{mit } \lambda = v^T$$

12.1 Konservative Vektorfelder

Das Vectorfeld $\vec{\boldsymbol{v}}$ heisst konservativ, falls für jeden geschlossenen Weg γ gilt:

$$\int_\gamma \vec{\boldsymbol{v}}(\vec{\boldsymbol{s}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{s}} = 0 \qquad \text{oder äquivalent:} \quad \exists f : \vec{\boldsymbol{v}} = \nabla f$$

$\vec{\boldsymbol{v}}$ ist dann ein Potentialfeld mit Potential f

13 Extremstellen in $\mathbb{R}^n$

13.0.1 Kritischer Punkt und Hessematrix

$x_0 \in \Omega$ heisst kritischer Punkt von f falls $\mathrm{d}f(x_0) = 0$. Die Hessematrix einer Funktion f ist definiert als

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2 : H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

13.0.2 Vorgehen

1. Bestimme alle kritischen Punkte von f.
2. Berechne für jeden dieser Punkte die Hesse-Matrix $H_f(x)$ und untersuche ihre Definitheit:
   (a) H_f ist positiv definit, d.h. $x^T H_f x > 0 \quad \forall x \neq 0$. $\rightarrow$ **Minimum**
   Ist die Matrix zusätzlich symmetrisch (wenn $f \in C^2(\Omega)$ ist das immer so), so sind in alle Eigenwerte grösser 0.
   (b) H_f ist negativ definit, d.h. $x^T H_f x < 0 \quad \forall x \neq 0$. $\rightarrow$ **Maximum**
   Ist die Matrix zusätzlich symmetrisch, so sind in alle Eigenwerte kleiner 0.
   (c) H_f ist indefinit, d.h. $x^T H_f x$ ohne klares Vorzeichen. $\rightarrow$ **Sattelpunkt**
   Ist die Matrix zusätzlich symmetrisch, so gibt es positive und negative Eigentwerte.
   (d) Falls $\det(H_f) = 0$, liegt eine **Entartung** vor. Keine Aussage möglich.

Bemerkung für $\mathbb{R}^2$ Da $\det(H_f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, ist in $\mathbb{R}^2$ mit $\det(H_f)$ bereits ob bekannt ein Sattelpunkt vorliegt ($\det(H_f) < 0$). Andernfalls gibt der erste Eintrag, also $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, das Vorzeichen von λ_1 an.

14 Sonstiges

14.1 Wichtige Differentiale

$\sin(x)' = \cos(x)$ $\quad$ $\cos(x)' = -\sin(x)$ $\quad$ $\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ $\quad$ $\cot(x)' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$
$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $\mathrm{arcot}(x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$\sinh(x)' = \cosh(x)$ $\quad$ $\cosh(x)' = \sinh(x)$ $\quad$ $\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$ $\quad$ $\coth(x)' = -\frac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$
$\mathrm{arsinh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ $\mathrm{arcosh}(x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\quad$ $\mathrm{artan}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $\quad$ $\mathrm{arcoth}(x)' = \frac{1}{1-x^2}$

$(a^x)' = (\ln(a) \cdot a^x)$ $\quad$ $\ln(x)' = \frac{1}{x}$ $\quad$ $\log_a(x)' = \frac{1}{(\ln(a) \cdot x)}$

$(2x^{x^2})' = (2(e^{\log(x)})^{x^2})' = (2e^{\log(x)\cdot x^2})' = 2x^{x^2} \cdot (x + \log(x) \cdot 2x)$

14.2 Wichtige Integrale

$\int \tan(x) = -\ln|\cos(x)|$, Beispielumformung: $\ln|y| = -\ln|\cos(x)| \quad \Leftrightarrow \quad |y| = \frac{1}{|\cos(x)|} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{\cos(x)}$

$\int \sin^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\ (x - \sin(x)\cos(x))$ $\quad$ $\int \cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\ (x + \sin(x)\cos(x))$ $\quad$ $\int \cos(x)\sin(x)\ dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)$
$\int \cos^2(x)\sin(x)\ dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x)$ $\quad$ $\int \cos(x)\sin^2(x)\ dx = \frac{\sin^3(x)}{3}$

$\int \frac{1}{e^x+1}\ dx = x - \ln(e^x+1)$ $\quad$ $\int \frac{a}{e^x+b}\ dx = \frac{a(x-\ln(e^x+b))}{b}$ $\quad$ $\int \frac{a}{bx+c}\ dx = \frac{a\ln(bx+c)}{b}$

$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln(a)}$

$\int (ax+b)\ dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}$ $\quad$ $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot |\ln a|$

$\int \frac{x\ dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln|ax+b|$ $\quad$ $\int x(ax+b)^n\ dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} \quad (n \neq -1, -2)$

$\int \frac{x\ dx}{(ax+b)'2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2} \cdot \ln|ax+b|$ $\quad$ $\int \frac{x\ dx}{(ax+b)^n} = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}} \quad (n \neq 1, 2)$

$\int \frac{dx}{a(ax+b)} = -\frac{1}{b} \cdot \ln|\frac{ax+b}{x}|$ $\quad$ $\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} - \frac{1}{b^2} \cdot \ln|\frac{ax+b}{x}|$

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$ $\quad$ $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$
$\int \frac{x\ dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \ln(a^2+x^2)$ $\quad$ $\int \frac{x\ dx}{(a^2+x^2)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$

$\int \frac{x^2\ dx}{a^2+x^2} = x - a \cdot \arctan(\frac{x}{a})$ $\quad$ $\int \frac{x^2\ dx}{(a^2+b^2)^2} = -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$
$\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)} = -\frac{1}{2a^2} \cdot \ln(\frac{a^2+x^2}{x^2})$ $\quad$ $\int \frac{dx}{x^2(a^2+x^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3} \cdot \arctan(\frac{x}{a})$

$\int \frac{x\ dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2} \cdot \ln|a^2-x^2|$ $\quad$ $\int \frac{x\ dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} \quad (n \neq 1)$
$\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = -\frac{1}{2a^2} \cdot \ln|\frac{a^2-x^2}{x^2}|$ $\quad$ $\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)} = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3} \cdot \ln|\frac{a+x}{a-x}|$

14.3 Approximation $n!$

$n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$

$\frac{n!}{(\frac{n}{\lambda})^n} \approx \frac{\sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n}{(\frac{n}{\lambda})^n} \approx \frac{\sqrt{2\pi n}}{(\frac{e}{\lambda})^n} \approx \sqrt{n} (\frac{\lambda}{e})^n = \frac{\sqrt{n}}{(\frac{e}{\lambda})^n}$

14.4 Zykloide

Abwicklung eines Punktes P auf dem Rand des Kreises:

Gewöhnliche Zykloide $\begin{cases} x &= r \cdot (t - \sin(t)) \\ y &= r \cdot (1 - \cos(t)) \end{cases}$ Verkörzte Zykloide $\begin{cases} x &= r \cdot t - c \cdot \sin(t)) \\ y &= r - c \cdot \cos(t)) \end{cases}$ $c =$ Abstand P zu M

Bogenlänge

$s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$ $ds = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} \cdot dt$

ds ausrechnen und dann integrieren $\rightarrow s =$ Bogenlänge (ev. mithilfe der Potenzreihendarstellung des Integrals).

γ ist Einheitskreis mit positivem Umlaufsinn: $\gamma = (\cos(t), \sin(t))$