Übung 5

26.10.2021
Lina De Windt

Themen von Heute:

> **Teil 1:** Fragen zu Themen / Aufgaben von letzter Woche?

> **Teil 2:** Recap der Theorie von dieser Woche:

1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen
   - 1.1 Charakterisierung von Kräftegruppen
   - 1.2 Die Dyname & ihre Invarianten
   - 1.3 statische Äquivalenz
   - 1.4 Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der Invarianten der Dyname
2. Der Freiheitsgrad

> **Teil 3:** Übungsaufgaben lösen (Serie 5)

Teil 1: Fragen zu Themen von letzter Woche?

Quiz 2: Beim Berechnen von Momenten und Leistungen darf man die Kräfte entlang ihrer .... verschieben.

a) Rotationsachse b) Wirkungslinie c) Senkrechte d) zu müde für TechMech

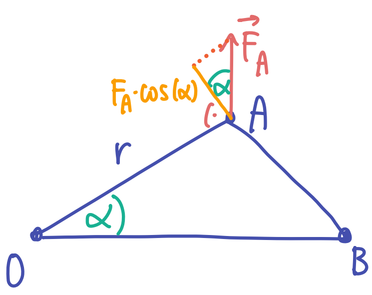
Quiz 1: Wie bestimmt man das Moment einer Kraft $\vec{F}_A$ bezüglich Punkt 0?

a) $\vec{M}_0^A = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A$

b) $M_0^A = r \cdot F_A$ → nur wenn $\vec{r} \perp \vec{F}$

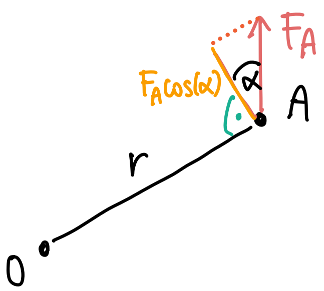
c) $M_0^A = r \cdot F_A \cdot \cos(\alpha)$

d) $\vec{M}_0^A = \vec{M}_B^A + \vec{r}_{0B} \times \vec{R}$



Teil 2: Recap der Theorie von dieser Woche

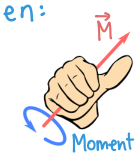
Good to know: Momente berechnen in 2D:



die Komponente der Kraft, die senkrecht auf $\vec{r}$ steht

$$M_0^A = r \underbrace{F_A \cos(\alpha)}$$

→ dann Richtung mit der rechten-Hand-Regel bestimmen:



$$\rightarrow \vec{M}_0^A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r F_A \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

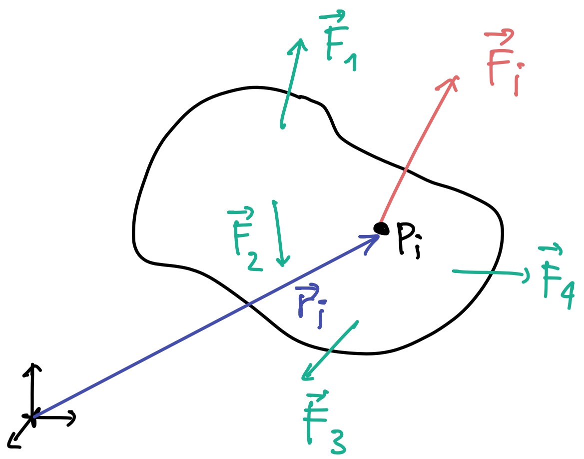
Check: $\vec{M}_0^A = \begin{pmatrix} r\cos(\alpha) \\ r\sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \cdot r\cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$\vec{M}$ hat in 2D immer nur eine Komponente !

1. Äquivalenz & Reduktion von Kräftegruppen

Als erstes müssen wir einige Begriffe kennenlernen:

Kräftegruppe: Ist eine Sammlung von Kräften, die an einem Körper angreifen.

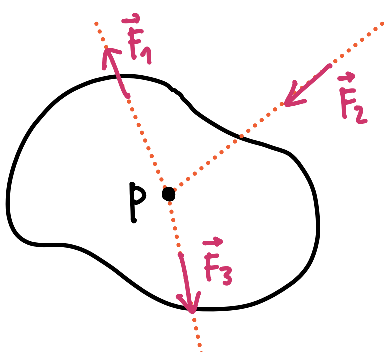


$$\boxed{\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_N\}}$$

P_i ist dabei der Angriffspunkt der Kräftegruppe

$\vec{r}_i$ ist der Ortsvektor zu P_i.

Zentrale Kräftegruppe: Wenn die Wirkungslinien aller Kräfte einer Kräftegruppe durch einen Punkt gehen



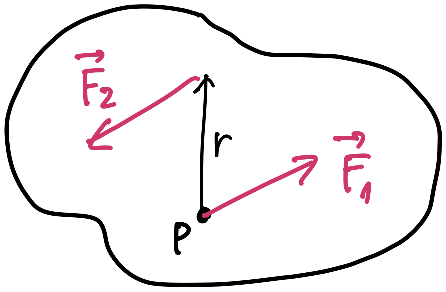
$$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$$

Dann ist $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \neq 0$ und

$\vec{M}_P = \vec{0}$

das Moment bezüglich P (Pkt. wo alle Wirkungslinien durchgehen)

Kräftepaar: besteht aus 2 entgegengesetzt gerichtete Kräfte gleichen Betrags.



$\vec{R} = 0$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ *1

Abstand zw. den 2 Angriffspunkten

das Moment ist in diesem Fall unabhängig vom Bezugspunkt! *2

$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |F|$; $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$

*1 Warum? Nehmen wir an, wir berechnen das Moment bezüglich 0. Dann:

$$\vec{M}_0^{tot} = \vec{M}_0^{F_1} + \vec{M}_0^{F_2} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \underbrace{\vec{F}_2}_{\vec{F}_2 = -\vec{F}_1} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times (-\vec{F}_1) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \underset{\substack{\vec{F}_1 = \vec{F} \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}}}{=} \vec{r} \times \vec{F}$$

(Abstand zw. den 2 Angriffspkt.)

*2 Warum? → Transformationsregel: $\vec{M}_P = \vec{M}_Q^{tot} + \vec{r}_{PQ} \times \vec{R} \underset{\vec{R}=0}{=} \vec{M}_Q \Rightarrow \vec{M}_P = \vec{M}_Q \quad \forall P, Q \in SK$

Nullsystem / System im Gleichgewicht: Eine Kräftegruppe ist ein Nullsystem, bzw. das System (d.h. Körper und Kräftegruppe) ist im Gleichgewicht, wenn $\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_0^{tot} = \vec{0} \end{cases}$

Symbolisch: $\{\vec{F}_i\} \Leftrightarrow 0$

2. Die Dyname

einer Kräftegruppe ist definiert als:

$$\boxed{\{\vec{R}, \vec{M}_P\}}$$

P: beliebiger Pkt.

(analog zur Kinemate in Kinematik)

Eine Kräftegruppe kann immer auf ihre Dyname reduziert werden.
Analog zur Kinemate beschreibt die Dyname eine Kräftegruppe komplett & besitzt 2 Invarianten:

1. Invariante: $\boxed{\vec{I}_1 = \vec{R}}$

2. Invariante: $\boxed{I_2 = \vec{M}_P \cdot \vec{R}}$

Erinnerung: Invariante = überall gleich auf SK.

Nun stellt sich die Frage, wann 2 Kräftegruppen an einem SK dieselbe Wirkung haben.
Dann heissen diese Kräftegruppen (statisch) äquivalent.

3. Statische Äquivalenz:

Definitionsgemäss sind 2 Kräftegruppen statisch äquivalent, wenn ihre Gesamtleistungen gleich sind: $\boxed{P(\{\vec{F}_i\}) = P(\{\vec{G}_j\})}$ $\forall$ SK-Bewegungen

Doch was folgt daraus?

Erinnerung: P = Gesamtleistung $= \vec{R}\cdot\vec{v}_B + \vec{M}_B\cdot\vec{\omega}$ ← Achtung das gilt nur bei SK (wir schauen uns jetzt nur SK an)

$\vec{M}_B$ = Gesamtmoment bezüglich $B = \sum_i \vec{M}_B^i = \sum_i \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i$

$\vec{R}$ = Resultierende $= \sum_i \vec{F}_i$

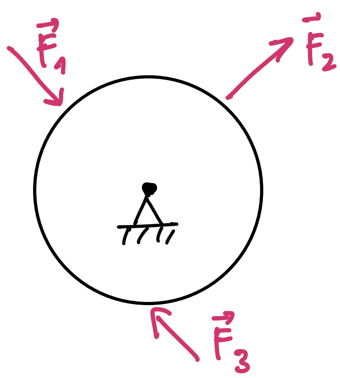
$\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$ = Kinemate

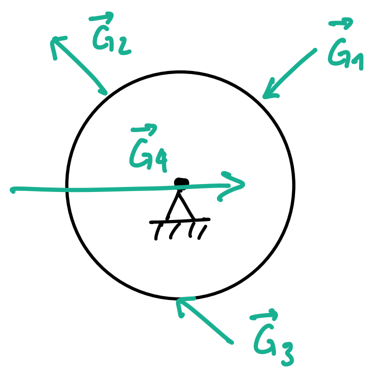
aus $P = \vec{R}\cdot\vec{v}_B + \vec{M}_B\cdot\vec{\omega}$ erhalten wir, dass 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ & $\{\vec{G}_j\}$ statisch äquivalent sind, wenn $\vec{R}_{\{\vec{F}_i\}} = \vec{R}_{\{\vec{G}_j\}}$ und $\vec{M}_{P\{\vec{F}_i\}} = \vec{M}_{P\{\vec{G}_j\}}$

D.h. in Kürze:

> ⚠ Wenn 2 Kräftegruppen in einem beliebigen Punkt die gleiche Dyname $\{\vec{R}, \vec{M}_P\}$ haben, sind sie statisch äquivalent.

Bsp:





$\{\vec{F}_i\} = \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3\}$ $\{\vec{G}_j\} = \{\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3, \vec{G}_4\}$

$\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_j\}$ sind verschiedene Kräftegruppen, die auf denselben SK wirken.

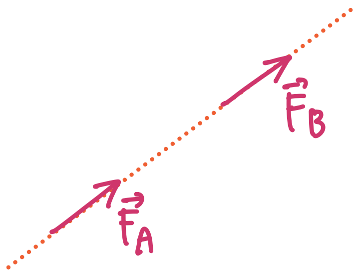
Falls $\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}_2 = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 + \vec{G}_4$ und $\vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_j\}$, dann sind $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_j\}$ statisch äquivalent.

Statische Äquivalenz von 2 Kräften:

2 Kräfte $\vec{F}$ und $\vec{G}$ sind statisch äquivalent wenn:

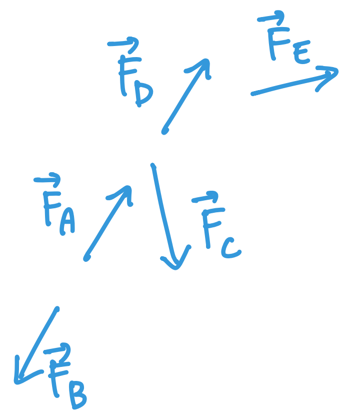
$\vec{F} = \vec{G}$ <u>und</u> Wirkungslinie von $\vec{F}$ = Wirkungslinie von $\vec{G}$

Bsp:



$\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$ sind statisch äquivalent

Quiz: Welche Kräfte sind statisch äquivalent?



Zusammenfassung:

Charakterisierung einer Kräftegruppe mittels der Invarianten der Dyname:

Kräftepaar ($\hat{=}$ Moment) : $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P \neq 0$

Einzelkraft: $\vec{R} \neq 0$ und $I_2 = 0$

Nullsystem : $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_P = 0$

Schraube: $I_2 \neq 0$

Für 2 Kräftegruppen $\{\vec{F}_i\}$ und $\{\vec{G}_i\}$: statisch äquivalent wenn

$$\vec{R}\{\vec{F}_i\} = \vec{R}\{\vec{G}_i\} \quad \text{und} \quad \vec{M}_P\{\vec{F}_i\} = \vec{M}_P\{\vec{G}_i\}$$

beliebig, aber gleicher Pkt.

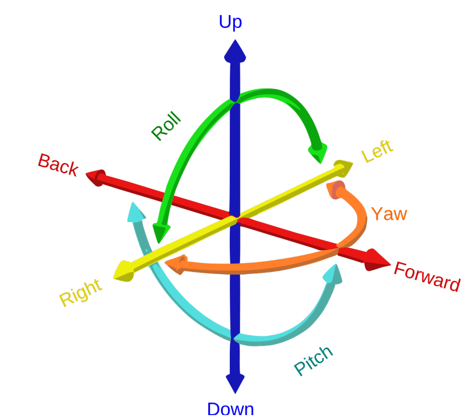
2. Der Freiheitsgrad:

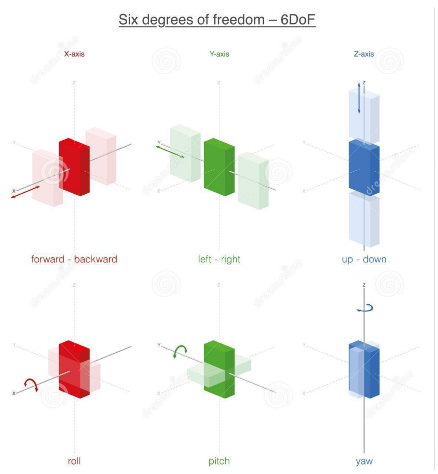
Der Freiheitsgrad ist die Anzahl unabhängiger Bewegungen, welcher ein Körper oder System machen kann.

Um den Freiheitsgrad eines Systems zu bestimmen, muss man salopp gesagt sich überlegen, in welche Richtungen sich das System unabhängig bewegen kann.
(Keine Angst es gibt auch eine Formel dafür :))

Schauen wir uns zuerst einfach ein einzelner freier Körper im Raum an:

Freier Körper in 3D:

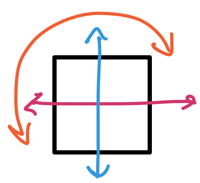




$\boxed{\text{Freiheitsgrad} = 6}$

↑ kann sich in all diese Richtungen bewegen! Bzw. alle Bewegungen sind Kombinationen von diesen 6!

Freier Körper in 2D:



→ kann sich in 3 "Richtungen" (x, y, Rotation) bewegen

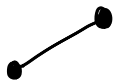
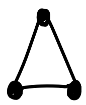
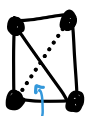
$\boxed{\text{Freiheitsgrad} = 3}$

Nun wollen wir uns anschauen, wie man den Freiheitsgrad eines Systems (aus mehreren SK & Bindungen) bestimmen kann. Dafür haben wir eine nützliche Formel:

$$\boxed{f = n - b}$$

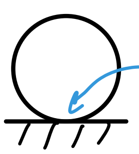
n = Summe der Freiheitsgrade der einzelnen Körper
b = Anzahl der linear unabhängigen Bindungsgleichungen
↳ Bindungen reduzieren den Freiheitsgrad eines Systems!

Beispiele:

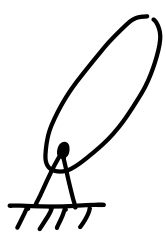
	2D	3D
• (ein Punkt)	$n=2$	$n=3$
	$n=2\cdot2=4$ $b=1$ $\Rightarrow f=4-1=3$	$n=2\cdot3=6$ $b=1$ $\Rightarrow f=6-1=5$
	$n=3\cdot2=6$ $b=3$ $\Rightarrow f=6-3=3$	$n=3\cdot3=9$ $b=3$ $\Rightarrow f=9-3=6$
 diese Bindung schränkt in 2D den Freiheitsgrad nicht weiter ein → nicht mitzählen!	$n=4\cdot2=8$ $b=5$ $\Rightarrow f=8-5=3$	$n=4\cdot3=12$ $b=6$ $\Rightarrow f=12-6=6$

↳ wir haben hier eigentlich bewiesen, dass ein SK in 2D den Freiheitsgrad 3, in 3D den Freiheitsgrad 6 hat! (ein SK ist eine Ansammlung von zusammengebundenen materiellen Punkten)

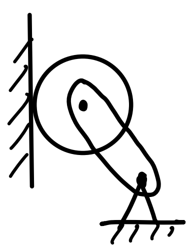
Beispiel: mehrere SK in 2D:



$n=3$
$b=2$
$\Rightarrow f=3-2=1$



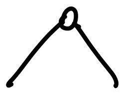
$n=3$
$b=2$
$\Rightarrow f=3-2=1$



$n=2\cdot3=6$
$b=2+2+2=6$
$\Rightarrow f=6-6=0$

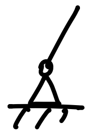
Tipp: b bestimmen: überlege, in welche Richtungen der Körper sich nicht mehr bewegen kann.

Die wichtigsten Bindungen (für die Serie 5):



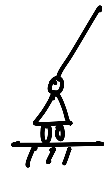
$b = 2$

unabhängige Bewegungen in x- und y-Richtung nicht möglich



$b = 2$

unabhängige Bewegungen in x- und y-Richtung nicht möglich



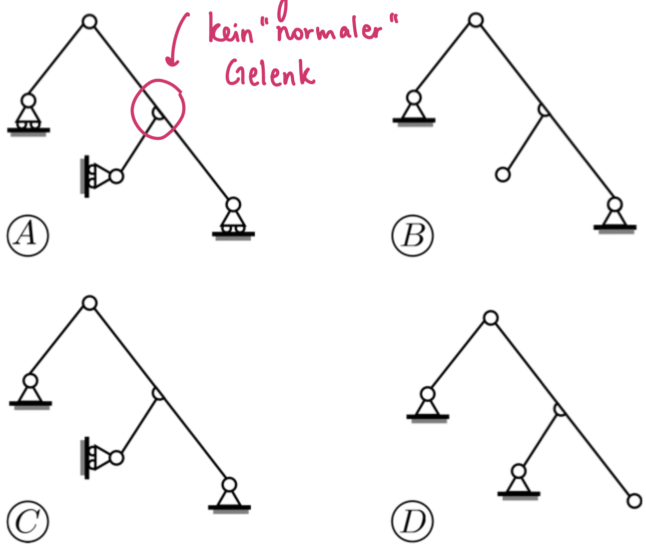
$b = 1$

unabhängige Bewegungen in y-Richtung nicht möglich

Teil 3: Übungsaufgaben - Serie 5

4. Welche der folgenden Systemen haben den Freiheitsgrad 2 ?

Achtung das ist kein "normaler" Gelenk



(a) Nur A.

(b) Nur D.

(c) Nur B und C.

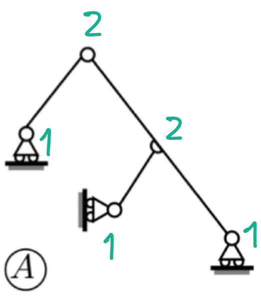
(d) Nur A, B und D.

(e) Alle.

alle Systeme haben 3 SK → $n = 3 \cdot 3 = 9$

grün: # lin. unabhängige Bindungen (≙ Bewegungseinschränkungen)

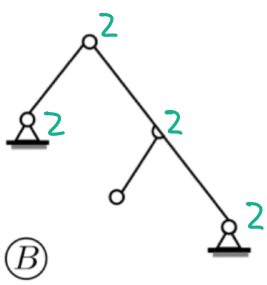
Ⓐ



$b = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$

$f = n - b = 9 - 7 = \underline{\underline{2}}$

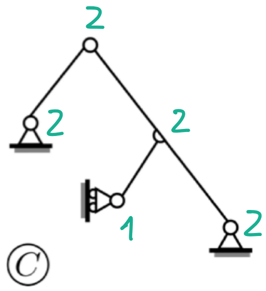
Ⓑ



$b = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$

$f = n - b = 9 - 8 = 1$

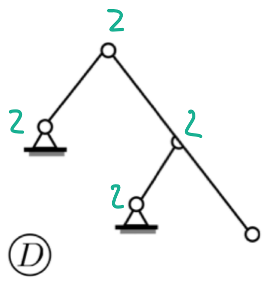
(C)



$b = 2+2+2+2+1 = 9$

$f = n - b = 9 - 9 = \underline{\underline{0}}$

(D)



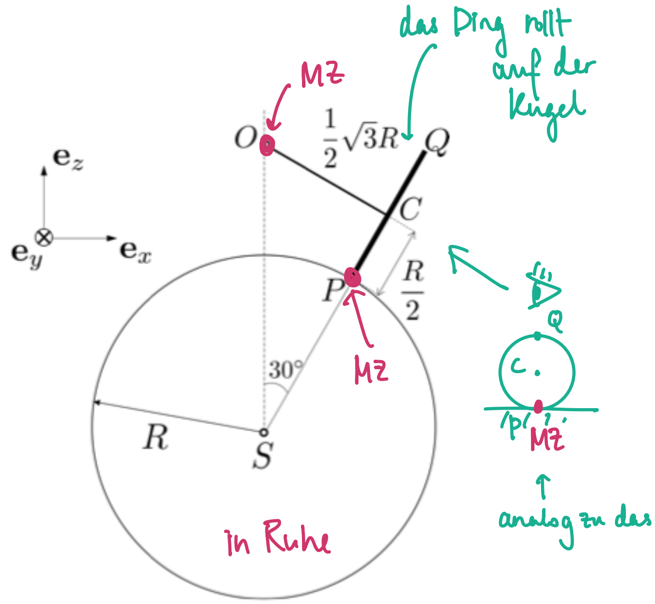
$b = 2+2+2+2 = 8$

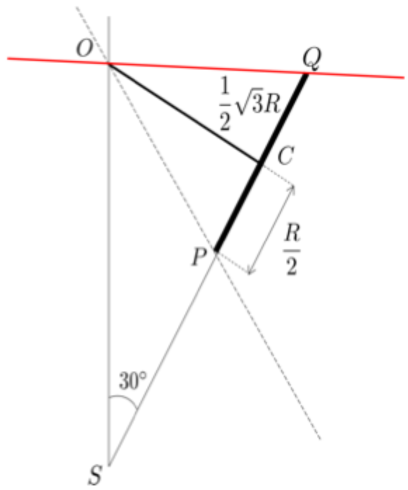
$f = n - b = 9 - 8 = \underline{\underline{1}}$

$\Rightarrow$ nur A hat Freiheitsgrad 2

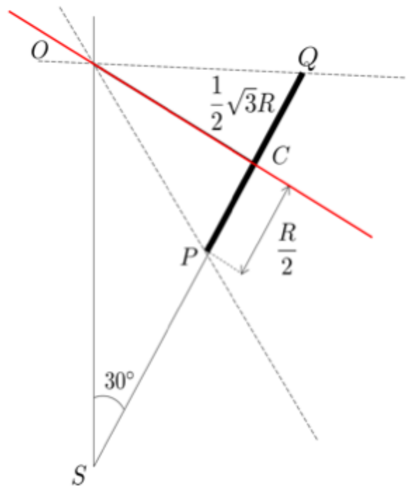
3. Auf einer Kugel mit dem Radius R rollt eine Kreisscheibe mit dem Radius $R/2$, die auf einer in O gelagerten Welle sitzt. Die Scheibenebene enthält im Berührungspunkt P die Normale zur Kugelfläche, welche mit der Vertikalen einen Winkel von $\pi/6$ einschliesst. Der Mittelpunkt C der Nabe bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_C = (0,\ v,\ 0)$. In welcher Abbildung ist die richtige momentane Rotationsachse der Kreiselung dargestellt?

↳ alle Pkte auf Rotationsachse haben $\vec{v} = 0$

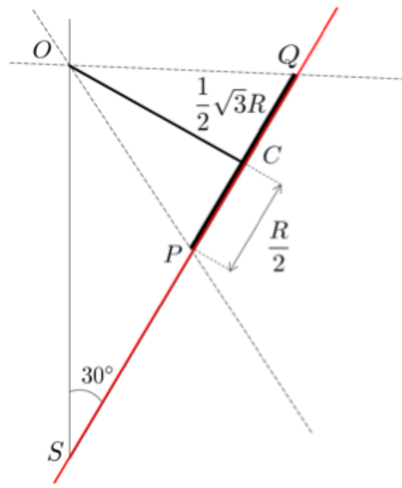




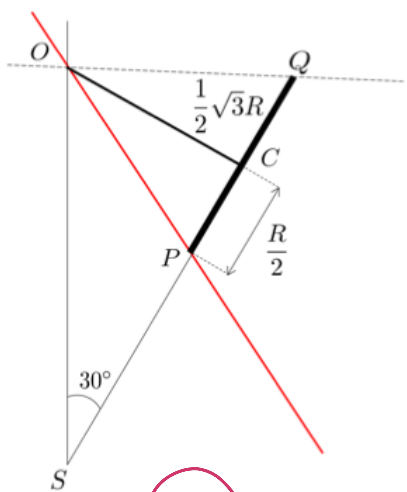
(a)



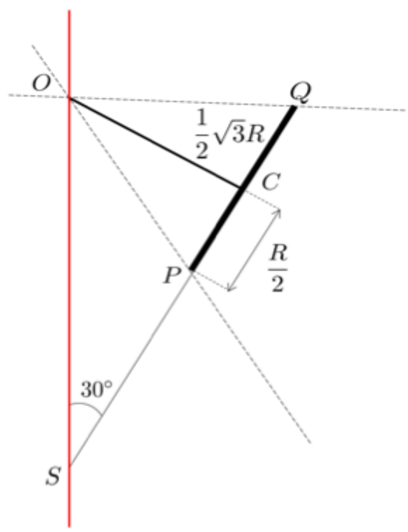
(b)



(c)

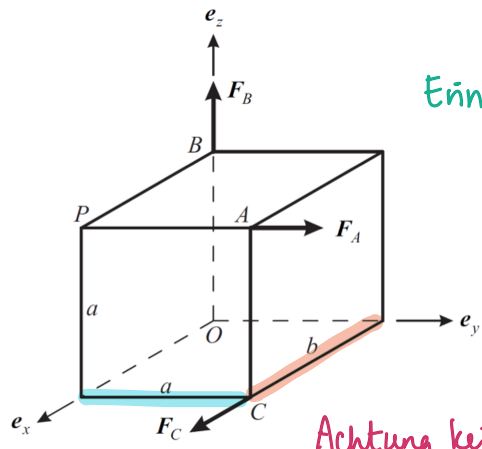


(d)



(e)

1. [1] Die Kräfte $\mathbf{F}_A = F\mathbf{e}_y$, $\mathbf{F}_B = F\mathbf{e}_z$, und $\mathbf{F}_C = F\mathbf{e}_x$ greifen gemäss Abbildung an einem starren Quader an (Kantenlängen b, a, a).



Erinnerung: $\vec{M}_0^A =$

Achtung kein Würfel!

1. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in O.
2. Berechnen Sie die Dyname der Kräftegruppe in P.
3. Wie muss das Verhältnis $\frac{a}{b}$ gewählt werden, damit sich die Kräftegruppe auf eine Einzelkraft reduzieren lässt?

alle Kräfte in Vektorform aufschreiben: $\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{F}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}$ $\vec{F}_C = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

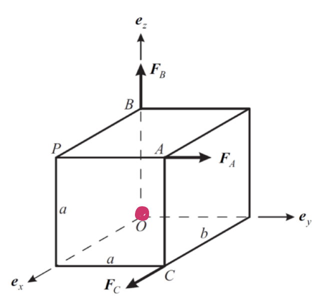
1) Dyname im Punkt 0: $\{\vec{R}, \vec{M}_0^{tot}\}$

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ F \\ F \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_0^{tot} = \sum_i \vec{M}_0^i$$

$$\vec{M}_0^A = \vec{r}_{0A} \times \vec{F}_A = \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aF \\ 0 \\ bF \end{pmatrix}$$

$\vec{M}_0^B = \vec{0}$ (Wirkungslinie geht durch Pkt. 0)



$$\vec{M}_0^C = \vec{r}_{0C} \times \vec{F}_C = \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -aF \end{pmatrix}$$

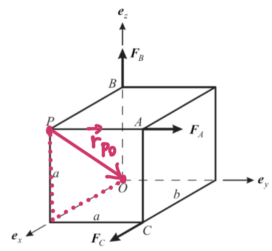
$$\vec{M}_0^{tot} = \sum_i \vec{M}_0^i = \vec{M}_0^A + \vec{M}_0^B + \vec{M}_0^C = \begin{pmatrix} -aF \\ 0 \\ bF \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -aF \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F$$

$\Rightarrow$ Dyname im Pkt. 0: $\{\vec{R}, \vec{M}_0\} = \underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F, \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F \right\}}}$

2) Dyname im Pkt. P $= \{ \vec{R}, \vec{M}_P^{tot} \}$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F \qquad \text{(gleich wie 1))}$$

$$\vec{M}_P^{tot} = \vec{M}_0^{tot} + \vec{r}_{P0} \times \vec{R} \qquad \text{(Traforegel)}$$



$$= \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F + \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F$$

$$= \left(\begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ -a+b \\ -b \end{pmatrix} \right) F = \begin{pmatrix} -a+a \\ -a+b \\ b-a-b \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \\ -a \end{pmatrix} F$$

$$\Rightarrow \{ \vec{R}, \vec{M}_P \} = \underline{\underline{\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F, \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \\ -a \end{pmatrix} F \right\}}}$$

3) Einzelkraft: wenn $\underbrace{\vec{R} \neq 0}_{\text{bereits erfüllt :)}}$ und $I_2 = 0$

Nehme Dyname im Pkt. 0: $\{ \vec{R}, \vec{M}_0 \}$*

$$I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ b-a \end{pmatrix} F = (-a+b-a) F^2 = (b-2a) F^2 \overset{!}{=} 0$$

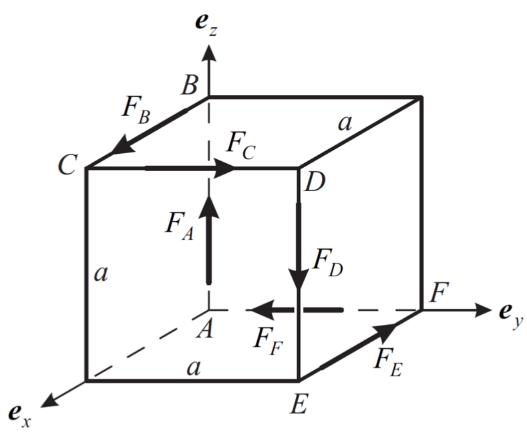
$$\underset{\text{da } F \neq 0}{\Longrightarrow} \quad b - 2a = 0 \iff b = 2a \iff \underline{\underline{\frac{a}{b} = \frac{1}{2}}}$$

* Wir hätten auch Pkt. P nehmen können & wären auf das gleiche Resultat gekommen:

$$I_2 = \vec{R} \cdot \vec{M}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b-a \\ -a \end{pmatrix} F = (b-a-a) F^2 = (b-2a) F^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\underset{\text{da } F \neq 0}{\Longrightarrow} \quad b - 2a = 0 \iff b = 2a \iff \underline{\underline{\frac{a}{b} = \frac{1}{2}}}$$

2. [2] Bestimmen Sie die eingezeichneten Komponenten der sechs am Würfel (Seitenlänge a) skizzierten Kräfte so, dass sie einem Momentvektor in z-Richtung vom Betrag M statisch äquivalent sind.



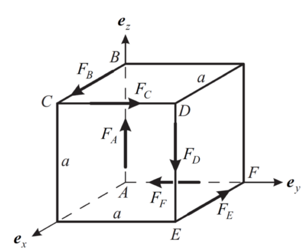
Wir müssen die Kräfte so bestimmen, s.d. statisch äquivalent zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ d.h. $\vec{R} = 0$ und $\vec{M}_0^{tot} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}$ ← unser Ziel.

$\Rightarrow$ Wir müssen daraus ein Gleichungssystem aufstellen & nach den Unbekannten Komponenten auflösen:

1. alle Kräfte in Vektorform aufschreiben:

$$\vec{F}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \end{pmatrix} \quad \vec{F}_B = \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ F_C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_D \end{pmatrix}$$



$$\vec{F}_E = \begin{pmatrix} -F_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -F_F \\ 0 \end{pmatrix}$$

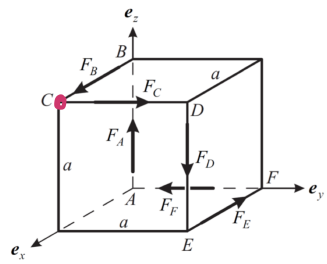
$$\Rightarrow \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_C \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -F_F \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_B - F_E \\ F_C - F_F \\ F_A - F_D \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

daraus erhalten wir :
$$\begin{cases} F_B - F_E = 0 \iff F_B = F_E & \cdots (1) \\ F_C - F_F = 0 \iff F_C = F_F & \cdots (2) \\ F_A - F_D = 0 \iff F_A = F_D & \cdots (3) \end{cases}$$

$\vec{M}_C^{tot}$ bestimmen:

↑ beliebig → ich wähle hier C (in Mulö Pkt. A → ihr könnt sehen dass es auf dasselbe hinauskommt :))



$$\vec{M}_C^A = \vec{r}_{CA} \times \vec{F}_A = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ aF_A \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{M}_C^B &= \vec{0} \\ \vec{M}_C^C &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \text{Wirkungslinien gehen durch C}$$

$$\vec{M}_C^D = \vec{r}_{CD} \times \vec{F}_D = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aF_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_C^E = \vec{r}_{CE} \times \vec{F}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -F_E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ aF_E \\ aF_E \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_C^F = \vec{r}_{CF} \times \vec{F}_F = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ -a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -F_F \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -aF_F \\ 0 \\ aF_F \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_C^{tot} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_A \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} -F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ F_E \\ F_E \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} -F_F \\ 0 \\ F_F \end{pmatrix} a$$

$$= \begin{pmatrix} -F_D - F_F \\ F_A + F_E \\ F_E + F_F \end{pmatrix} a \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\rightarrow \quad -(F_D + F_F)\, a = 0 \overset{a \neq 0}{\iff} F_D = -F_F \overset{(2)}{=} -F_C \quad \cdots (4)$$

$$\rightarrow \quad (F_A + F_E)\, a = 0 \iff F_A = -F_E \underset{(3)}{\Rightarrow} F_A = F_D = -F_E \quad \cdots (5)$$

aus 1, 4 und 5 : $F_A = F_D = -F_C = -F_F = -F_E = -F_B$ ... 6

$$\rightarrow (F_E + F_F)\, a = M \iff F_E + F_F = \frac{M}{a} \underset{F_F = F_E}{\iff} 2F_E = \frac{M}{a}$$

$$\Rightarrow F_E = \frac{M}{2a} \quad \text{-- } 7$$

Somit haben wir: (aus 6 und 7):

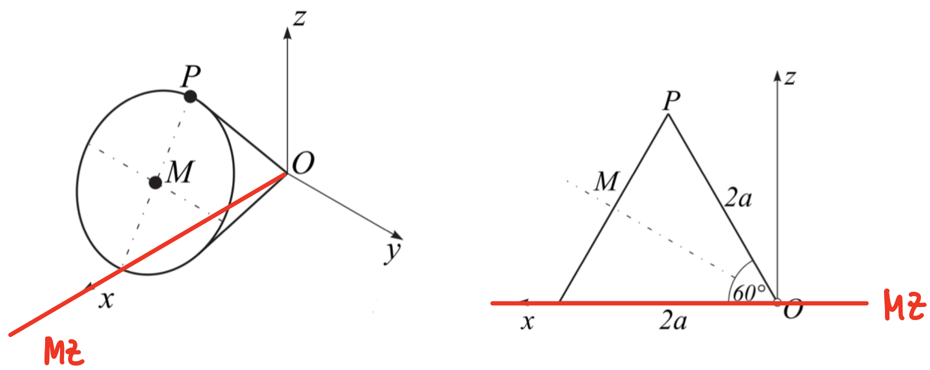
$$F_A = -\frac{M}{2a} \qquad F_D = -\frac{M}{2a}$$

$$F_B = \frac{M}{2a} \qquad F_E = \frac{M}{2a}$$

$$F_C = \frac{M}{2a} \qquad F_F = \frac{M}{2a}$$

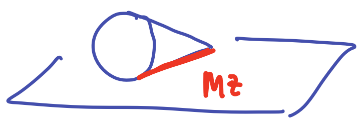
//

5. Ein starrer Kegel rollt mit der gegebenen Rotationsschnelligkeit ω auf der xy-Ebene ab, so dass seine Spitze stets im Ursprung des raumfesten kartesischem Koordinatensystems liegt. Die Abmessungen sind der Skizze zu entnehmen.



1. Was ist in der skizzierten Lage die momentane Rotationsachse?
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_P$ und $\mathbf{v}_M$ in den Punkten P und M in der momentanen Lage.
3. Wie lange braucht der Kegel fur eine Umdrehung um die z-Achse?

1) siehe Skizze (rollen ohne gleiten:



ganze Kontaktlinie zum Boden ist MZ)

Laufvariable

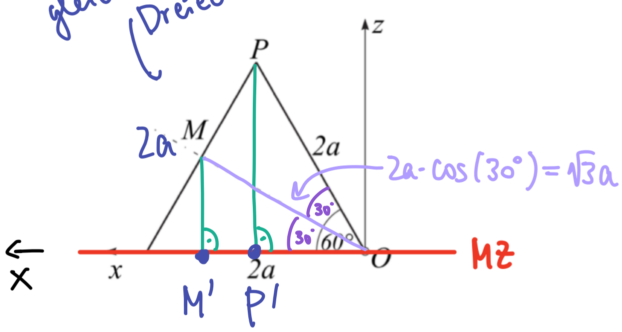
$$\mu: r(\alpha) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

← Geradengleichung mit $(0,0,0)$ als Pkt. auf der Geraden

Richtungsvektor ($\vec{e}_\omega$)

2) $\vec{v}_P$ und $\vec{v}_M$

gleichseitiges Dreieck :)



$$r_{P'P} = 2a \cdot \sin(60°) = \sqrt{3}a$$

$$r_{M'M} = \sqrt{3}a \cdot \sin(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$r_{OM'} = \sqrt{3}a \cdot \cos(30°) = \frac{3}{2}a$$

MZ - linie ist $\vec{\omega}$

⇒ SK-Formel verwenden:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ \sqrt{3}a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3}a\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

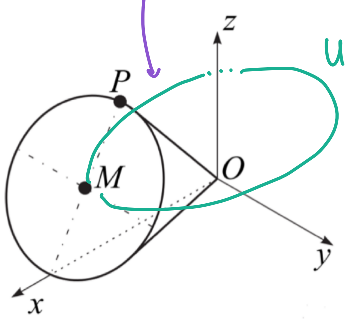
Wir kennen diese Geschwindigkeit! ($\vec{0}$ weil auf MZ)

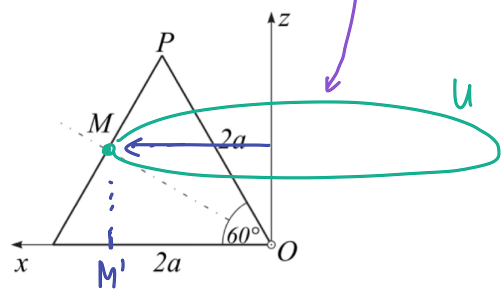
$$\vec{v}_M = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_{OM'} \\ 0 \\ r_{M'M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{3}{2}a \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\underline{\vec{v}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

3) Zeit für eine Umdrehung um die z-Achse:

Pkt. M bleibt immer auf derselben Höhe! (z-Komponente von M ändert sich nicht)





Bahnkurve von Pkt. M bestimmen:

Welche Strecke hinterlegt Pkt. M in einer vollen Umdrehung?

$\rightarrow U = 2\pi r$ (Umfang eines Kreises) $\quad r = r_{OM'} = \frac{3}{2}a$

$\Rightarrow U = 2\pi \frac{3}{2} a = 3\pi a$

Schnelligkeit von Pkt. M $= v_M = |\vec{v}_M| = \frac{\sqrt{3}}{2}a\omega$

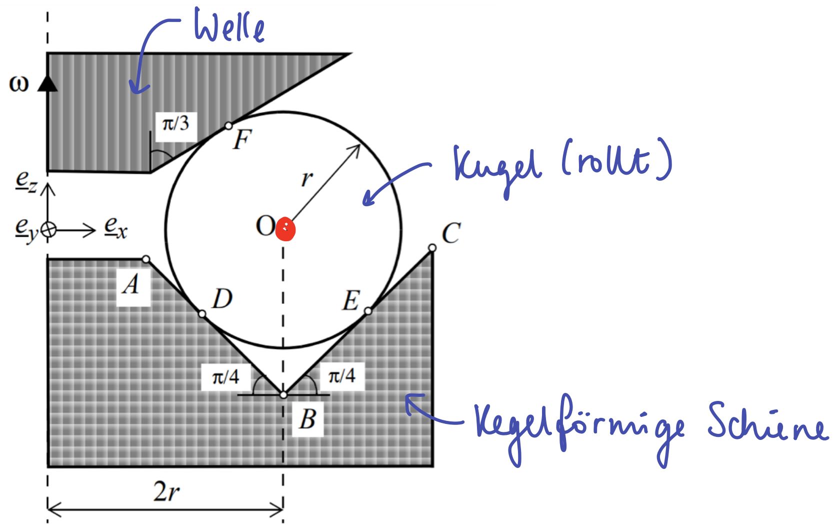
Wir wissen, dass $\boxed{\text{Strecke} = \text{Zeit} \cdot \text{Schnelligkeit}}$ (hoffentlich aus dem Gymi)

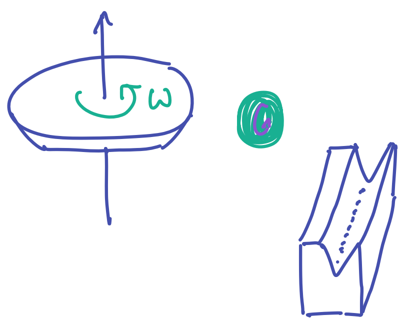
$\Leftrightarrow \text{Zeit} = \dfrac{\text{Strecke}}{\text{Schnelligkeit}}$

$\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow t = \dfrac{U}{v_M} = \dfrac{3\pi a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a\omega} = \dfrac{6}{\sqrt{3}}\dfrac{\pi}{\omega} = \underline{\underline{2\sqrt{3}\dfrac{\pi}{\omega}}}$

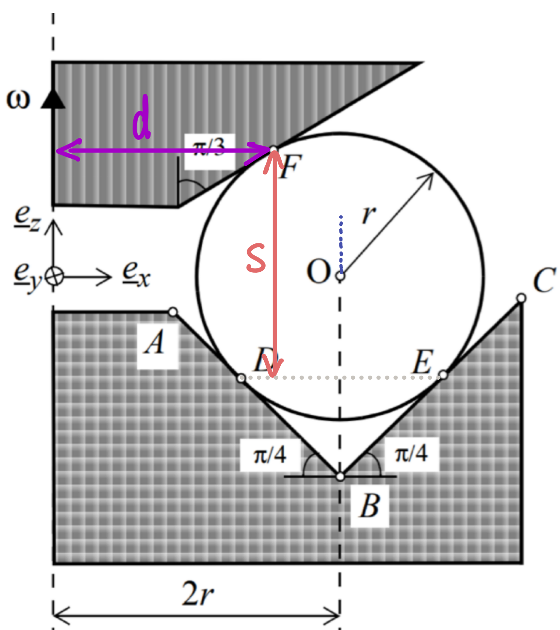
6. Eine Kugel mit Radius r rollt auf einer festen Kegelfläche AB vom halben Öffnungswinkel $\pi/4$, einer festen Kegelfläche BC vom gleichen Öffnungswinkel und auf der gezeichneten, um $\mathbf{e}_z$ drehenden Welle ab. Die Welle rotiere mit der Rotationsgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$. Was ist die Kinemate der Kugel in ihrem Mittelpunkt O?





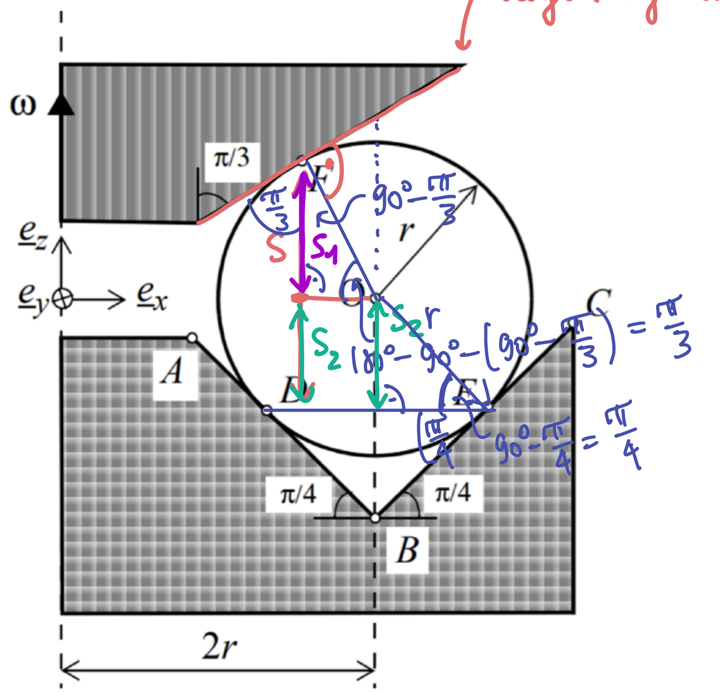
Kinemate im Punkt O $= \{\vec{v}_0, \vec{\omega}\}$?

Schritt 1: Distanzen bestimmen:



S:

liegt tangential auf der Kugel

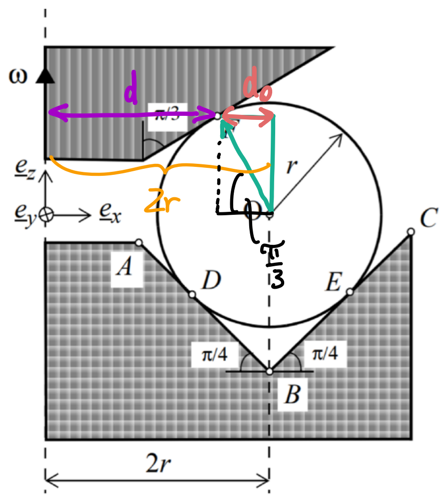


$$S_1 = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + S_2$$

$$S_2 = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = r \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + r \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = r \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

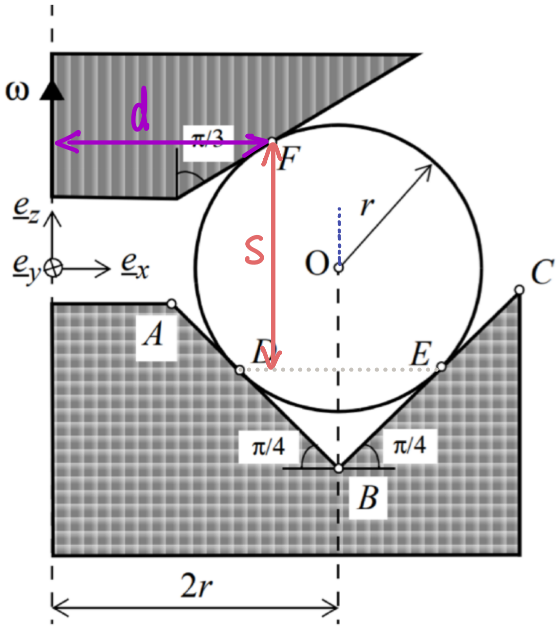
d:



$$d = 2r - d_0$$

$$d_0 = r \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow d = 2r - r\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = r \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} r$$

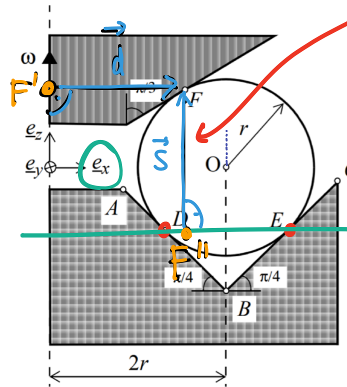


$$S = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \cdot r$$

$$d = \frac{3}{2} \cdot r$$

Schritt 2: MZ bestimmen

→ Kugel rollt auf der kegelförmigen Schiene

⇒ 

Distanzen ⊥ zu $\vec{\omega}$ nehmen!

↪ vieeel einfacher als wenn nicht ⊥

Rotationsachse der Kugel ($\vec{\omega}_k$)

D und E sind MZ

→ d.h. $\vec{\omega}_k$ geht durch D und E

↑ für Kugel

$$\Rightarrow \vec{\omega}_k = \begin{pmatrix} \omega_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

← nur 1 Komponente (Unbekannt) in x-Richtung

Schritt 3: Komponenten berechnen

$\vec{\omega}$ von Welle ist bekannt! & F ist ein Pkt auf Welle & Kugel

$$\Rightarrow \vec{v}_F = \vec{\omega} \times \vec{r}_{F'F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \overset{d}{\frac{3}{2} r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} r\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{!}{=} \vec{\omega}_k \times \vec{r}_{F''F} = \begin{pmatrix} \omega_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underbrace{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \cdot r}_{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} r\omega_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} r\omega = -\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} r\omega_k \quad / \div r \; / \cdot 2$$

$$3\omega = -(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\omega_k$$

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

$$\Rightarrow \omega_k = -3\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}_{\cdot 1} = -3\omega \cdot \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\underbrace{3-2}_{1}} =$$

$$= -3\omega \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_k = \begin{pmatrix} \omega_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{-3\omega(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,\vec{e}_x}}$$

(a) $\mathbf{v}_O = \frac{2\sqrt{2}}{3}(2-\sqrt{3})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = -2\omega(\sqrt{3}-2)\,\mathbf{e}_x.$

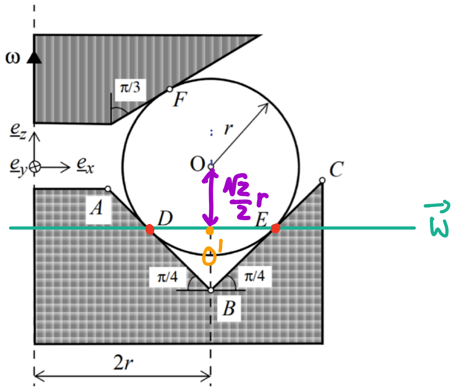
(b) $\mathbf{v}_O = \sqrt{\frac{3}{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = 2\omega(3+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(c) $\mathbf{v}_O = \sqrt{2}(3-\sqrt{2})\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = r\omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(d) $\mathbf{v}_O = \frac{3}{\sqrt{2}}(3-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = \omega(\sqrt{3}+\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$

(e) $\mathbf{v}_O = \frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})r\omega\,\mathbf{e}_y; \quad \boldsymbol{\omega}_k = -3\omega(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,\mathbf{e}_x.$:)

$\vec{v}_0$ auch noch berechnen:



$$\vec{v}_0 = \vec{\omega}_k \times \vec{r}_{O'O} = \begin{pmatrix} \omega_k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} r \omega_k \\ 0 \end{pmatrix}$$

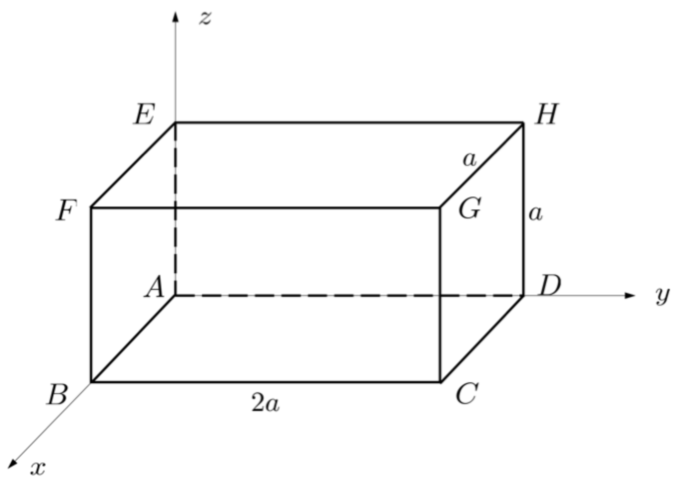
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_y} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r\right) \underbrace{\left(-3\omega \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})\right)}_{\omega_k}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} r \cdot \omega (\sqrt{3} - \sqrt{2})\, \vec{e}_y$$

7. *(Optional)* Der Bewegungszustand eines starren Quaders mit den Seitenlängen a, a und $2a$ ist zur Zeit t durch die Geschwindigkeiten in den Ecken E, D, F, die Rotationsgeschwindigekit $\boldsymbol{\omega}$ und die Schnelligkeit $v_Z = \sqrt{2}v$ auf der Zentralachse gegeben:

$$\mathbf{v}_E = \begin{pmatrix} 2v, \\ e_2, \\ e_3 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_D = \begin{pmatrix} d_1, \\ d_2, \\ 2v \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} f_1, \\ v, \\ f_3 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega \begin{pmatrix} 0, \\ 1, \\ 1 \end{pmatrix};$$

wobei $e_2,\ e_3,\ ,d_1,\ d_2,\ f_1,\ f_3,\ \omega$ unbekannt sind.



1. Stellen Sie den Bewegungszustand durch eine Kinemate in der Ecke D dar.
2. Bestimmen Sie die Zentralachse ζ.