Disclaimer: Diese Zusammenfassung wurde im Rahmen der D-ITET Komplexe Analysis Vorlesung von Prof. A. Iozzi im HS21 erstellt.

Ich kann weder für Vollständigkeit noch für Richtigkeit dieses Dokuments garantieren, bin jedoch froh über Fehler informiert zu werden oder bei Fragen zu helfen:

ldewindt@ethz.ch

Zürich, den 23.10.2021 Lina De Windt

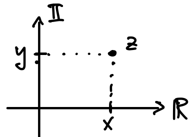
Komplexe Analysis Zusammenfassung

FS 21 Prof. A. Iozzi

Lina De Windt, ldewindt@ethz.ch

1. Grundlagen:

$\boxed{i^2 = -1}$



Sei $z = x + iy$ (kartesisch / Normalform):

$\bar{z} = x - iy$ (konjugierte)

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$|z|^2 = \bar{z}\cdot z$

$\bar{z} + z = 2\operatorname{Re}(z)$ $\qquad \operatorname{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

$z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$ $\qquad \operatorname{Im}(z) = y = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Δ-Ungleichung

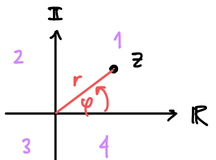
$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$

Polardarstellung:

$\boxed{z = re^{i\varphi} = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))} = r\operatorname{cis}(\varphi)$

wobei $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \operatorname{Arg}(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \Phi\cdot\pi$,



wobei $\Phi := \begin{cases} 1 & \text{im 2. Quadranten} \\ -1 & \text{im 3. Quadranten} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

kartesisch $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x = \operatorname{Re}(z) = r\cos\varphi \\ y = \operatorname{Im}(z) = r\sin\varphi \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\ \sin(\varphi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) \end{array}}$

Rechenregeln: Sei $z = x + iy$.

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$
- $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

$z\cdot z^{-1} = 1$

- $|z^2| = |z|^2 = z\bar{z}$
- $\bar{z} = \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$
- $e^{2\pi i} = 1 = e^{-2\pi i}$; $e^{\pi i} = -1$
- $\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$
- $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}} \Leftrightarrow \overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

Die offene Kreisscheibe: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die offene Kreisscheibe mit Zentrum z_0 und Radius r ist die Teilmenge

$\boxed{B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}}$ von $\mathbb{C}$.

Def. offen: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heisst offen, wenn zu jedem $z \in U$, $\exists$ ein Radius $\varepsilon > 0$ s.d. $B(z, \varepsilon) \subseteq U$ gilt.

Der Fundamentalsatz der Algebra:

↳ besagt, dass ein Polynom n-ten Grades genau n NST $\in \mathbb{C}$ hat. (nicht unbedingt versch.)

Logarithmus: → auf der negativen reellen Achse nicht stetig bzw. undef.!

$\boxed{s = \log(z) = \log(|z|) + i\arg(z)}$ s.d. $e^s = z$

↳ ist nicht eindeutig.

$\boxed{\operatorname{Log}(z) := \log(|z|) + i\operatorname{Arg}(z)}$ wobei $\boxed{\operatorname{Arg}(z) \in [-\pi, \pi]}$

↳ Hauptwert des Logarithmus. dieser ist Eindeutig & holom. $\forall z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0$

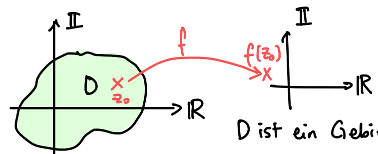
komplexe Wurzeln:

Sei $z = |z|e^{i\varphi}$. Dann: $\boxed{\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\varphi + 2\pi k)\frac{1}{n}}}$ $k \in \mathbb{N}_0$

→ genau n Lösungen.

2. Komplexwertige Funktionen:

$f : D \to \mathbb{C}$



D ist ein Gebiet in $\mathbb{C}$

komplexwertige Funktion: $\operatorname{Graph}(f) \in \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ → nicht darstellbar :(

$\boxed{f(z) = f(x + iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)}$

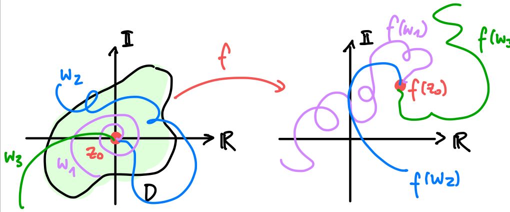
2.1 Stetigkeit & Grenzwerte:

Def 2.2: Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heisst stetig im Punkt $z_0 \in U$, falls $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.d. $\forall z \in U : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ gilt. f ist stetig auf U, falls f stetig in jedem Pkt $z \in U$ ist.

Def. 2.4: Sei U eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in U$ und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. $a \in \mathbb{C}$ ist der Grenzwert von f in z_0 (Not: $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$) falls $\forall \varepsilon > 0, \exists r = r(\varepsilon) > 0$ mit $B(z_0, r) \subseteq U$ und $|f(z) - a| < \varepsilon$ $\forall z \in B(z_0, r)$, $z \neq z_0$

Bem: $\lim_{z\to z_0} f(z) = a \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \operatorname{Re}(f(z)) = \operatorname{Re}(a)$ und $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Im}(f(z)) = \operatorname{Im}(a)$ $\forall z \in U$

Bem: f ist in z_0 stetig $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 1) & \exists \lim_{z\to z_0} f(z) \\ 2) & f(z) \text{ ist in } z_0 \text{ definiert} \\ 3) & \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \end{cases}$



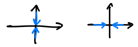
Generell: f in einem Pkt stetig (bzw. stetig ergänzbar) $\Rightarrow \exists$ Grenzwert an diesem Pkt.

damit Grenzwert existiert: jede erdenkliche Kurve muss gegen den Grenzwert konvergieren!

Insbesondere: Jede Gerade durch einen Pkt. muss gegen den Grenzwert konvergieren!

$\Rightarrow$ 2 Geraden haben untersch. Grenzwert $\Rightarrow \nexists$ Grenzwert!

Bsp:



Stetigkeit einer Funktion zeigen:

- allgemein: ε-δ-Kriterium:
- Komposition von stetigen Funktionen
  - ↳ $z, \sin(z), \exp(z), \ldots$
  - ↳ oft nicht stetig: Kompositionen von $\bar{z}$, $|z|^2$, $\operatorname{Arg}(z)$
- Grenzwert $\nexists$ (inkl. nicht eindeutig) $\Rightarrow$ nicht stetig

z.B. $\lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 \nexists$ → versuche $y = 0$, $x = y$.

2.2 Ableitung komplexwertiger Funktionen

Def. 2.9: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig. f ist ableitbar / $\mathbb{C}$-differenzierbar in $z_0 \in U$, falls $\exists$ $\boxed{\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = f'(z_0) = \frac{df}{dz}(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$

= die Ableitung von f an der Stelle z_0.

Partielle Ableitungen:

Def: $\boxed{\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y) - f(x_0,y)}{x - x_0}}$

$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}}$

Satz: $f : U \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in U$ $\mathbb{C}$-diffbar $\Rightarrow f$ an der Stelle z_0 stetig

Holomorphe Funktionen:

1) $f : U \to \mathbb{C}$ heisst holomorph auf U falls sie auf ganz U diffbar ist.

2) $f : U \to \mathbb{C}$ heisst holomorph in $z_0 \in U$ falls sie in einer offenen Menge um z_0 holomorph ist.

- $f : U \to \mathbb{C}$ ist ganz falls in 2) $U = \mathbb{C}$ ist

Bem: f ist diffbar in $z_0 \Rightarrow f$ ist stetig in z_0

Bem: Def von f enthält $\bar{z}$: f ist nie holomorph

Rechenregeln: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und f, g $\mathbb{C}$-diffbar.

1) Linearität: $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$

2) Produktregel: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

3) Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $\forall z$ mit $g(z) \neq 0$

4) Kettenregel: $(f(g(z)))' = f'(g(z))\cdot g'(z)$

5) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$ $\forall z \in$ Konvergenzradius

2.3 Die Cauchy-Riemann Gleichungen

Sei $f: U \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + i\vartheta(x,y)$. Falls es gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} u_x(z_0) &= \frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \vartheta(x_0, y_0) = \vartheta_y(z_0) \\ u_y(z_0) &= \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0) = - \frac{\partial}{\partial x} \vartheta(x_0, y_0) = -\vartheta_x(z_0) \end{aligned}}$$

dann ist f $\mathbb{C}$-diffbar.

Zudem gilt: $f'(z_0) = u_x(z_0) + i\vartheta_x(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$

$= \vartheta_y(z_0) - iu_y(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$

$\Rightarrow f: U \to \mathbb{C}$, $z_0 \in U$. wenn:

1) $\exists\, u_x, u_y, \vartheta_x, \vartheta_y$ in einer offenen Menge um z_0 &

2) sind stetig in z_0 & erfüllen die CRG

$\Rightarrow \exists f'(z_0)$

Falls f an der Stelle $(x_0, y_0) \in U$ diffbar: $f'(x_0, y_0)$ ist eine lineare Abb.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ \vartheta_x(x_0,y_0) & \vartheta_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Def: konforme Abb.

↳ eine lin. Abb. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$) mit $\det(M) > 0$ heisst konform, falls sie Winkeltreu ist.

↳ eine diffbare Abb. $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ heisst konform, falls die Ableitung in jedem Punkt Winkeltreu ist.

$\Rightarrow$ d.h. eine konforme Abb. erhält den Winkel zw. der Tangenten zu 2 Kurven in der Ebene

Bem: $\mathbb{R}$-diffbare Fkt. ist auch $\mathbb{C}$-diffbar $\Leftrightarrow$ ihre Abl. ist ein konforme Abb.

Kor. 2.27 Sei $f: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holom. für $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$.

1) Falls $\mathrm{Re}(f) = u$ konstant $\Rightarrow$ f konstant

2) Sei $g: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ auch holom. und sei $\mathrm{Re}(f) = \mathrm{Re}(g)$. Dann:

$f = g + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

3) Falls $\overline{f}: B(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holom. $\Rightarrow$ f konstant

4) Falls $|f(z)|$ konstant $\Rightarrow$ f konstant

Kor. 2.29: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holom. Dann gilt: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}$

Def: harmonische Funktion:

Eine Funktion $g: U \to \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ und $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ heisst harmonisch auf U.

↳ sind Lö der Laplace-Gleichung $\Delta g = 0$, wobei $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

3. Kurvenintegrale (= komplexe Wegintegrale)

↳ Integral komplexwertiger Fkt. über Kurven in $\mathbb{C}$ berechnen

Def. 2.31: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$. Dann ist

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt + \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt}$$

Bem: die Integrale sind reell.

Def. Pfad:

1) stetige Abb. $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$

2) Pfad ist einfach, falls $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$ oder $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$

3) Pfad ist geschlossen, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$

4) Pfad ist diffbar auf (a,b) falls $\exists \gamma'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$ $\forall t \in (a,b)$

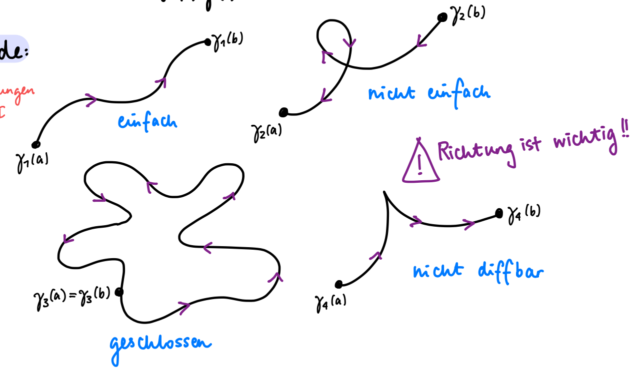
Dann ist $\gamma'(t_0)$ der Tangentialvektor zum Pfad γ an der Stelle $\gamma(t_0) \in U$

⚠ Pfad = Kurve (= Bild von γ) + Parametrisierung

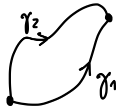
Parametrisierung = $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \gamma(t)$

Bsp. Pfade:

sind Abbildungen $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$



achtung:



das ist nicht geschlossen.

Kurvenintegrale: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f: U \to \mathbb{C}$ stetig &
Sei $\gamma: [0,1] \to U \subseteq \mathbb{C}$ diffbar. Dann ist das

Kurvenintegral von f entlang γ:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\dot{\gamma}(t)\,dt}$$

$$\boxed{= \int_0^1 \mathrm{Re}(f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\,dt + i \int_0^1 \mathrm{Im}(f(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t))\,dt}$$

muss komplett unabhängig von der Parametrisierung sein! $\to \dot{\gamma}(t)$:)

Bsp: $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ wobei $\gamma_1 = e^{2\pi i t}$, $\gamma_2 = e^{2\pi i t^2}$, $t \in [0,1]$

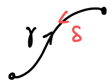
Eigenschaften: Sei $\gamma: [0,1] \to U \subseteq \mathbb{C}$ ein Pfad und $f: U \to \mathbb{C}$ stetig.

1) linearität: Sei $g \in U \to \mathbb{C}$ stetig und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$\int_\gamma [\alpha f(z) + \beta g(z)]\,dz = \alpha \int_\gamma f(z)\,dz + \beta \int_\gamma f(z)\,dz$$

2) Sei $\delta: [0,1] \to U \subseteq \mathbb{C}$ durch $\delta(t) := \gamma(1-t)$ definiert. Dann

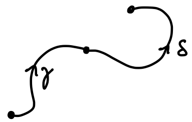
$$\int_\delta f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$



Bem (Not): $\delta = \gamma^{-1}$
$\delta = -\gamma$

3) Sei $\delta: [0,1]$ ein Pfad mit $\gamma(1) = \delta(0)$ und setze

$$(\gamma * \delta)(t) := \begin{cases} \gamma(2t) & \text{falls } 0 \le t \le 1/2 \\ \delta(2t-1) & \text{falls } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$



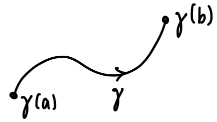
So gilt: $\int_{\gamma * \delta} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\delta f(z)\,dz$

4) unabhängigkeit der Parametrisierung. $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$, $\delta: [0,1] \to U$

falls δ eine andere Parametrisierung des Bildes von γ ist (d.h. $\delta = \gamma(\sigma(t))$ mit $\sigma: [0,1] \to [0,1]$ diffbar mit $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$

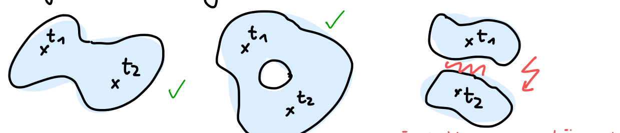
Hauptsatz der komplexen Integralrechnung:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}$$ mit $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ Pfad
$t \mapsto \gamma(t)$



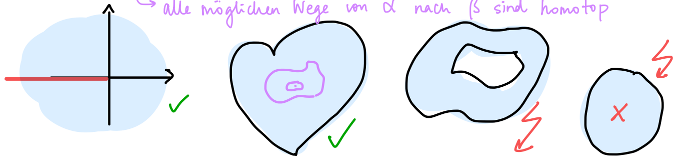
4. ein bisschen Topologie

wegzusammenhängend: (WZH)



nicht wegzusammenhängend

einfach wegzusammenhängend ("keine Löcher")
↳ alle möglichen Wege von α nach β sind homotop



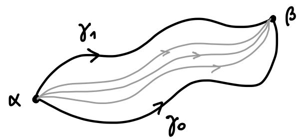
↳ jede geschlossene Kurve kann stetig zu einem Pkt. zusammengestaucht werden

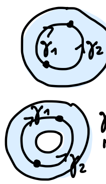
Homotopie:

Def: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to U$ Pfade mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a) = \alpha$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b) = \beta$. γ_0 ist homotop zu γ_1, falls $\exists$ stückweise stetige Fkt. $H: [0,1] \times [a,b] \to U$ mit:

$$\begin{cases} H(0,t) = \gamma_0(t) \\ H(1,t) = \gamma_1(t) \end{cases} \forall t \in [0,1] \quad \text{und} \quad \begin{cases} H(s,0) = \alpha \\ H(s,1) = \beta \end{cases} \forall s \in [a,b]$$

Die Funktion H ist die Homotopie von γ_0 und γ_1





γ_1 & γ_2 sind homotop

γ_1 & γ_2 sind nicht homotop

2.4.1 Vektorfelder & Divergenz:

Sei $\mathcal{F}: U \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge.
Man schreibt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und ↳ jedem Punkt des D wird ein Vektor zugeteilt

$$\mathcal{F}(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Divergenz eines Vektorfelds, Def: $\operatorname{div} \mathcal{F}(x,y) := \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$
↳ wenn Vektorfeld als Wasserfluss interpretiert wird:

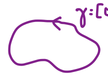
- $\operatorname{div} \mathcal{F}(x,y) > 0$: Punkt (x,y) ist eine Quelle
- $\operatorname{div} \mathcal{F}(x,y) = 0$: im Punkt (x,y) ist gleichmässige Strömung
- $\operatorname{div} \mathcal{F}(x,y) < 0$: Punkt (x,y) ist eine Senke

Der Satz von Green-Gauss: Seien $\mathcal{F}: U \to \mathbb{R}^2$ ein VF auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und sei $V \subset U$ eine kompakte Menge mit stückweise glattem Rand $\partial V = S$. Dann gilt:

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \mathcal{F}(x,y)\, dx\, dy = \int_{S=\partial V} \mathcal{F}(s) \cdot n_s(s)\, ds}$$

wobei n_s der Einheitsnormalvektor an der Stelle $s \in S = \partial V$ ist.

Bsp:



$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ Tangente: $N_s(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$,

$ds = d\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|\, dt$ und $\|N_s(s)\| = \|\gamma'(t)\|$

$\Rightarrow n_s(s)\, ds = \frac{N_s(s)}{\|N_s(s)\|} ds = \frac{N_s(s)}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\|\, dt = N_s(s)\, dt$

$\Rightarrow \int_S \mathcal{F}(s) n_s(s)\, ds = \int_0^1 \mathcal{F}(x(t), y(t)) \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} dt$

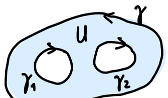
Eigenschaften komplexe Wegintegrale: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ WZH, $\gamma: [a,b] \to U$ ein Pfad und $f: U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt:

① $\boxed{\left| \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \right| \le \int_a^b \left| f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \right| dt}$ in $\mathbb{R}$: $\left|\int f(t)\,dt\right| \le \int |f(t)|\,dt$

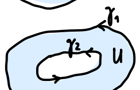
achtung i.A. gilt nicht $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \not\le \int_\gamma |f(z)|\,dz$ ← links $\in \mathbb{R}$, rechts $\in \mathbb{C}$ ($\gamma'(t)$)

② Sei L die Länge von γ, d.h. $L = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$. Wenn $|f(z)| \le M \quad \forall z \in U$, dann folgt: $\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \le M \cdot L$

③



Falls $f: U \to \mathbb{C}$ holom.: $\int_\gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = 0$



Falls $f: U \to \mathbb{C}$ holom.: $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

⊛

Stammfunktionen Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene, WZH Menge & $f: U \to \mathbb{C}$ stetig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) Für jede geschlossene Kurve $\gamma: [0,1] \to U$ gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
2) Das Kurvenintegral $\int_\delta f(z)\,dz$ ist unabhängig vom Pfad $\delta: [0,1] \to U$
3) $\exists$ eine $\mathbb{C}$-diffbare Funktion $F: U \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$

↳ falls diese gelten: F heisst die Stammfunktion von f und

$$\int_\delta f(z)\,dz = F(\delta(1)) - F(\delta(0))$$

↳ Achtung: $\exists$ auch Stammfunktionen, die nicht wie im Satz definiert werden.

Korollar: Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ eine einfache WZH, offene Teilmenge und $f: U \to \mathbb{C}$ holom.
Dann: 1) Sei γ ein geschlossener Pfad. Dann gilt: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
2) Das Kurvenintegral von f ist unabhängig vom Pfad.

5. Der Satz von Cauchy

2 Bedingungen: 1) $U \subseteq \mathbb{C}$ offen & einfach WZH.
2) $f: U \to \mathbb{C}$ ist holomorph auf ganz U. Dann:

$\Rightarrow$ f besitzt eine Stammfunktion $F(z)$ mit $F'(z) = f(z)\ \forall z \in U$

wichtig! kein $\Leftrightarrow$ d.h. $\neg A \not\Rightarrow \neg B$ aber $\neg B \Rightarrow \neg A$

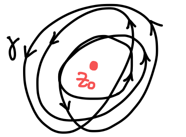
$\Leftrightarrow$ alle Aussagen von ⊛ gelten.

$A \Rightarrow B \iff \neg B \Rightarrow \neg A$ aber $\neg A \not\Rightarrow \neg B$

Falls $\exists$ Stammfunktion: Bestimmung gleich wie in Ana 1

⚠ Stammfunktionen müssen immer diffbar, insbesondere auch stetig sein damit es eine Stammfunktion sein kann!

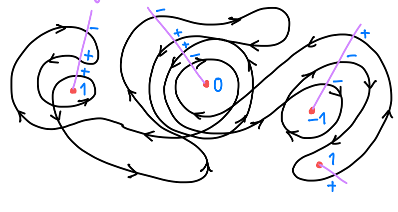
Umlaufzahl: zählt, wie viel Mal wir eine Singularität z_0 umkreisen



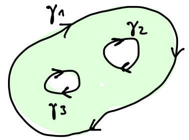
Gegenuhrzeigersinn: positiv
Uhrzeigersinn: negativ
zählen.

$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = W_\gamma(z_0) = 4$

Bsp:



Invarianz:



$f: U \to \mathbb{C}$ ist holom. auf ⓞⓞ. Dann

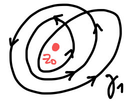
$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz}$$

falls

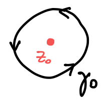
$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = -\left(\int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right)}$$

↳ γ_2, γ_3 zeigen in die andere Richtung wie γ_1

ausserdem gilt:



$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = 3$



$\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(z_0) = 1$

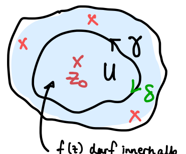
$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z_0) \int_{\gamma_0} f(z)\,dz}$$

5.1 Integralformel von Cauchy

Bedingungen:
1) $f: U \to \mathbb{C}$ holomorph auf U einfach WZH
2) $z_0 \in U$ (einzige Singularität innerhalb U)
3) $\gamma: [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ist eine Kurve, die z_0 einmal im Gegenuhrzeigersinn (math. pos.) umläuft

Dann gilt: $\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$

und $\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz}$



$f(z)$ darf innerhalb von γ ($\hat{=} U$) keine weitere Sing. haben nach z_0

Sei nun $\delta = -\gamma$. Dann gilt:

$\boxed{f(z_0) = \ominus \frac{1}{2\pi i} \int_\delta \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$

Korollar: Sei f holom. Dann sind alle Ableitungen $f^{(n)}$ auch holom.
Falls $u := \mathrm{Re}(f)$ und $v := \mathrm{Im}(f)$, besitzen u und v ∞ viele part. Ableitungen.

Mittelwertsatz: Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f: U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Seien $z_0 \in U$ und $r > 0$ s.d. $B(z_0, r) \subseteq U$.
Dann gilt: $\boxed{f(z_0) = \frac{1}{1}\int_0^1 f(z_0 + r \cdot \exp(2\pi i t))\, dt}$ → wir bilden das arithmetische Mittel über den Kreis mit Radius r.

d.h.: $f(z_0)$ ist der Mittelwert von f auf dem Kreis mit Zentrum z_0 und Radius r.

Maximumsprinzip: Sei f holomorph und nicht konstant auf U WZH.
Dann besitzt $|f(z)|$ kein Maximum auf U.
d.h. $\nexists\, z_0 \in U$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ & falls $\exists$ so ein z_0, dann ist $f(z)$ konst.
⇒ D.h. das Maximum wird auf dem Rand ∂U angenommen.
⇒ dieselbe Aussage gilt auch für Maxima / Minima von u, v wobei $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$.
↳ d.h. $\mathrm{Re}\{f(z)\}$ & $\mathrm{Im}\{f(z)\}$ nehmen keine lokalen Extrema innerhalb eines Bereichs an.

↳ **Korollar:** Sei f eine nicht konstante & stetige Funktion auf einer kompakten Menge K, die holom. auf dem Inneren von K ist.
Dann wird $\max_{z \in K} |f(z)|$ auf dem Rand von K erreicht.

Bem: $\max(f(z)) = \max(f(z))^2$ ← manchmal sehr nützlich.

Satz von Liouville: Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. (d.h. auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph)
Falls $|f(z)|$ beschränkt ist, ist f konstant.
↳ d.h. $|f(z)| < M$ für ein $M \in \mathbb{R}$

6. Taylor- & Laurentreihen:

6.1 Taylorreihenentwicklung:

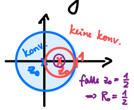
Taylorreihe: Sei $f: B(z_0, R_0) \to \mathbb{C}$ hol. Fkt. & $R_0 > 0$. Dann besitzt $f(z)$ für jedes $z \in B(z_0, R_0)$ eine Reihenentwicklung

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}$$

d.h. die Reihe konv. absolut $\forall z \in B(z_0, R_0)$

⇒ holom. Fkt. besitzen immer eine TR, die auf $B(z_0, R_0)$ (Kreisscheibe) um z_0 konvergiert. ($f(z)$ muss nicht hol auf z_0 sein)
⇒ R_0 ist der Konvergenzradius.

Bsp: ⚠ geom. Reihe: $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, R_0: $|z| < 1$



Def. Taylor-Reihen- und Maclaurin-Reihen-Entwicklung:

$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n}$ TR von f an der Stelle z_0

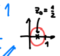
$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, z^n}$ MC von f an der Stelle $z_0 = 0$

Kochrezept für Entwicklungspunkt $z_0 \neq 0$: (Variation der geom. Reihe)

Bsp: $f(z) = \frac{1}{1-z}$ um $z_0 = \frac{1}{2}$ entwickeln:
→ $f(z)$ auf Form $f(z - z_0)$ bringen → erneut geom. Reihe anwenden

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - (z - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2} - (z - \frac{1}{2})} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{1 - \underbrace{2(z - \frac{1}{2})}_{z'}}$$
$$= 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^n$$

R_0: $|z'| < 1$
$\Leftrightarrow |2(z - \frac{1}{2})| < 1$
$\Leftrightarrow |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$
$(\Leftrightarrow 0 < z < 1)$



Konvergenzradius (Potenzreihen):

$\boxed{R_0 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{Q}}$ $\boxed{R_0 = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)} = \frac{1}{L}}$

↳ gilt für alternierende Potenzreihen genauso.
d.h. z.B. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n z^n \Rightarrow R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

Konvergenzradius heisst: $|z|$ muss $< R$ sein damit die Reihe konvergiert.

Bem: Sei $R > 0$ Konv.radius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Dann ist Konv. radius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ $\sqrt{R}$, da 1. Reihe $|z| < R$
⇒ 2. Reihe: $|z^2| < R \Rightarrow |z| < \sqrt{R}$

Nullstellen: Sei $f: U \to \mathbb{C}$ holom. an der Stelle $z_0 \in U$. Die Fkt. f hat an der Stelle z_0 eine NST der Ordnung m $\Leftrightarrow$ $\exists\, g: U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ und $g(z_0) \neq 0$

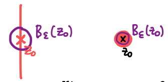
Korollar: Sei p, q holom. an der Stelle z_0 mit $p(z_0) \neq 0$ und sei z_0 eine NST der Ordnung m für q. Dann ist z_0 ein Pol der Ordnung m für $\frac{p(z)}{q(z)}$.

Lemma: Sei $f: B(z_0, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ holom. und sei $f(z_0) = 0$. Entweder ist $f(z) \equiv 0$ auf $B(z_0, \varepsilon)$ oder z_0 ist eine isolierte NST von f.

Singularitäten:

Def. Singularität: Pkt. z_0 an der eine Fkt. nicht holomorph ist &
Zusätzlich: jeder offene Ball um z_0 $B_\varepsilon(z_0)$ muss mind. 1 Pkt. enthalten an dem $f(z)$ holomorph ist.

Bsp:

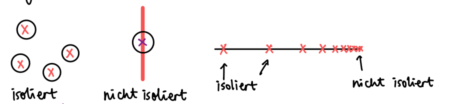


z_0 ist Singularität z_0 ist keine Singularität

Sing. von $f(z) = |z|^2$? ⇒ keine ($|z|^2$ ist nirgends hol.)

Isolierte Singularitäten

Def: eine Singularität ist isoliert, falls die Fkt. auf dem Ball $B_\varepsilon(z_0)$ holomorph ist für $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$



Bsp: $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ $f(z) = \log(z)$ $f(z) = \frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ mit $z_0 = 0$

wir finden innerhalb jedes noch so kleinen Kreises um z_0 weitere Singularitäten

Bsp: Sei $\varepsilon \leq \frac{1}{2\pi}$: $\sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2\pi}}\right) = \sin(2\pi) = 0$ → $\frac{\varepsilon}{4}$: $\sin\left(\frac{4}{\frac{1}{2\pi}}\right) = \sin(8\pi) = 0$

d.h. irgendwo zw. $\frac{\varepsilon}{4}$ und ε ist wieder eine NST. Das wird auch nur schlimmer mit kleineren ε

hol. ⇒ besitzt LR auf $B(z_0, R_0)$ ⊗ $f(z_0) =$

⚠ Wir können eine Funktion um eine isolierte Singularität als Laurentreihe entwickeln :) ↳ weil dort ist Fkt. holomorph (d.h. keine weitere Singularität auf Kreisscheibe)

$$\Rightarrow f(z) = \ldots c_{-2}(z - z_0)^{-2} + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$
$z_0 =$ Sing.

Klassifikation von Singularitäten:

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und sei f holom. auf $U \setminus \{z_0\}$. Sei $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ (=LR) $\forall z \in B(z_0 \setminus R) \setminus \{z_0\}$ für gewisses $R > 0$. So definiert man:

wesentliche Singularität: $c_n \neq 0$ für ∞ viele $n < 0$ $\left(\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n\right)$
↳ Bsp: $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, $z_0 = 0$

hebbare Singularität: $c_n = 0$ $\forall n < 0$ $\left(\sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \to \text{Taylorreihe!}\right)$
↳ Bsp: $\frac{\sin(z)}{z}$, $z_0 = 0$

Pol m-ter Ordnung: $c_{-m} \neq 0$ und $c_n = 0$ $\forall n < -m$ $\left(\sim \sum_{n=-m}^{\infty} c_n z^n\right)$
↳ Bsp: $\frac{1}{z^2}$, $z_0 = 0$ (Pol 2. Ordnung) ↳ bei NST im Nenner: $m =$ Ordnung der NST
↳ $\exists \lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0 = \varphi(z_0)$ → falls $\nexists\, m$ mit $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$
↳ $m = 0$ ⇒ Sing. ist hebbar ⇒ Sing. ist wesentlich

The big picture Singularitäten:

Bem: endlich viele Sing. ⇔ isoliert

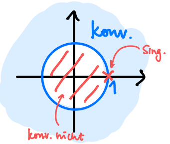
- Singularität
  - nicht isoliert
  - isoliert
    - wesentlich
    - hebbar
    - Pol m-ter Ordnung

↳ falls NST bei $z_0 = 0$ im Nenner & im Zähler wo Ordnung der NST im Zähler ≥ Ordnung der NST im Nenner ⇒ z_0 = keine Singularität !

6.1 Laurentreihenentwicklung

↳ haben auch negative Potenzen
damit die Reihe nun auch ausserhalb von R_0 konvergiert :)

Bsp: $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{z}-1)} = \dots = -\sum_{n=-1}^{-\infty} z^n$ → konv. für $|z|>1$

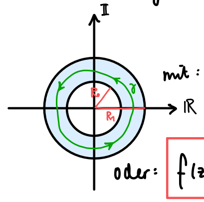


d.h. also $f(z) = \frac{1}{1-z} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} z^n & \text{für } |z|<1 \\ \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n & \text{für } |z|>1 \end{cases}$

↳ haben nun auf ganz $\mathbb{C}$ (ausser Einheitskreis) eine Reihendarstellung von $f(z)$:)

⚠ auf $|z|=1$: Verhalten der Reihe unbestimmbar.

Funktionen, die holomorph auf Kreisringen /-scheiben sind, können wir in Laurentreihen entwickeln. Innerhalb eines Kreisrings $R_0 < |z-z_0| < R_1$ gilt dann: $\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-z_0)^n}}$



mit: $\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$ $\boxed{b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,dz}$ → nicht so wichtig

oder: $\boxed{f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n}$ $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$ für $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Falls f an der Stelle z_0 holom. ⇒ $f(z)(z-z_0)^{n-1}$ auch holom. ⇒ $b_n = 0$ für $n = 1, 2, \dots$

↳ dann ist LR = TR und $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

Kochrezept Laurentreihen auf Kreisscheiben:

① PZB

② bestimmen auf welcher Menge / Kreisring- / scheibe ich die Reihe entwickeln will

③ In Form $\frac{1}{1-g\left(\frac{1}{z-z_0}\right)}$ bzw. $\frac{1}{1-n(z-z_0)}$ bringen

④ in geom. Reihe einsetzen

⑤ überprüfen, dass die Reihe wirklich konvergiert

Bsp: $f(z) = \frac{1}{z^2+z-2}$ auf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ Laurentreihe um $z_0 = 0$?

① $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right)$

② Wir sind auf der Kreisscheibe mit $R_0 = 1$ & $R_1 = 2$

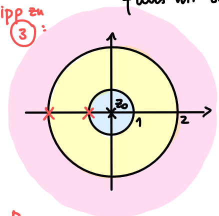
③ $f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})}\right)$

$f(z) = \frac{1}{1-z}$ $f\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$ $g(z-z_0)$

④ $f(z) = \frac{1}{3}\cdot\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n\right)$

⑤ Reihe 1: konv. für $|z|>1$
Reihe 2: konv. für $|z|<2$ } Reihe konv. für $1 < |z| < 2$ ✓ :)

Tipp zu ③: falls wir solche Kreisscheiben hätten...



$f(z) = \frac{1}{1-n(z-z_0)} + \frac{1}{1-g(z-z_0)}$

$f(z) = \frac{1}{1-\tilde{n}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)} + \frac{1}{1-g(z-z_0)}$

$f(z) = \frac{1}{1-\tilde{n}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)} + \frac{1}{1+\tilde{g}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)}$

↳ in diese Form bringen.

Bem: die Singularität, die weiter entfernt ist von z_0 hat den grösseren Konvergenzradius

einige nützliche Tricks ...

① um $z_0 \neq 0$ entwickeln: z_0 addieren & substrahieren

Bsp: e^z um $z_0 = 1$: $e^z = e^{z-1+1} = e\cdot e^{z-1} \overset{2.\text{Trick}}{=} e\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!}$

② Substituieren:

Bsp: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ ⇒ $e^{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f(z))^n}{n!}$

③ Indizes verschieben:

$(z-z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_{n-k}(z-z_0)^n$

Bsp: $\frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$

don't forget: $\frac{z}{1-z} = z\cdot\frac{1}{1-z}$

④ Produkt entwickeln:

→ Cauchy Produkt Formel: $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ wobei $c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{k-l}$

$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ wobei $c_n = \sum_{l=0}^{n} a_l b_{k-l}$

Doch: wenn nur die ersten Paar Koeffizienten gefragt: einfach gleiche Potenzen einsammeln

$\frac{\exp(z)}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \left(1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\dots\right)\cdot\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right) =$

$= 1 + (z+z) + \left(z^2+\frac{z^2}{2}+\frac{z^2}{2}\right) + \left(z^3+z^3+\frac{z^3}{2}+\frac{z^3}{6}\right) + \dots$ einfach einsammeln :)

kleiner Trick:

Laurentreihe im Punkt $z_0 \neq 0$ von $f(z)$ mittels Substitution bestimmen:

① Substitution $u = z - z_0$ $(z = u + z_0)$

② $f(u)$ im Punkt $u = 0$ entwickeln

③ am Schluss Rücksubstituieren

7. Der Residuensatz

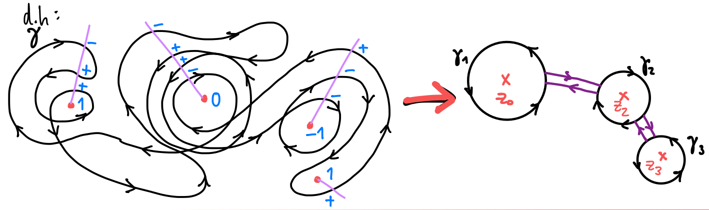
Sei $f: U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$, offen, WZH & f holom. auf $U \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ und $z_1, \dots, z_n$ im Innere von $\gamma: [0,1] \to U$ enthalten. Dann:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} W(\gamma, z_k)\,\mathrm{Res}(f, z_k)}$$

Achtung!: nur Sing., welche in γ enthalten sind, interessieren uns

↳ γ = Pfad, welcher z_k mind. einmal umkreist
↳ $\mathrm{Res}(f, z_k) = c_{-1}$ der Laurentreihe von f um z_k

d.h.:



$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(W(\gamma_1, z_0)\cdot\mathrm{Res}(f, z_0) + W(\gamma_2, z_1)\mathrm{Res}(f, z_1) + W(\gamma_3, z_2)\cdot\mathrm{Res}(f, z_2)\right)}$$

7.1 Residuenberechnung:

① allgemein über die Laurentreihe:

$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1}}$ von $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ = LR von $f(z)$ um z_0

② bei Pole m-ter Ordnung:

Sei z_0 eine Polstelle der Ordnung m von $f(z)$

⟺

$\exists\, \varphi(z)$ holomorph mit $\varphi(z_0) \neq 0$ s.d. $\boxed{f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}}$

(m-1)-te Ableitung

Dann: $\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \lim_{z\to z_k}\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-z_k)^m f(z)\right)}$

falls $m=1$: $\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \varphi(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)}$

↳ sehr hilfreich: Regel von Bernoulli / L'Hôpital: $\boxed{\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}}$

③ hebbare Singularität: $\mathrm{Res}(f, z_0) = 0$

④ gerade Funktionen: Sei $z_0 = 0$ eine Singularität. Falls f eine gerade Fkt. ist (d.h. $f(-z) = f(z)\ \forall z$) dann enthält ihre LR nur gerade Exponenten (d.h. $\sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$). d.h. die Koeff. aller ungeraden Exponenten sind 0, insbesondere $c_{-1} = 0$

⇒ $\mathrm{Res}(f, 0) = 0$ → Achtung gilt nur für $z_0 = 0$

⑤ Einfache NST im Nenner: falls $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, $q(z)$ hat in z_0 eine einfache Nullstelle. Dann:

$\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ ← untere Funktion 1x ableiten.

Bem: $p(z)$ und $q(z)$ sind analytisch, aber nicht unbedingt Polynome!

⑥ Funktion der Form $\frac{f'(z)}{f(z)}$:

$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = n$, wenn z_0 eine Nullstelle n-ter Ordnung oder ein Pol $(-n)$-ter Ordnung von $\frac{f'}{f}$ ist.

Identitätsprinzip: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f, g: U \to \mathbb{C}$ holom. & $f(z) = g(z)$ $\forall z$ auf einer offenen Menge oder einer Teilstrecke.
Dann gilt: $\boxed{f(z) \equiv g(z)}$ $\forall z \in U$ — gilt nicht auf $\mathbb{R}$!

Insbesondere: $f(z)=0$ auf einer offener Menge oder Teilstrecke $\Rightarrow$ $f \equiv 0$ auf U

Achtung: Beim Residuensatz (& auch allg. Wegintegrale) dürfen keine Singularitäten auf dem Pfad, über welche man integriert, liegen!

Eigentliche Integrale:

Kochrezept eigentliche Integrale von Fkt. mit isolierten Singularitäten

① Polynome in Zähler & im Nenner faktorisieren

② Fkt. in einfachere Form zerlegen — Bsp. $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ — Bsp. $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$ bei $z=0$

③ Kandidaten für NST finden: NST im Nenner, Undefinierte Stellen

④ NST im Zähler?
- → Ja: separat betrachten in ⑤
- → Nein: Ordnung der NST im Nenner = Ordnung des Pols

⑤ separate Betrachtung:
- → Zerlegung in hol. & nicht hol. Teil
- → evtl. Reihen entwickeln von ganz $f(z)$

⑥ Residuen berechnen über Formel

⑦ Integral lösen mit Residuensatz (Achtung γ = geschlossen!)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_n \in U} W(\gamma, z_n)\,\mathrm{Res}(f, z_n)$$

8. Uneigentliche Integrale

Der Cauchy-Hauptwert des uneigentlichen Integrals:

$$\boxed{\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz := \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_j)}$$

$$\underset{\text{i.A.}}{\neq} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dz = \lim_{R\to\infty}\int_0^R f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_R^0 f(z)\,dz$$

nur für f gerade gilt: $\mathrm{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = 2\cdot\int_0^{\infty} f(z)\,dz$

Anwendungen des Residuensatzes (⇒ 4 Typen von Integralen)

Ⅰ Typ $\boxed{\int_0^{2\pi} F(\cos(t), \sin(t))\,dt}$ oder $\boxed{\int_0^{1} F(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))\,dt}$

→ Hauptidee: schlaue Subst. einführen ⇒ Residuensatz

Bsp: $\boxed{I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta + a^2}\,d\theta}$ für $|a|<1$

① cos, sin → exp Form: $I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-a(e^{i\theta}+e^{-i\theta})+a^2}\,d\theta$

② $e^{i\theta} = z$ substituieren, $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz \Leftrightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$, $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ $\theta \in (0, 2\pi]$

$$I = \int_{\gamma(\theta)} \frac{1}{1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2}\cdot\frac{1}{zi}\,dz$$

③ umformen & Residuensatz → Achtung nur Sing, die in γ enthalten sind beachten

Ⅱ Typ $\boxed{I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx}$ $x \in \mathbb{R}$, wobei p, q Polynome in x und:

⚠ • $\mathrm{Grad}(q) \geq \mathrm{Grad}(p) + 2$

• $q(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ← d.h. keine Sing. auf der $\mathbb{R}$-Achse

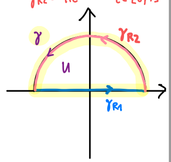
falls $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$: Bed. $|h(z)| < C$ auf $\{z \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ noch dazu

Hauptidee:
I in $\mathbb{C}$-Ebene bringen ⇒ über γ geschl. integrieren ⇒ Residuensatz :)

Bsp: $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx$

$\gamma_{R1} = t$ $t \in [-R, R]$

$\gamma_{R2} = Re^{i\pi t}$ $t \in [0,1]$



U.. innerhalb γ (d.h. $\mathrm{Im}(z_i) > 0$)

① Bedingungen erfüllt? → Ja

② $I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{R1}} \frac{1}{x^4+1}\,dx$

③ Definiere $\gamma = \gamma_{R1} + \gamma_{R2}$ → geschlossenes Integral! :)

d.h. $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_{R1}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{R2}} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i\in U} \mathrm{Res}(f, z_i)$

aus VL wissen wir: $\int_{\gamma_{R2}} f(z)\,dz = 0$ falls $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $\mathrm{Grad}(q(x)) \geq \mathrm{Grad}(p(x)) + 2$ & $q(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

↳ lemma next row

$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_{R1}} f(z)\,dz}_{=I} = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i) = I$:) ⇒ Residuen berechnen

Achtung welche interessieren uns? → $\mathrm{Im}(z_i) > 0 \vee \mathrm{Im}(z_i) < 0$

Bem:
- wenn $I = \int_0^\infty f(z)\,dz$ & $f(z)$ gerade: $I = \int_0^\infty f(z)\,dz = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$
- γ kann auch anders aussehen. Dann achten: $W(\gamma, z_i)$ und Verhalten der $\int$ für $R \to \infty$

Ⅲ Typ Fourierreihe: $\boxed{A = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\alpha t)\,dt}$ & $\boxed{B = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\alpha t)\,dt}$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{q(t)}{p(t)}$ wie in Ⅱ

Hauptidee: betrachte stattdessen $E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\alpha t}\,dt$ $\left(= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(\cos(\alpha t) + i\sin(\alpha t))\,dt = A + iB\right)$

komplexifizieren :) ⇒ $A = \mathrm{Re}(E)$, $B = \mathrm{Im}(B)$

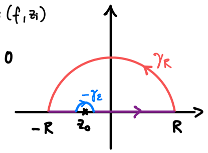
⇒ lösen wie Typ Ⅱ, aber betrachte noch $e^{i\alpha t}$ → Pfad so bestimmen, dass $e^{-\alpha y} < 1$

⇒ am Schluss Re bzw. Im herausfiltern

Bem: Wann muss man obendurch, wann untendurch?
→ $y>0$, $y<0$ (von $z = x+iy$) so wählen, dass Integral konvergiert.
z.B. $e^{-\alpha y}$: $\alpha < 0$ →, $\alpha > 0$ →

Ⅳ Typ $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx}$ wobei $f(x)$ nur 1 Pol auf der $\mathbb{R}$-Achse hat

Hauptidee: wie Ⅱ, aber anderer Weg wählen:
- ↳ Weg in 4 Stücke zerteilen
- ↳ $\int_{-R}^{z_0-\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{z_0+\varepsilon}^{R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \mathrm{Res}(f, z_i)$
- ↳ keine Singularität in γ ⇒ rechte Seite = 0
- ↳ wie Ⅱ: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$
- ↳ $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = -\pi i\,\mathrm{Res}(f, z_0)$ (aus VL)



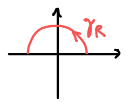
somit: $I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz = \pi i\,\mathrm{Res}(f, z_0)$ //

Bem: mit dieser Methode berechnen wir wirklich das I. $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$ und nicht nur P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz$ auch wenn die Fkt. nicht gerade ist.

Lemma: Sei $\gamma_R(t) := Re^{it}$ für $t \in [0, \pi]$. Seien p und q Polynome mit folgenden Eigenschaften:

1) $\deg(p) \leq \deg(q) - 2$

2) $q(x)$ besitzt keine NST auf der x-Achse.



Sei $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}h(z)$, wobei $|h(z)|$ beschr. auf $\{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

Dann gilt: $\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0}$

Bem: geht auch für $\gamma_R(t) := Re^{-it}$, $t \in [0,\pi]$ und $|h(z)|$ beschr. auf $\{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$

Beweis: Sei $\deg(p) = n$, $\deg(q) = m$, und sei $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$, $|h(z)| \leq M$, $M \in \mathbb{R}_{>0}$

Dann gilt für z auf γ_R, $|z| = R$ und $|f(z)| = \left|\frac{p(z)}{q(z)}h(z)\right| =$

$$\left|\frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}h(z)\right| = \left|\frac{z}{z^m}\right|\cdot\left|\frac{a_n + \dots + a_0 z^{-n}}{b_m + \dots + b_0 z^{-m}}\right|\cdot|h(z)| \leq R^{n-m}\cdot C\cdot M \leq \frac{C\cdot M}{R^2}$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{it})\,Rie^{it}|\,dt \leq \int_0^\pi \frac{C}{R^2}R\,dt = \pi\frac{CM}{R}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = 0 \quad (\text{da } |z| \geq 0\ \forall z \in \mathbb{C})\ \blacksquare$$

9. Fourier-Analysis

periodische Funktionen:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\exists\, p \in \mathbb{R}$ s.d. $f(t+p) = f(t)$

$\Rightarrow$ p ist Periode von f, $f = \frac{1}{p}$ ist die Frequenz von f.

kleinstmögliche Periode = Fundamentalperiode

Bsp: $f := \sin(6\pi t) \to p = \frac{1}{3}$ $\qquad g := \cos(4\pi t) \to p = \frac{1}{2}$

$f + g \to p = \text{kgV}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = 1$

gerade & ungerade Funktionen:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heisst …

gerade: $f(-t) = f(t)$

ungerade: $f(-t) = -f(t)$, $f(t) = -f(-t)$

Eigenschaften:
- ungerade Funktionen: $\int_{-L}^{L} u(t)\, dt = 0$
- gerade Funktionen: $\int_{-L}^{L} g(t)\, dt = 2\int_0^L g(t)\, dt$
- gerade · gerade = gerade
  ungerade · ungerade = gerade
  ungerade · gerade = ungerade

Bem: Σ per. Fkt ist per. $\Leftrightarrow$ Perioden aller Summanden haben ein gemeinsames Vielfaches.

Trick: falls f weder gerade noch ungerade:

gerader & ungerader Teil von f extrahieren:

$$\boxed{\begin{aligned} g(t) &= \tfrac{1}{2}\left(f(t) + f(-t)\right) \\ u(t) &= \tfrac{1}{2}\left(f(t) - f(-t)\right) \end{aligned}}$$

$\to$ z.B. für $f(t) = \cos(t) + \sin(t)$:
$g(t) = \cos(t)$
$u(t) = \sin(t)$

9.1 Fourierreihen

$\to$ hier immer $p = 2L$ falls nichts anderes steht.

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $2L$-periodisch, stückweise stetig $t \in [-L, L]$,

$\exists$ linke & rechte Ableitung (d.h. $\to \leftarrow$) in jedem Pkt. $t \in [-L, L]$.

Dann: $\exists$ Fourierreihe von f:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\boxed{f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)}$$

reelle

$$= \boxed{f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}t}}$$

$\leftarrow$ komplexe Schreibweise

Fourierkoeffizienten:

f $2L$-periodisch.

$$\boxed{a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right) dt} \quad n \geq 0$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right) dt} \quad n \geq 1$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\, e^{-in\frac{\pi}{L}t}\, dt} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Herleitung Fourierkoeffizienten:

Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt$

$\Rightarrow$ $\sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$, $\cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)$ bilden normiert vollständiges Orthonormalsystem auf Raum von $2L$-periodischen Funktionen bez. $\langle f, g\rangle$!

$\Rightarrow$ d.h. wir können jede Funktion in unserem Raum als linear-kombination von diesen Basisvektoren schreiben :)

$\Rightarrow$ a_m finden: SP zw. Reihe & 1 Basisvektor e_m dessen a_m wir suchen bilden:

$\Rightarrow$ $\boxed{a_m = \frac{1}{L}\langle e_m, f(t)\rangle}$ $\qquad \|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

Relationen:

$$\boxed{\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} = 2\,\mathrm{Re}\{c_n\} \\ b_n &= i\,(c_n - c_{-n}) = -2\,\mathrm{Im}\{c_n\} \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} c_n &= \tfrac{1}{2}(a - ib) \\ c_{-n} &= \tfrac{1}{2}(a + ib) \end{aligned}}$$

Orthonormalitätsrelationen: Sei f eine $2L$-periodische Fkt.

$$\boxed{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i\frac{n\pi}{L}t} e^{-i\frac{m\pi}{L}t}\, dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}} \quad \text{für } e^{i\frac{n\pi}{L}t}\,;\ n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_{-L}^{L} \cos\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right) dt = \begin{cases} 2L & \text{für } m = n = 0 \\ L & \text{für } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \\ &\int_{-L}^{L} \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\sin\left(m\frac{\pi}{L}t\right) dt = \begin{cases} L & \text{für } m = n \neq 0 \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \\ &\int_{-L}^{L} \sin\left(n\frac{\pi}{L}t\right)\cos\left(m\frac{\pi}{L}t\right) dt = 0 \quad \forall n, m \end{aligned}}$$

Symmetrien

$\forall$ gerade Fkt. gilt: $b_n = 0$ $\forall n$ und $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt$ $\forall n \geq 0$

$\forall$ ungerade Fkt. gilt: $a_n = 0$ $\forall n$ und $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt$ $\forall n \geq 1$

$\hookrightarrow$ mehr Symm. & Skizzen siehe Anhang (geholt aus NuS II Z.F.)

trigonometrisches Polynom N-ten Grades: (= trigonom. Reihe)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right), \text{ wobei } n \in \mathbb{N},\ a_N \neq 0 \text{ oder } b_N \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}t} \quad \text{wobei } n \in \mathbb{Z},\ c_N \neq 0$$

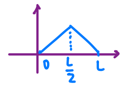
einige Definitionen:
- $\frac{a_0}{2}$: Mittelwert von f auf einer Periode
- $a_1\cos\left(\frac{\pi}{L}\right) + b_1\sin\left(\frac{\pi}{L}\right)$: 1. Harmonische / Grundschwingung
- $a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)$: n-te Harmonische / (n-1). Oberschwingung

Funktionen, die auf einem Intervall def. sind:

$\hookrightarrow$ auf der ganzen $\mathbb{R}$-Achse fortsetzen :)

$\hookrightarrow$ gerade oder ungerade, je nach Anfangsbed.

Bsp: $f(t) = \begin{cases} \frac{2k}{L}t & t \in [0, \frac{L}{2}] \\ \frac{2k}{L}(L - t) & t \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases}$



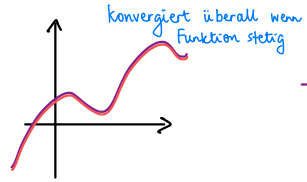
1) F.S. als gerade Fkt: setze $f(t) = f(-t)$ $\forall t \in [-L, 0]$ $\Rightarrow$ $f(t + 2L) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $b_n = 0$, $a_n =$ mit Formel bestimmen

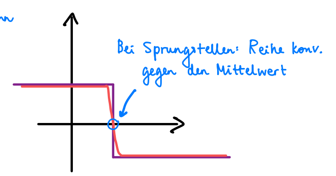
2) F.S. als ungerade Fkt: setze $f(t) = -f(-t)$ $\forall t \in [-L, 0]$ $\Rightarrow$ $f(t + 2L) = f(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $a_n = 0$, $b_n =$ mit Formel berechnen

9.2 Die Konvergenz der Fourierreihe

Sei f $2L$-per. auf $[-L, L]$, stückweise stetig.

- $\exists$ linke & rechte Ableitung $\forall t \in [-L, L]$ $\Rightarrow$ FR auf $[-L, L]$ ist konv.
- $\forall t \in [-L, L]$, $f(t)$ stetig: $f(t) = \text{FR} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)\right)$
- an einer Sprungstelle gilt: $\text{FR} = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to t_0^-} f(t) + \lim_{t \to t_0^+} f(t)\right) =$ Mittelwert





Das Gibbsche Phänomen: $\to$ Effekt, welches in der Nähe von Sprungstellen auftretet.

Sei $s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_k e^{i\frac{k\pi}{L}t}$ die N-te part. Summe der FR von f.

$\hookrightarrow$ in Sprungstelle treten Gibbs-tower auf $\to$ verschwindet nicht!

$\hookrightarrow$ Höhe immer ca. 18% der Sprunghälfte, egal wie viele Terme die FR hat.

$\Rightarrow$ $\sup_{t \in [-L, L]} |f(t) - s_N(t)| \sim 0.18 \cdot (\text{Mittelwert})$

Approximation durch ein trig. Polynom: (für Messung der Konv. von FR)

Sei $p_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{int}$ und $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$

$\uparrow$ trig. Polynom N-ten Grades

quadratischer Fehler: $E(f, p_N) := \|f - p_N\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p_N(t)|^2\, dt$

$\hookrightarrow$ wollen so klein wie möglich halten! $\to$ finde Koeff. p_N

$\Rightarrow$ E ist am kleinsten wenn $\gamma_n = c_n$ … Herleitung Skript S.125

Sei $E_N^*(f) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2$ $\Rightarrow$ $E(f, p_N) - E_N^*(f) \geq 0$

Satz: Das trig. Polynom des Grades N, das am besten eine 2π-per. Fkt f auf $[-\pi, \pi]$ approximiert (d.h. mit dem kleinsten quadr. Fehler) ist die part Summe S_N der FR von f. Der kleinste Wert vom quadr. Fehler ist:

$$E_N^*(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^{N}|c_n|^2$$

$\to$ monoton abnehmend für zunehmendem N

Die Bessel'sche Ungleichung: $\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt}$ $\forall f(t)$ mit FR, c_n = FR-Koeff.

auch in $\mathbb{R}$

Die Parseval'sche Identität:

Für eine 2π-periodische Fkt. $f(t)$ auf $[-\pi,\pi]$ gilt:

komplexe Reihen: $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2}$

für reelle Reihen: $\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+b_n^2\right)}$

=> hilfreich bei der Berechnung von Reihen

Amplituden- & Phasenspektrum

Sei f $2L$-periodisch, $w=\frac{\pi}{L}$ die Kreisfrequenz von f.

$$a_n\cos(nwt)+b_n\sin(nwt) = A_n\cos(nwt+\phi_n) \quad \forall n\geq 0$$

Amplitude: $A_n := \sqrt{a_n^2+b_n^2}$

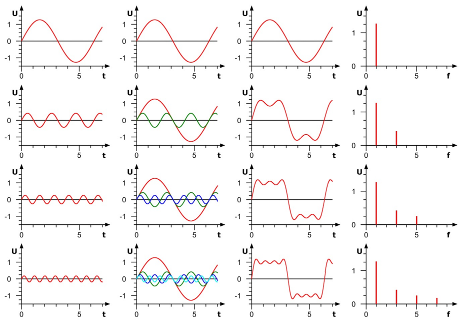
Phase: $\phi_n = -\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right) + \begin{cases}0 & a_n>0\\ \pi & a_n<0\end{cases}$

$\Rightarrow$ FR von $f(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nwt+\phi_n)$ $\quad w_n := nw$

Amplitudenspektrum: $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, Phasenspektrum: $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$

$\Rightarrow$ Graphen von diesen Werten: Darstellung von f im Spektralbereich

Bsp: Fourier-Synthese eines Rechtecksignals:



9.3 Fouriertransformation:

$\omega = 2\pi f$

Idee: Sei f $2L$-per. $\rightarrow \exists$ FR mit Koeff. c_n

↳ Koeff. können als Fkt. $\hat f: \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$, $n\mapsto \hat f(n) := \langle f, \vec e_{n,L}\rangle = c_n$ aufgefasst werden.

Fourier-Transform

Def: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ ist absolut integrierbar falls: $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$

Satz von Dirichlet für die FR: Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar, & besitzt eine linke & rechte Ableitung an jedem Punkt.

- An jedem Punkt wo f stetig ist, gilt:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-iwv}\,dv\right)e^{iwt}\,dw.}$$

- Falls f an der Stelle $t_0\in\mathbb{R}$ nicht stetig ist, gilt:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)e^{-iwv}\,dv\right)e^{iwt}\,dw = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^-}f(t)+\lim_{t\to t_0^+}f(t)\right)}$$

Fourier-Transformation (FRT): Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ abs. integrierbar. die FRT $\hat f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist:

aka Spektralfkt.

$$\boxed{\hat f(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}\,dt = \mathcal{F}(f)}$$

Inverse Fouriertransformation (IFRT): Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine absolut integrierbare Funktion, deren FRT $\hat f$ auch absolut integrierbar ist. Die IFRT von $\hat f$ ist:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\hat f)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(w)e^{iwt}\,dw} = f(t)$$

Satz von Dirichlet (falls Bedingungen erfüllt)

Bem: Schwartz-Raum ($S(\mathbb{R})$) := Raum von Fkt., deren Ableitungen "schnell genug im ∞ abnehmen". $\mathcal{F}^{-1}$ kann für jede Fkt. $f\in S(\mathbb{R})$ def. werden & $\mathcal{F}^{-1}(f)$ ist abs. integrierbar.

Eigenschaften FRT:

1) $\widehat{(\alpha f+\beta g)}(w) = \alpha\hat f(w)+\beta\hat g(w)$ $\quad\forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ (Linearität)
2) $\widehat{f(t-a)}(w) = e^{-iwa}\hat f(w)$ $\quad\forall a\in\mathbb{R}$
3) $\widehat{e^{iat}f(t)}(w) = \hat f(w-a)$ $\quad\forall a\in\mathbb{R}$
4) $\widehat{f(at)}(w) = \frac{1}{|a|}\hat f\left(\frac{w}{a}\right)$ $\quad\forall a\in\mathbb{R}$
5) $\hat{\hat f}(t) = f(-t)$
6) $\widehat{f^{(n)}}(w) = (iw)^n\hat f(w)$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$ FRT der Ableitung
7) $\widehat{t^n f(t)}(w) = i^n\frac{d^n}{dw^n}\hat f(w)$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}$ Ableitung der FRT

Bem: wegen 6) und 7) sind FRT und Diffgleichungen eng verwandt!

Integraltransformationen:

$\boxed{Tf(y) := \int_X K(x,y)f(x)\,dx}$, wobei f (bzw. K) eine Fkt. auf einer Menge X (bzw. $X\times Y$) def. ist, die gewissen Zusatzbedingungen erfüllt.

$\boxed{K(x,y)}$ = Kern der Integraltrafo.

Bspe: ① Sei $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}$, f abs. integrierbar & $K(x,y)=e^{-ixy}$. $\overset{T}{\Rightarrow}$ FRT

② Sei $X=\mathbb{R}$, $Y=\{y:=c+iw: c \text{ fest}, w\in\mathbb{R}\}$, f nimmt nicht langsamer als $Me^{\alpha x}$ ab ($M,\alpha\in\mathbb{R}$) und $K(x,y)=e^{xy}$. $\overset{T}{\Rightarrow}$ Laplace-Trafo

③ Sei $X=[-L,L]$, $Y=\mathbb{Z}$, $K(t,n)=\frac{1}{2L}e^{-i\frac{n\pi}{L}t}$ und f ist $2L$-per. $\overset{T}{\Rightarrow}$ komplexe FRT

Anwendung: 1) Problem auf X (eine Menge) lösen schwierig... :(

lösung: $X\xrightarrow{T}Y\xrightarrow{T^{-1}}X$ $\quad$ Bsp: Diffgleichungen

Problem hier lösen :)

2) Info über Fkt. übertragen: einfacher Info über ihre Trafo zu übertragen & dann Fkt. aus diesen Infos rekonstruieren.

9.4 Faltung: (= neue Art von Multiplikation :))

↳ Wozu? 1) Seien f, g und $f\cdot g$ abs. integrierbar. Ist die $\widehat{fg}(w) \overset{?}{=} \hat f(w)\cdot\hat g(w)$ → Nein!

↳ ist die Faltung von $\hat f(w)$ & $\hat g(w)$

2) Seien $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$ und $g(z)=\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^l$. $f(z)g(z)=\sum_{h=0}^{\infty}c_h z^h$, wobei für $h\geq 0$

$c_h=\sum_{l=0}^{h}a_{h-l}b_l$ (Koeffizienten) → folgen den Regeln der Faltung.

Seien $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ abs. integrierbare Fkt. Der Faltungsprodukt $f*g$ von f und g ist:

$$\boxed{(f*g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}f(t)g(x-t)\,dt}$$

Bem: $f*g$ ist mind. so glatt wie die glattere beider Fkt.

Bem: Seien $f,g\in\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ abs. integrierbare Fkt., die auf $(-\infty,0)/]$ verschwinden.

Dann gilt $\forall x<0$: $\boxed{f*g(x)=0}$

und $\forall x\geq 0$:

$$\boxed{f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-t)g(t)\,dt = \int_0^{\infty}f(x-t)g(t)\,dt = \int_0^{x}f(x-t)g(t)\,dt}$$

$g(t)=0\ \forall t\leq 0$, $\quad f(x-t)=0\ \forall x\leq t$

Eigenschaften Faltung:

1) $f*g = g*f$
2) $(f*g)*h = f*(g*h)$
3) $(\alpha f+\beta g)*h = \alpha f*h+\beta g*h$
4) $f(t-a)*g(t) = (f*g)(t-a)$

*5) $\widehat{f*g}(w) = \sqrt{2\pi}\,\hat f(w)\hat g(w)$ FRT der Faltung

5.1) $\mathcal{F}^{-1}(f*g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(f)\mathcal{F}^{-1}(g)$ IFRT der Faltung

*6) $\widehat{(f\cdot g)} = \sqrt{2\pi}\,\hat f*\hat g$ FRT des Produkts

6.1) $\mathcal{F}^{-1}(f\cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}(f)*\mathcal{F}^{-1}(g)$ IFRT des Produkts

*Bem: 5 & 6 gelten nur falls $\hat f,\hat g$ bzw. $f, g, f\cdot g$ absolut integrierbar sind.

Satz von Plancherel: f & $\hat f$ absolut integrierbar. Dann:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}|\hat f(\omega)|^2\,d\omega}$$

Bem: phys. Interpretation: Gesamtenergie eines Zeitsignals wird unter der FRT erhalten
⇒ d.h. E im Zeitbereich = E im Frequenzbereich

Der Satz von Dirichlet für die FRT: Sei $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ eine 2π-periodische, stückweise stetige Funktion derart, dass $\forall t\in\mathbb{R}$, $\exists$ die linke sowie die rechte Ableitung. Dann gilt:

i) c_n sowie $\hat f(\omega)$ sind wohldefiniert

ii) die FR $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ konvergiert $\forall t\in\mathbb{R}$

iii) $\hat{\hat f}(t) = f(t)$ überall wo f stetig ist

iv) wo $f(t)$ nicht stetig ist (hier: in t_0) konvergiert die Reihe gegen: $\hat{\hat f}(t_0) = \frac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^+} f(t) + \lim_{t\to t_0^-} f(t)\right)$ ← Durchschnitt von linke & rechte Seite :)

Bem: in der Nähe von Sprungstellen: Gibbs-Phänomen: over-/undershoot von ~9% der Sprunghöhe

Die χ-Funktion:

$$\chi_{[-a,a]}(x) = \begin{cases} 1 & x\in[-a,a] \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

FRT: $$\hat\chi_{[-a,a]}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a\cdot\sin(a\omega)}{a\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,a\cdot\operatorname{sinc}(a\omega)$$

$$\operatorname{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t\neq 0 \\ 1 & t=0\end{cases}$$

Faltung: $\forall$ abs. integrierbare Fkt. g mit $g(t)=0$ auf $t\in(-\infty,0)$ gilt:

$$\boxed{\chi_{[0,1]} * g(x) = \int_{x-1}^{x} g(t)\,dt}$$

10. Laplace-Transformation:

Def. Laplace-Transformation der Fkt. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$:

$$\boxed{\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt} \qquad s=\sigma+i\omega$$

↳ konvergiert wenn $|f(t)|\leq Me^{\sigma t}$ $\forall\sigma\in\mathbb{R}$

Satz: Sei $\mathcal{E}$ der Raum der Fkt. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

* 1) $f(t)=0$ $\forall t<0$

2) $\exists\sigma\in\mathbb{R}$, $\exists M>0$ mit $|f(t)|\leq Me^{\sigma t}$ $\forall t>0$

3) f ist stückweise stetig und $\exists$ die Grenzwerte $\lim_{t\to t_0^-} f(t)$ und $\lim_{t\to t_0^+} f(t)$ an jeder Sprungstelle $t_0\in\mathbb{R}_{>0}$ und insbesondere $\exists\lim_{t\to 0^+} f(t)$.

Dann: Die Laplace-Trafo $\mathcal{L}[f]$ ist $\forall f\in\mathcal{E}$ auf der Halbebene $\{s\in\mathbb{C}: \operatorname{Re}(s)>\sigma\}$ wohldefiniert und ist eine komplexe Analytische Fkt. der Variable s.

Ausserdem gilt: $\boxed{\lim_{\operatorname{Re}(s)\to\infty}\mathcal{L}[f](s)=0}$

* Bem zu Bed ①: $f(t)$ muss nicht zwingend $=0$ sein, da man durch multiplikation mit $H(t)$ $f(t)=0$ $\forall t<0$ zwingen kann. Doch!
Damit Laplace-Trafo existiert muss $f(t)$ in der Nähe von 0 (bzw. für $\lim_{t\to 0^+}$) mind. von oben beschränkt sein (mit Wachstum kleiner als $Me^{\sigma t}$ für irgend ein $\sigma\in\mathbb{R}$ und $M\in\mathbb{R}$.)

Def.
- $\mathcal{E}$ = Originalraum
- Fkt. $f\in\mathcal{E}$ = Originalfunktion
- $\mathcal{L}[f]$ = Bildfunktion & sie lebt im Bildbereich.

↳ Unterschied Laplace- & Fourier-Trafo:
↳ Laplace: auch für wachsende Funktionen :)
↳ Laplace: Werte von f $\forall t<0$ → keine Kontribution

Bemerkungen, nützliche Tricks:

1) Falls $f(t)\neq 0$ $\forall t<0$ → Fkt. zwingen die Bed. zu erfüllen* für Laplace: mittels **Heaviside Fkt**: $H(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}$ ← f mit H multiplizieren.
↪ im Ursprung nicht definiert

2) Falls $\sigma'>\sigma$ gilt: $e^{\sigma t}<e^{\sigma' t}$, s.d. aus $|f(t)|<Ce^{\sigma t}\Rightarrow |f(t)|<Ce^{\sigma' t}$
↳ Der kleinste σ_f, s.d. $|f(t)|<Ce^{\sigma t}$ $\forall\sigma_f<\sigma$ heisst Wachstumskoeffizient.
↳ Bem: von H: $\sigma_H=0$

Nützliche Eigenschaften:
- $\int_0^\infty \tau^n e^{-\tau}\,d\tau = n!$, $\quad\int_0^\infty \tau^n e^{-s\tau}\,d\tau = \frac{n!}{s^{n+1}}$
- i.A. gilt $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$: $\mathcal{L}[t^n\sqrt{t}\,H(t)](s) = \frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{(4s)^{n+1}(n+1)!\sqrt{s}}$

10.2 Eindeutigkeit der Laplace-Trafo & Inverse Laplace-Trafo:

Satz von Lerch: Seien $f_1,f_2\in\mathcal{E}$ mit Wachstumskoeffizienten σ_1,σ_2.
Annahme: $\mathcal{L}[f_1](s)=\mathcal{L}[f_2](s)$ $\forall s$ mit $\operatorname{Re}(s)>\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$.
Dann ist: $f_1(t)=f_2(t)$ $\forall t$ an denen f_1 & f_2 stetig sind.

Inverse Laplace-Transformation: Sei $f\in\mathcal{E}$ mit Wachstumskoeff. σ_f und Laplace-Trafomation $F(s)$. Sei $\beta_c(y):=c+iy$ für $y\in(-\infty,\infty)$ ein Pfad, wobei $c>\sigma_f$ beliebig ist. Dann gilt an allen stetigen Stellen $t\in(0,\infty)$ von f:

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_c} e^{st}F(s)\,ds}$$

An den unstetigen Stellen $t_0\in(0,\infty)$ gilt:

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to t_0^-}F(t)+\lim_{t\to t_0^+}F(t)\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_c} e^{st}F(s)\,ds}$$

Eigenschaften Laplace-Trafo: Seien $f,g\in\mathcal{E}$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Dann gilt:

1) Linearität: Seien $f,g\in\mathcal{E}$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$. Dann gilt:
$\mathcal{L}[\alpha f+\beta g](s)=\alpha\mathcal{L}[f](s)+\beta\mathcal{L}[g](s)$

2) Verschiebung in der t Variabel
$\mathcal{L}[f(t-a)](s)=e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$

3) Verschiebung in der s Variabel: Sei $\alpha\in\mathbb{C}$. Dann gilt:
$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=\mathcal{L}[f(t)](s-a)$

4) Ähnlichkeit: Sei $a\in\mathbb{R}^+$. Dann gilt:
$\mathcal{L}[f(at)](s)=\frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$ $\forall a\in\mathbb{R}^+$

5) Laplace-transformation der Ableitung: Sei $f\in\mathcal{E}$ mit $f'\in\mathcal{E}$ und sei $f(t)$ stetig für $t>0$. Dann gilt:
⚠ $\mathcal{L}(f'(s)) = s\mathcal{L}(f)(s)-\lim_{t\to 0^+}f(t)$

falls auch $f'',\dots,f^{(n)}\in\mathcal{E}$ und falls $f,f',\dots,f^{(n-1)}$ stetig für $t>0$:
$\mathcal{L}[f^{(n)}](s)=s^n\mathcal{L}[f](s)-s^{n-1}\lim_{t\to 0^+}f(t)-s^{n-2}\lim_{t\to 0^+}f'(t)-\dots-\lim_{t\to 0^+}f^{(n-1)}(t)$

↳ falls $f,f',\dots,f^{(n)}$ stetig im Ursprung: $\mathcal{L}[f^{(n)}](s)=s^n\mathcal{L}[f](s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$

6) Ableitungen der Laplace-Transformation: Es gilt $\forall n\in\mathbb{N}$:
⚠ $\frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}[f](s)\right)=(-1)^n\mathcal{L}[t^nf(t)](s)$

7) Integral:
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right](s)=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f](s)$

8) Sei σ_f der Wachstumskoeffizient von f. Für $x>\sigma_f$ gilt:
$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](x+iy)=\int_{x+iy}^{\infty+iy}\mathcal{L}[f](\tau)\,d\tau$

9) Sei $T>0$ und sei f eine T-periodische Fkt., d.h. $f(t+T)=f(t)$ $\forall t\geq 0$. Dann gilt $\forall s\in\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s)>0$:
$\mathcal{L}[f](s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$

10) Faltungssatz:
⚠ $\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\,\mathcal{L}[g]$

11) Sei δ die Dirac-Delta Funktion. Dann gilt $\forall a\in\mathbb{R}$:
$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s)=e^{-as}$

Dirac-Delta:

Eigenschaften:
1) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$
2) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)f(t)\,dt=f(a)$
3) $\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,dt$
4) $\mathcal{L}(\delta(t-a))(s)=e^{-as}$

Tabelle: (aus KomA Skript Iozzi): → mehr siehe Anhang

Laplace-Transformationen $s = \sigma + i\omega$	
$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
1	$\frac{1}{s},\ s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$
$\sin(at)$ $E(t)$	$\frac{a}{s^2+a^2},\ s>0$
$\cos(at)$ $E(t)$	$\frac{s}{s^2+a^2},\ s>0$
e^{at} $E(t)$	$\frac{1}{s-a},\ s>a$ $Re(s)>Re(a)$
$e^{at}\cdot\sin(bt)$ $E(t)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$e^{at}\cdot\cos(bt)$ $E(t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$
$t^n e^{at}$ $E(t)$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s>a$
$af(t)+bg(t)$ $E(t)$	$a\mathcal{L}[f](s)+b\mathcal{L}[g](s)$
$tf(t)$ $E(t)$	$-\frac{d}{ds}\Big(\mathcal{L}[f](s)\Big)$
$t^n f(t)$ $E(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\Big(\mathcal{L}[f](s)\Big)$
$f'(t)$ $E(t)$	$s\mathcal{L}[f](s)-f(0)$
$f''(t)$ $E(t)$	$s^2\mathcal{L}[f](s)-sf(0)-f'(0)$
$e^{at}\cdot f(t)$ $E(t)$	$\mathcal{L}[f](s-a)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$\mathcal{L}[f](s)\cdot\mathcal{L}[g](s)$

t $E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	
t^2 $E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{2!}{s^3}$	
t^a $E(t)$, $a>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	
$\cos(\omega t)$ $E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$ $E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$\cosh(at)$ $E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	
$\sinh(at)$ $E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	
$u(t-a)$ $E(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{e^{-as}}{s}$	u = Heaviside-Fkt.
$\delta(t-a)$ $E(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	e^{-as}	δ = delta-distributi

$$E(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

Laplacetrafo an f möglich $\Leftrightarrow$ f ist Originalfunktion

10.3 Anwendungen Laplace-Trafo:

Gewöhnliche Differenzialgleichungen:

Allgemeines Schema für das Lösen von Diffgleichungen:

1) Laplace-Trafo beider Seiten
   - ⇒ Eigenschaften anwenden
   - ⇒ Anfangsbedingungen einsetzen ($\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$)
2) Umformen (Ausklammern etc.) und nach $y(s)$ auflösen
3) Partialbruchzerlegung
4) Rücktrafo der einzelnen Terme mit Korrespondenztabellen
   ⇒ $y(t)$ gefunden :)

Beispiel: AWP
$$\begin{cases} f''+2f'+f = te^{-t}+e^{t}\\ f(0)=0\\ f'(0)=0\end{cases}$$

① Problem mittels Laplace transformieren:

$$s^2F(s)-sf'(0)-f(0)+2(sF(s)-f(0))+F(s)=\mathcal{L}[te^{-t}](s)+\mathcal{L}[e^{t}](s)$$
$$\Leftrightarrow\ s^2F(s)+2sF(s)+F(s)=\mathcal{L}[te^{-t}](s)+\mathcal{L}[e^{t}](s)$$
$$\Leftrightarrow\ F(s)+(s^2+2s+1)=\mathcal{L}[te^{-t}](s)+\mathcal{L}[e^{t}](s)$$
$$\mathcal{L}[te^{-t}]=-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{-t}](s)=\frac{1}{(s+1)^2}$$
$$\mathcal{L}[e^{t}](s)=\frac{1}{s-1}$$

$$\Leftrightarrow\ F(s)=\frac{\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s-1}}{s^2+2s+1}=\underbrace{\frac{1}{(s+1)^4}}_{=\frac{1}{6}\mathcal{L}[t^3e^{-t}](s)}+\underbrace{\frac{1}{(s-1)(s+1)^2}}_{PZB}$$

(3. Ableitung von $\frac{1}{s+1}$)

$$\Leftrightarrow\ F(s)=\frac{1}{6}\mathcal{L}[t^3e^{-t}](s)+\frac{1}{4}\mathcal{L}[e^{t}-e^{-t}](s)+\frac{1}{2}\mathcal{L}[te^{-t}](s)$$
$$\Rightarrow\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+t-\frac{1}{2}\right)e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}\ /\!/$$

Bem: mit Laplace kann man die part. Lö. zu einem AWP finden, ohne zuerst die allg. Lösung finden zu müssen! :)

Integralgleichungen:

= Gleichungen, die eine Funktion f und ihr Integral, sowie evtl. eine Konstante enthält.

Kochrezept:

① erkennen, dass das Integral eine Faltung ist
② Rechts & links Laplace-Trafomieren
③ nach $F(s)$ auflösen und umformen für Rücktrafo
④ inverse Laplace-trafo → $f(t)$ bestimmen :)

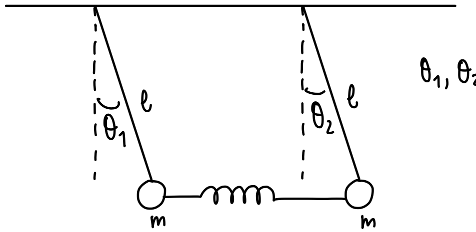
Bsp: $f(t)=t+\underbrace{\int_0^t f(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau}_{f*\sin(t)}$

$$\Leftrightarrow\ f(t)=t+f*\sin(t)$$
$$\Leftrightarrow\ F(s)=\mathcal{L}[t](s)+\mathcal{L}[f*\sin(t)] \qquad \text{wobei } F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)$$
$$\Leftrightarrow\ F(s)=\frac{1}{s^2}+\mathcal{L}[f](s)\,\mathcal{L}[\sin(t)](s)$$
$$\Leftrightarrow\ F(s)=\frac{1}{s^2}+F(s)\frac{1}{s^2+1}$$

nach $F(s)$ auflösen & umformen $\Rightarrow F(s)=\frac{s^2+1}{s^4}=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^4}=-\frac{d}{ds}\cdot\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{6}\frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s}\right)=$
$$=\frac{d}{ds}\big(\mathcal{L}[1](s)\big)-\frac{1}{6}\frac{d^3}{ds^3}\big(\mathcal{L}[1](s)\big)=\mathcal{L}[t](s)+\frac{1}{6}\mathcal{L}[t^3](s)=$$
$$=\mathcal{L}\left[t+\frac{1}{6}t^3\right](s)$$

Rücktrafo $\Rightarrow f(s)=t+\frac{1}{6}t^3\ /\!/$

Differenzialgleichungssysteme:



θ_1, θ_2 klein.

Bewegungsgleichungen:
$$\begin{cases} m(\ell\sin\theta_1)''=-mg\sin\theta_1+k\ell(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\\ m(\ell\sin\theta_2)''=-mg\sin\theta_2+k\ell(\sin\theta_1-\sin\theta_2)\end{cases}$$

für θ_j klein: $\sin\theta_j\cong\theta_j$

$$\begin{cases} m\ell\ddot\theta_1=-mg\theta_1+k\ell(\theta_2-\theta_1)\\ m\ell\ddot\theta_2=-mg\theta_2+k\ell(\theta_1-\theta_2)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \begin{cases} \ddot\theta_1=-\frac{g}{\ell}\theta_1+\frac{k}{m}(\theta_2-\theta_1)\\ \ddot\theta_2=-\frac{g}{\ell}\theta_2+\frac{k}{m}(\theta_1-\theta_2)\end{cases}$$

mit $\frac{g}{\ell}=:\omega^2$ und $\frac{k}{m}=:\alpha$ ⋮

$$\begin{cases} \ddot\theta_1=-\omega^2\theta_1+\alpha(\theta_2-\theta_1)\\ \ddot\theta_2=-\omega^2\theta_2+\alpha(\theta_1-\theta_2)\end{cases}$$

Dann: Laplace auf beiden Seiten, nach Θ_1, Θ_2 ($=\mathcal{L}[\theta_i](s)$) auflösen und am Schluss rücktransformieren → θ_1, θ_2 :)

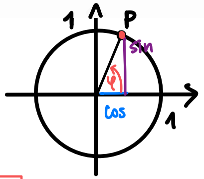
12. Anhang

Trigonometrie

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Euler'sche Formel:

$$\boxed{e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)} \qquad \boxed{e^{\pi i} = -1}$$



Cos, Sin:

$$\boxed{\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}$$

Cosh, Sinh:

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) \leftarrow \text{bijektiv auf } [0,\infty)$$

$$\sinh(z) = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) \leftarrow \text{bijektiv}$$

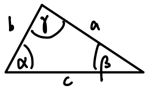
Beziehungen:

- $\cos(x) = \cosh(ix)$ — $\cosh(x) = \cos(ix)$
- $\cos(ix) = \cosh(x)$ — $\cosh(ix) = \cos(x)$
- $\sin(x) = -i\sinh(ix)$ — $\sinh(x) = -i\sin(ix)$
- $\sin(ix) = i\sinh(x)$ — $\sinh(ix) = \frac{\sin(z)}{-i} = i\sin(z)$
- $\tan(x) = -i\tanh(ix)$ — $\tanh(x) = -i\tan(ix)$
- $\tan(ix) = i\tanh(x)$ — $\tanh(ix) = i\tan(x)$
- $e^{x} = \cosh(x) + \sinh(x)$ — $e^{-x} = \cosh(x) - \sinh(x)$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Secant, Cosecant, Cotangens: $\sec = \frac{1}{\cos}$, $\csc = \frac{1}{\sin}$, $\cot = \frac{1}{\tan}$

Sinussatz: $\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$



Cosinussatz: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma}$

Beziehungen & Eigenschaften:

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ — $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ — $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
- $\sin(-x) = \sin(x)$ — $\cos(-x) = \cos(x)$ — $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos(x)$ — $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(x)$ — $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{\tan(x)}$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ — $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ — $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ — $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ — $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$ — $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$ — $\tan(2\pi - x) = -\tan(x)$
- $\sin(2x) = \begin{cases} 2\sin(x)\cos(x) \\ \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)} \end{cases}$ — $\cos(2x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) - 1 \\ \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ 1 - 2\sin^2(x) \\ \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} \end{cases}$ — $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$

- $\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$ — $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$
- $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ — $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ — $\tan(3x) = \frac{3\tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3\tan^2(x)}$
- $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{2}$ — $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2}$ — $\tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
- $\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$ — $\tan(x-y) = \frac{\tan(x) - \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}$
- $A\sin(\omega t + \alpha) + B\sin(\omega t + \beta) = \sqrt{[A\cos\alpha + B\cos\beta]^2 + [A\sin\alpha + B\sin\beta]^2}\cdot\sin\left(\omega t + \arctan\left[\frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}\right]\right)$

Additionstheoreme:

- $\sin(x) + \sin(y) = 2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ — $\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$
- $\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\cos(x) - \cos(y) = -2\cdot\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- $\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a)\cos(b)}$
- $\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$

Multiplikationen:

- $\sin(\alpha t)\cos(\beta t) = \frac{1}{2}\left(\sin((\alpha+\beta)t) + \sin((\alpha-\beta)t)\right)$
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$
- $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$
- $\sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{8}\left(1 - \cos(4x)\right)$

Cot:

- $1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$
- $\cot(a \pm b) = \frac{\cot(a)\cot(b) \mp 1}{\cot(a) \pm \cot(b)}$
- $\cot(2a) = \frac{\cot^2(a) - 1}{2\cot(a)}$

$\frac{a}{2}$:

- $\sin\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos(a))}$
- $\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(a))}$

Potenzen:

- $\sin^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(1 - \cos(2a))$ — $\sin^3(a) = \frac{1}{4}(3\sin(a) - \sin(3a))$
- $\sin^4(a) = \frac{1}{8}(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$
- $\cos^2(a) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2a))$ — $\cos^3(a) = \frac{1}{4}(3\cos(a) - \cos(3a))$
- $\cos^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3)$

Hyperbolische Funktionen:

Allgemeines: $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

$\tanh(a \pm b) = \frac{1}{\coth(a \pm b)} = \frac{\tanh(a) \pm \tanh(b)}{1 \pm \tanh(a)\tanh(b)}$

2a und 3a: alles gleich wie für sin und cos $\rightarrow$ sin ≙ sinh & cos ≙ cosh

$\frac{a}{2}$:

- $\sinh\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\cosh(a)-1}{2}}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{\cosh(a)-1}{2}}, & x < 0 \end{cases}$
- $\cosh\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(a)+1}{2}}$

Summen:

- $\sinh(a) + \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\sinh(a) - \sinh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$
- $\tanh(a) \pm \tanh(b) = \frac{\sinh(a \pm b)}{\cosh(a)\cosh(b)}$

Produkte:

- $\sinh(a)\sinh(b) = \frac{1}{2}\left[\cosh(a+b) - \cosh(a-b)\right]$
- $\cosh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}\left[\cosh(a+b) + \cosh(a-b)\right]$
- $\sinh(a)\cosh(b) = \frac{1}{2}\cdot\left[\sinh(a+b) + \sinh(a-b)\right]$
- $\tanh(a)\tanh(b) = \frac{\tanh(a) + \tanh(b)}{\coth(a) + \coth(b)}$

Potenzen:

- $\sinh^2(a) = \frac{1}{2}(\cosh(2a) - 1)$
- $\sinh^3(a) = \frac{1}{4}(\sinh(3a) - 3\sinh(a))$
- $\sinh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cosh(4a) - 4\cosh(2a) + 3)$
- $\cosh^2(a) = \frac{1}{2}\cdot(\cosh(2a) + 1)$
- $\cosh^3(a) = \frac{1}{4}\cdot(\cosh(3a) + 3\cosh(a))$
- $\cosh^4(a) = \frac{1}{8}\cdot(\cosh(4a) + 4\cosh(2a) + 3)$
- $1 - \tanh^2(a) = \frac{1}{\cosh^2(a)}$

Formel von Moivre: $(\cosh(a) \pm \sinh(a))^n = \cosh(na) \pm \sinh(na)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Inverse der Trigonometrischen Funktionen:

- $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2} = \sin(\arccos(x))$ — Herleiten via $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
- $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ — $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- $\tan(\arccos(x)) = x^{-1}\cdot(1-x)^{1/4}$ — $\tan(\arcsin(x)) = x\cdot(1-x)^{-1/4}$
- $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ — $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
- $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $|x| < 1$ — $\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$, $|x| > 1$
- $\sinh(2\operatorname{arcsinh}(x)) = 2x\sqrt{x^2-1}$ — $\sinh(\operatorname{arcosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$ $\forall x > 0$
- $\cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$

Wichtige Ableitungen & Integrale:

Allgemeine Ableitungen und Stammfunktionen:

Stammfunktion $F(x) \underset{\int}{\overset{d/dx}{\rightleftarrows}}$ Funktion $f(x) \underset{\int}{\overset{d/dx}{\rightleftarrows}}$ 1. Ableitung $f'(x)$

Stammfunktion $F(x)$	Funktion $f(x)$	1. Ableitung $f'(x)$
$\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} \cdot x^{3/2}$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$
e^x	e^x	e^x
$x \cdot (\ln(\lvert x\rvert) - 1)$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$\frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x$	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
$\frac{x}{\ln(a)} \cdot \ln(\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2+1)}{2}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{x^2+1}$

x in Bogenmaß!

Wichtige Ableitungen:

- $(a^x)' = \ln(a)\, a^x$
- $(\sqrt[x]{a})' = -\frac{\sqrt[x]{a}\, \ln(a)}{x^2}$
- $\csc'(x) = -\csc(x)\cot(x)$
- $\cot'(x) = -\csc^2(x)$
- $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\sinh'(x) = \cosh(x)$
- $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
- $\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\ln(\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$
- $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$
- $\sec'(x) = \sec(x)\tan(x)$
- $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $\cosh'(x) = \sinh(x)$
- $\operatorname{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\operatorname{arctanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- $(e^x)' = e^x$

Integrale:

Rechenregeln:

- $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$
- $\int_a^b \alpha f(x) \pm \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx \pm \beta \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$
- $\int_a^b f(x)\, g(x)\,dx = [F(x)\, G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\, G(x)\,dx$

  $\downarrow f'(x) \quad \uparrow G(x)$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}, \quad a \leq b \leq c$

Substitutionen:

$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$	$u(x) = g(x)$	$dx = \frac{du}{g'(x)}$
$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx$	$u(x) = g(x)$	$dx = \frac{du}{g'(x)}$
$\int f(e^x, \sinh(x), \cosh(x))\,dx$	$u(x) = e^x$	$dx = \frac{du}{e^x}$
$\int f(x, \sqrt{1-x^2})\,dx$	$x = \sin(u)$	$dx = \cos(u)\,du$
$\int f(x, \sqrt{1+x^2})\,dx$	$x = \sinh(u)$	$dx = \cosh(u)\,du$
$\int f(x, \sqrt{x^2-1})\,dx$	$x = \cosh(u)$	$dx = \sinh(u)\,du$
$\int f\left(\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$	$u(x) = \frac{x}{a}$	$dx = a\,du$
$\int f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)dx$	$u(x) = \sqrt{x^2-1}$	$dx = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,du$
$\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx$	$u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$

$\hookrightarrow \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \hookrightarrow \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Potenzen und Wurzeln:

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad n \neq -1$

$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + C$

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a-x^2}}\,dx = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\right) + C$

$\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a} \ln\lvert ax^2+b\rvert + C$

$\int \frac{x}{(x^2+a^2)^n}\,dx = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$

$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2 \log\left(\sqrt{a^2+x^2} + x\right)\right) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$

$\int -\frac{1}{1-x^2}\,dx = \arccos(x) + C$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + C$

Exponential- & Logarithmusfunktionen

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \ln(x)\,dx = x(\ln\lvert x\rvert - 1) + C \qquad x > 0$

$\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln\lvert x\rvert)^2 + C$

$\int x^s \ln(x)\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}\left(\ln\lvert x\rvert - \frac{1}{s+1}\right)$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$

$\int \frac{1}{x \pm a}\,dx = \ln\lvert x \pm a\rvert + C$

$\int \frac{1}{e^x+a}\,dx = \frac{x - \ln\lvert a+e^x\rvert}{a} + C$

$\int \frac{1}{e^x-a}\,dx = \frac{\ln\lvert e^x-a\rvert - x}{a} + C$

$\int \frac{1}{x^2+x}\,dx = \ln(x) - \ln(x+1) + C$

$\int a^{kx}\,dx = \frac{a^{kx}}{k\ln(a)} + C \qquad a > 1, \quad k \in \mathbb{R}$

$\int x^n e^{ax}\,dx = e^{ax} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{x^{n-k}}{a^{k+1}} + C$

$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\,dx = \ln(\ln\lvert x\rvert) + C$

$\int x^2 \ln(x)\,dx = \left(\frac{x^3 \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9}\right) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{\lvert y\rvert}}\,dy = 2\sqrt{y}$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$\int x e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha x - 1)}{\alpha^2} + C$

$\int x^2 e^{\alpha x}\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2)}{\alpha^3} + C$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$

$\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,dt = \ln(x+1)$

$\int \frac{(\ln\lvert x\rvert)^n}{x}\,dx = \frac{(\ln\lvert x\rvert)^{n+1}}{n+1} + C \qquad \forall n \neq -1$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

$\int f'(x) \cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2}(f^2(x)) + C$

$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C$

$\int x(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2} + C$

$\int x^2(ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3} + C$

$\int \frac{x}{(ax+b)^n}\,dx = -\frac{1}{(n-2)a^2(ax+b)^{n-2}} + \frac{b}{(n-1)a^2(ax+b)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{ax^2+b}\,dx = \frac{1}{2a} \ln\lvert ax^2+b\rvert + C$

$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + C$

$\int \frac{x}{x^4+3}\,dx = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sqrt{x^2-1} + C$

$\int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C \qquad \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$

$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,dx = \frac{y}{x^2+y^2} + C$

Expterme:

$\int x e^{ax}\,dx = \left(\frac{ax-1}{a^2}\right) e^{ax} + C$

$\int x^2 e^{ax}\,dx = \left(\frac{a^2x^2 - 2ax + 2}{a^3}\right) e^{ax} + C$

$\int \frac{1}{p+qe^{ax}}\,dx = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap} \ln\lvert p+qe^{ax}\rvert + C$

$\int \frac{e^{ax}}{p+qe^{ax}}\,dx = \frac{1}{ap} \cdot \ln\lvert p+qe^{ax}\rvert + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + C$

$\int e^{ax} \sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$

$\int e^{ax} \cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) - b\sin(bx)) + C$

$\int \frac{1}{(e^x-a)}\,dx = \frac{1}{a}(\ln\lvert e^x-a\rvert - x) + C$

$\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

$\int e^x + x e^x\,dx = x e^x + C$

$\int \frac{1}{(e^x+a)}\,dx = \frac{1}{a} \cdot (x - \ln\lvert a+e^x\rvert) + C$

Hyperbolische Funktionen:

$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C$

$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$

$\int \tanh(x)\,dx = \ln\lvert e^{2x}+1\rvert - x + C$

$\int \frac{1}{\sinh(x)}\,dx = \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1) + C$

$\int \sinh^{-1}(x)\,dx = x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{1+x^2} + C$

$\int \cosh^{-1}(x)\,dx = x\cosh^{-1}(x) - \sqrt{x^2-1} + C$

$\int \tanh^{-1}(x)\,dx = x\tanh^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$

$\int \tanh^2(x)\,dx = x - \tanh(x) + C$

$\int \sinh^2(x)\,dx = \frac{1}{4}(\sinh(2x) - 2x) + C$

$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh}(x) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosh}(x) + C \quad (x > 1)$

$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctanh}(x) + C$

$$\boxed{\int_0^\infty \tau^n e^{-\tau}\,d\tau = n! \quad \text{(part. Int.)}}$$

Trigonometrische Funktionen:

$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$

$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)+C$

$\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|+C$

$\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \ln\left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}\right|+C$

$\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \ln\left|\frac{-\cos(x)}{\sin(x)-1}\right|+C$

$\int \frac{1}{\tan(x)}\,dx = \ln|\sin(x)|+C$

$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \tan(x)+C$

$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\frac{1}{\tan(x)}+C$

$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\sin^3(x)+C$

$\int \sin(x)\cos^2(x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos^3(x)+C$

$\int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx = \frac{1}{32}(4x-\sin(4x))+C$

$\int \sin^n(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{\sin^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C$

$\int \sin(ax)\cos^n(ax)\,dx = -\frac{\cos^{n+1}(ax)}{(n+1)a}+C$

$\int \sin^2(x)\,dx = \frac{x}{2}-\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+C$

$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin(x)\cos(x)}{2}+C$

$\int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x)+C$

$\int \sin^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx - \frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n}$

$\int \cos^n(x)\,dx = \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)\,dx + \frac{\cos^{n-1}(x)\sin(x)}{n}$

$\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)|+C$

$\int \csc(x)\,dx = -\ln|\csc(x)+\cot(x)|+C$ $\qquad \csc = \frac{1}{\sin}$

$\int \sec(x)\,dx = \ln|\sec(x)+\tan(x)|+C$ $\qquad \sec = \frac{1}{\cos}$

$\int \arcsin(x)\,dx = x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$

$\int \arccos(x)\,dx = x\cdot\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$

$\int \arctan(x)\,dx = x\cdot\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+C$

$\int x\sin(x)\,dx = \sin(x)-x\cos(x)+C$

$\int x^2\sin(x)\,dx = 2x\sin(x)-(x^2-2)\cos(x)+C$

$\int x^3\sin(x)\,dx = 3(x^2-2)\sin(x)-x(x^2-6)\cos(x)+C$

$\int x\cos(x)\,dx = x\sin(x)+\cos(x)+C$

$\int x^2\cos(x)\,dx = (x^2-2)\sin(x)+2x\cos(x)+C$

$\int x^3\cos(x)\,dx = x(x^2-6)\sin(x)+3(x^2-2)\cos(x)+C$

$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)}-\frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)}+C$

$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)}-\frac{\cos((a+b)x)}{2(a-b)}+C$

$\int x\sin(\alpha x)\,dx = \frac{\sin(\alpha x)-\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^2}+C$

$\int x^2\sin(\alpha x)\,dx = \frac{(2-\alpha^2x^2)\cos(\alpha x)+2\alpha x\sin(\alpha x)}{\alpha^3}+C$

$\int x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{\alpha x\sin(\alpha x)+\cos(\alpha x)}{\alpha^2}+C$

$\int x^2\cos(\alpha x)\,dx = \frac{(\alpha^2x^2-2)\sin(\alpha x)+2\alpha x\cos(\alpha x)}{\alpha^3}+C$

$\int_0^{2\pi}\cos^4(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^4(t)\,dt = \frac{3\pi}{4}$

$\int_0^{2\pi}\cos^3(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^3(t)\,dt = 0$

$\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\sin^2(t)\,dt = \pi$

$\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos^2(t)\,dt = \int_0^{2\pi}\cos(t)\sin^2(t)\,dt = 0$

$\int_0^{2\pi}\sin(t)\cos(t)\,dt = 0$

Periodische Funktionen, Integraltabelle:

	$\int_0^{\pi/4}$	$\int_0^{\pi/2}$	$\int_0^{\pi}$	$\int_0^{2\pi}$	$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}$	$\int_{-\pi}^{\pi}$
sin	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$	1	2	0	0	0	0
$\sin^2$	$\frac{\pi-2}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin^3$	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\sin^4$	$\frac{3\pi-8}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi-8}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0	0	$\sqrt{2}$	2	0
$\cos^2$	$\frac{2+\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi-2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos^3$	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	0
$\cos^4$	$\frac{8+3\pi}{32}$	$\frac{3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8+3\pi}{16}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
sin·cos	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
$\sin^2\cdot\cos$	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3}$	0
$\sin\cdot\cos^2$	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0

Parameterintegrale mit variablen Grenzen:

$\boxed{F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t,x)\,dx}$ diffbar falls

$f(t,x)$ und $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ stetig in t und x und φ und ψ nach t stetig diffbar. Dann gilt:

$$\boxed{\frac{dF(t)}{dt} = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx + f(t,\psi(t))\,\psi'(t) - f(t,\varphi(t))\,\varphi'(t)}$$

falls f nur 1 Variable, d.h. $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt = f(\psi(x))\cdot\psi'(x) - f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).}$$

Integrale der Form $\int \alpha(x)e^{\beta(x)}dx$ → Substitution $u=\beta(x)$ probieren.

Für KomA wichtige Folgen & Reihen:

Potenzreihen: Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n\in\mathbb{C}$, $c=f(z)$

↳ Konvergenzverhalten:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n z^n|} = |z|\cdot\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|} = \begin{cases} <1 & \text{abs. Konvergenz} \\ 0 & \text{keine Aussage} \\ >1 & \text{Divergenz}\end{cases}$$

Def: **Konvergenzradius** einer Potenzreihe:

$\boxed{R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}}$, $R\geq 0$ falls limsup $=0$: $R=+\infty$

ODER: $\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$

⇒ Reihe konvergiert, falls $|z|<R$ & divergiert falls $|z|>R$ $\forall z\in\mathbb{C}$

die wichtigsten Potenzreihen & Grenzwerte:

$\boxed{\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}}$ $R_0=\infty$

$\boxed{\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \forall |z|<1}$ d.h. $R_0=1$

$\boxed{\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n!}}$ $R_0=\infty$

$\boxed{\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}}$

$\boxed{\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}$ $R_0=\infty$

Grenzwerte:

$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)}$

Konvergenzbereich der **geom. Reihe** bestimmen:

kleiner Trick: mittels Substitution:

$$\frac{1}{1-f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(f(z))^n$$

was auch immer da steht (darf natürlich auch eine Fkt. sein, z.B. exp(...z))

$|f(z)|<1$ → diesen Ausdruck dann so umformen, dass es in der Form $|z|\lessgtr \ldots$ vorliegt

das ist dann Konvergenzradius.

Spezielle Laurentreihen:

$\frac{1}{(1-z)^2}$ um $z=0$:

1) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

2) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n,m=0}^{\infty} z^{n+m} = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_n z^{\ell}$

mit c_n: Kombinationen n+m, die ℓ ergeben* $\ldots = \ell+1$

*weil die Koeffizienten bei $\frac{1}{1-z}$ alle 1 sind

Somit ist $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ //

Sammlung nützlicher Folgen & Reihen:

Grenzwerte von Folgen

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = 0 \quad \forall s \in \mathbb{Q}^+$
- $\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \forall q \in \mathbb{C} \quad |q|<1$
- $\lim \frac{1}{a^n} = 0$ für $|a|>1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}, |z|>1$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n)} = 0$ für $n>1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^k} = 0$ für $k>0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ für $k>0$ und $|a|>1$
- $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$ für $k>0$ und $|a|>1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^n n!} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Es gilt $(1+1/n)^n < e$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Funktionenfolgen, Grenzwerte:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(x)} = a$
- $\lim_{x\to \infty} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)}{x} = \frac{1}{a}$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{e^{ax}} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\pm\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x)}{x} = \mp\infty$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^x = e^{-1}$
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$
- $\lim_{x\to\infty} x^a\cdot \ln^b(x) = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty$
- $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e^2}$
- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))}{x} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(1+x)} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[n]{x}} = 0$
- $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} = 2$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln(a)$
- $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$, wenn $a<b$

Riemannsche Summen:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\,dx}$$

Reihen:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (Mengoli-Reihe)
- $a_n = 1;\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right) \longrightarrow a_n \approx \sqrt{x}$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$
- $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$
- harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ → divergent (Riemann'sche ζ-Fkt. mit $s=1$)
- geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$ ← KomA Laurent
- Potenzreihe: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$
- Riemann'sche ζ-Funktion: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} \text{konvergiert} & \text{für } s>1 \\ \text{divergiert} & \text{für } s\leq 1 \end{cases}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$ → alternierende harm. Reihe → konvergiert.
- Exponentialfunktion: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Potenzreihen (Alle Reihen um $|x|<1$ oder $|x|<a$)

Geometrische Reihe: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+x^3+ \dots$

- $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1-x+x^2-x^3+\dots$
- $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1+x^2+x^4+\dots$
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1-x^2+x^4-\dots$
- $\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n = \frac{1}{a}\cdot\left(1+\frac{x}{a}+\left(\frac{x}{a}\right)^2+\dots\right)$

Integrale / Ableitungen der geom. Reihe:

- $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots$
- $\frac{1}{(x-a)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{n+2} (n+1)x^n = \frac{1}{a^2}+\frac{2x}{a^3}+\frac{3x^2}{a^4}+\dots$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots\right)$
- $\ln(1+x) = \int_1^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$
- $\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^n((1+n)(2+n)) = 1+3x+6x^2+10x^3+\dots$
- $\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} x^n (-1)^n (1+n)(2+n) = 1-3x+6x^2-\dots$

Binomische Reihe: $(x+y)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^{\alpha-k} y^k \quad \alpha\in\mathbb{C},\ x,y\in\mathbb{R}$ ← Konv. falls $x>0$ & $\left|\frac{y}{x}\right|<1$

- $\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)x^2 = 1-2x+3x^2-4x^3+\dots$
- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\dots$
- $\sqrt{1-x} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\dots$

Teleskopsummen: $\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$

Arithmetische Summe: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Beweis: Induktion)

Fakultät: $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1\cdot 2\cdot \dots \cdot n$, $0! := 1$

Gammafunktion: $\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\,dt$

$\Gamma(n+1) = n! \quad n\in\mathbb{N}$

Weitere wichtige Potenzreihen: (≙ Taylorreihe, um den Nullpkt. entwickelt.)

- $e^{ax} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{n!} = 1+ax+\frac{(ax)^2}{2}+\frac{(ax)^3}{3!}+\dots$
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\mp\dots$
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\mp\dots$
- $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$
- $\sin^2(x) = \frac{2^1}{2!}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6\mp\dots$
- $\cos^2(x) = 1-\frac{2^1}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6\pm\dots$
- $\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\dots$
- $\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\dots$
- $\ln(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n = (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\pm\dots \quad \rightarrow 0<x<2$
- $\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$

→ diese Fkt. sind analytisch (dh. TR ≙ Fkt.)

Bem: ∞-liches Taylorpolynom = Taylorreihe

Vereinfachungen:

- $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{(x-1)}{3}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{(x-1)}{3}+\left(\frac{x+1}{3}\right)^2-\dots\right)$
- $\frac{1}{(x-3)^2} = \frac{d}{dx}\frac{-1}{x-3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{3-x}$
- $\ln(x) = \ln(x+1-1) = \ln(1+(x-1))$
- $e^x = e\cdot e^{x-1}$
- $\int_0^{\pi/2} \cos(x)^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$
- $\int_0^{\pi/2} \sin(x)^{2n}\,dx = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}$
- $(a^5-b^5) = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$
- $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1 = (a+1)(a^4+a^2+1) = (a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$
- $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
- $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
- $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

Binomischer Entwicklungssatz: $(x+y)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^{\alpha-n} y^n \quad \alpha\in\mathbb{C} \quad x,y\in\mathbb{R}$

↳ Konvergenz, falls $x>0$ und $\left|\frac{y}{x}\right|<1$

Grenzwert, Rechenregeln

Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

Dann:
- $\lim_{n\to\infty} (a_n\cdot b_n) = a\cdot b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a+b$

Sonstiges:

Mathematische Konstanten: (Approximationen)

$\pi \approx 3.14159$
$e \approx 2.71828$

Wurzelapproximationen:

$\sqrt{2} \approx 1.41$ $\quad \sqrt{11} \approx 3.32$
$\sqrt{3} \approx 1.73$ $\quad \sqrt{13} \approx 3.61$
$\sqrt{5} \approx 2.24$ $\quad \sqrt{17} \approx 4.12$
$\sqrt{7} \approx 2.65$

Logarithmus Rechenregeln:

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- $\log(x^r) = r\log(x)$
- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$
- $\log_b(x+y) = \log_b(x) + \log_b\left(1+\frac{y}{x}\right)$
- $\log_b(\sqrt[n]{x}) = \log_b(x^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n}\log_b(x)$

$f(x) = e^x \iff f^{-1}(x) = \ln(x)$
$a = b^x \iff \log_b a = x$

Basisumrechnung:

- $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
- $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)} \iff \log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$
- $\ln(e^x) = e(\ln(x)) = x$

Exponentialfunktion: $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln(x)$ (bij. auf $\mathbb{R}_{>0}$)

$$\exp(a) = e^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$$

- wichtiger Trick: $\overset{a = e^{\ln(a)}}{a^x} = e^{x \cdot \ln(a)} = b^{x \cdot \log_b(a)}$
- $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ $\quad \bullet \int e^x \, dx = e^x + C$
- $\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ $\quad \bullet \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$

Definitionen von e^x:

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (Exponentialreihe)
- $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (Def. als Grenzwert einer Folge mit $n \in \mathbb{N}$)

ein paar Werte:

$\log \hat{=}$ Basis e

$\log(1) = 0$	$\log(4) \cong 1{,}3863$	$e \cong 2{,}718$	$e^{\frac{1}{2}} \cong 1{,}649$
$\log(2) \cong 0{,}6931$		$e^2 \cong 7{,}389$	$e^5 \cong 148{,}4$
$\log(3) \cong 1{,}0986$		$e^3 \cong 20{,}09$	$e^6 \cong 403{,}43$
		$e^4 \cong 54{,}60$	$e^7 \cong 1096{,}63$

Wichtige Ungleichungen:

- $|a+b| \leq |a| + |b|$ $\quad \Delta$-Ungleichung
- $\boxed{|a-b| \geq ||a| - |b||}$
- $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $2ab \leq a^2 + b^2$
- $|a_n b_n| \leq \frac{1}{2}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$
- $|ab - cd| \leq |a| \cdot |b-d| + |d| \cdot |a-c|$ $\quad$ Beweis: ausmultiplizieren

↳ wichtig bei gleichm. Konvergenz zeigen:

$|f_n(x) g_n(x) - f(x) g(x)| \leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)|$

rationale Funktionen:

- Polynome $f(x)$ (ganzrational)
- Bruch aus 2 Polynomen $\frac{f(x)}{g(x)}$ (gebrochenrational)

disjunkt: wenn 2 Körper kein gemeinsames Element besitzen.

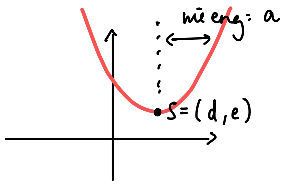
gerade Zahlen: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. $\quad \{0, 2, 4, \ldots\}$

Primzahlen: $\{2, 3, 5, \ldots\}$

Potenztürme: von oben nach unten.

Wichtige Gleichungen:

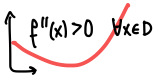
Parabel: Normalform: $f(x) = ax^2 + bx + c$
Scheitelform: $f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e$

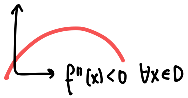


Wichtige Funktionen:

- Betragsfunktion: $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$
- Fakultät: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$
  $(2n)!! = 2^n n!$
  $(2n+2)!! = (2n+2) \cdot (2n)!!$

- konvexe / konkave Funktionen:

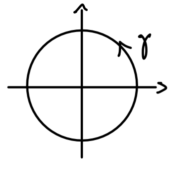
Konvex:


Konkav:


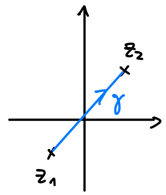
⚠ lineare Funktionen (dh. Geraden) sind auf ganz $\mathbb{R}$ konvex und konkav, jedoch nicht strikt.

Parametrisierungen:

$\gamma: [0,1] \to \mathbb{C}$
$t \mapsto \gamma(t)$



$\gamma(t) = re^{2\pi i t} \quad t \in [0,1]$



$\gamma(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t$

11.6 Begriffe:

▷ **ganze Funktion:** Funktion, die in ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist.
↳ dh. analytisch

Liste wichtiger ganzer Funktionen:
- > e^x
- > Polynome
- > trigonometrische & hyperbelfunktionen
- > Σ, $\cdot$, $\circ$ ganzer Funktionen

▷ **analytische Funktion** = holomorphe Funktion (in $\mathbb{C}$)
Def: Analytische Funktion = Fkt. lässt sich durch eine Potenzreihe darstellen

▷ **ein Körper** (Vektorraum)

Def: **meromorphe Funktion** auf U = holom. Fkt. auf $U \setminus \{z_0, \ldots, z_n\}$ mit $z_0, \ldots, z_0$ = Pole oder hebbare Singularitäten

Def. **Fouriersynthese:** Zusammensetzen von Harmonischen in einer periodischen Fkt.

Die **Xi-Funktion:** $\chi_{[-a,a]} := \begin{cases} 1 & t \in [-a,a] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\sum_n x = n \cdot x$

nicht vergessen!
$e^{2\pi i t}$

Graphen wichtiger Funktionen:

5.7 Exponential- und Logarithmusfunktionen

▶ **Exponentialfunktionen:** $\boxed{y = f(x) = a^x}$ $\quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}$.

- **Eulersche Zahl:** $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\ldots$.
- Wachstums- oder Zerfallsprozesse:

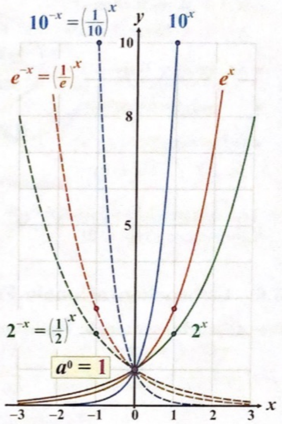
  $\boxed{N(t) = N_0 \cdot a^t}$ oder $\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}}$

  wobei:

t	:	Zeit.
N_0	:	Startwert (Population bei $t = 0$).
$N(t)$	:	Population zur Zeit t.
$a = e^k$	:	Wachstumsfaktor: $\boxed{a = 1 + \frac{p}{100}}$ mit

  $p: \left\{\begin{array}{ll} \text{Wachstum} & (p > 0) \\ \text{Zerfall} & (p < 0) \end{array}\right\}$ in %

  pro Zeiteinheit.



⇒ Potenzsätze, Logarithmensätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

⇒ Grenzwerte siehe S. 25.

▶ **Logarithmusfunktionen:** $\boxed{\overline{f}(x) = \log_a(x)}$ $\quad x > 0$, $\quad a > 0; \quad a \neq 1$.

$\overline{f}(x) = \log_a(x)$ ist Umkehrfunktion zu $f(x) = a^x$:

- Zehnerlogarithmus:

  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)}$

  $\log(10^x) = x, \qquad 10^{\log(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Natürlicher Logarithmus:

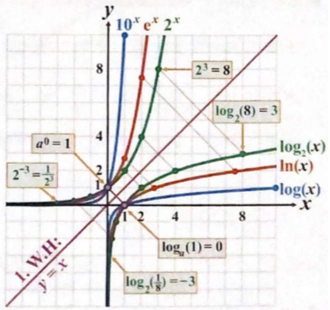
  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_e(x) = \ln(x)}$

  $\ln(e^x) = x, \qquad e^{\ln(x)} = x \qquad (x > 0)$

- Binärer Logarithmus:

  $\boxed{\overline{f}(x) = \log_2(x) = \mathrm{lb}(x)}$

  $\log_2(2^x) = x, \qquad 2^{\log_2(x)} = x \qquad (x > 0)$



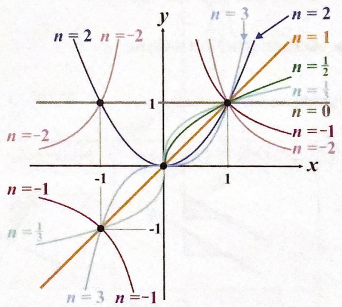
⇒ Potenz- und Logarithmensätze siehe S. 5.

⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

5.4 Potenzfunktionen

Potenzfunktionen: $\boxed{f(x) = x^n}$ $\quad n \in \mathbb{Q}$.

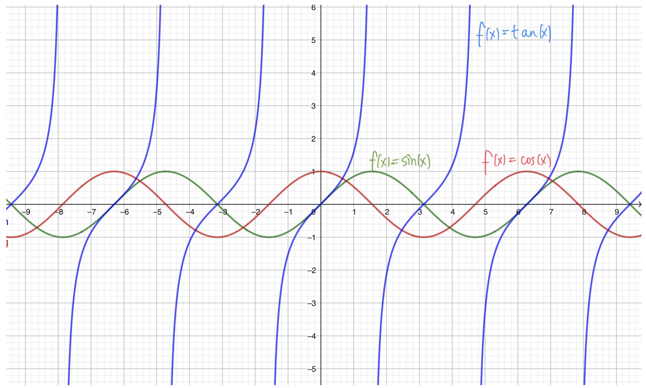
$n = 0$	Konstante Funktion
$0 < n < 1$	Wurzelfunktionen
$n = 1$	Lineare Funktion
$n \in \mathbb{N};\ n > 1$	Parabeln n-ter Ordnung
$n \in \mathbb{Z};\ n < 0$	Hyperbeln n-ter Ordnung

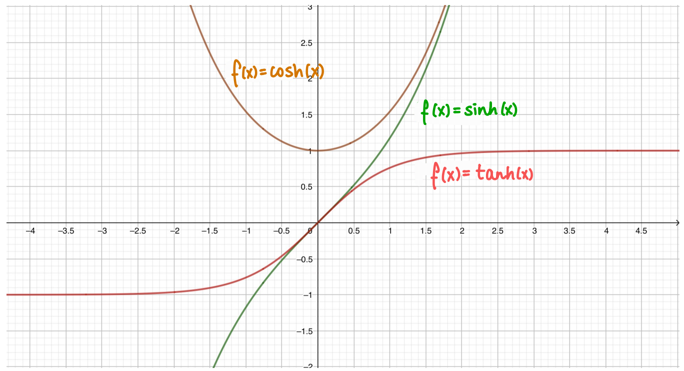


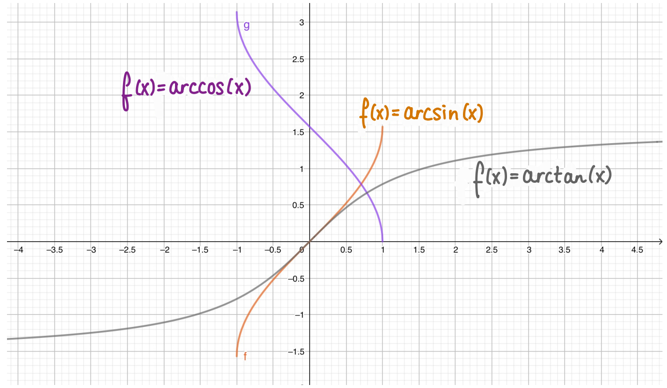
Der Graph von $f(x) = x^n$ ist...

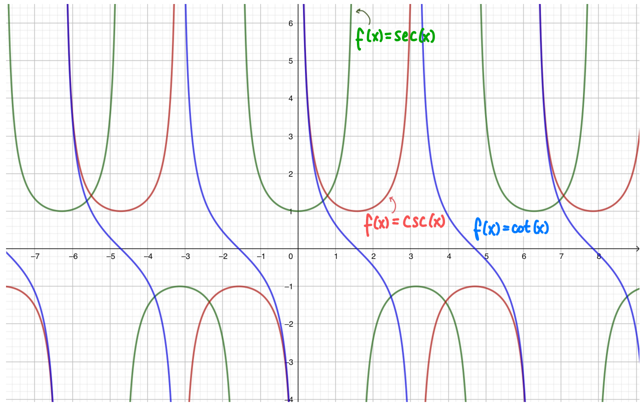
- ...spiegelsymmetrisch zur y-Achse, falls n gerade.
- ...punktsymmetrisch zum Ursprung, falls n ungerade.

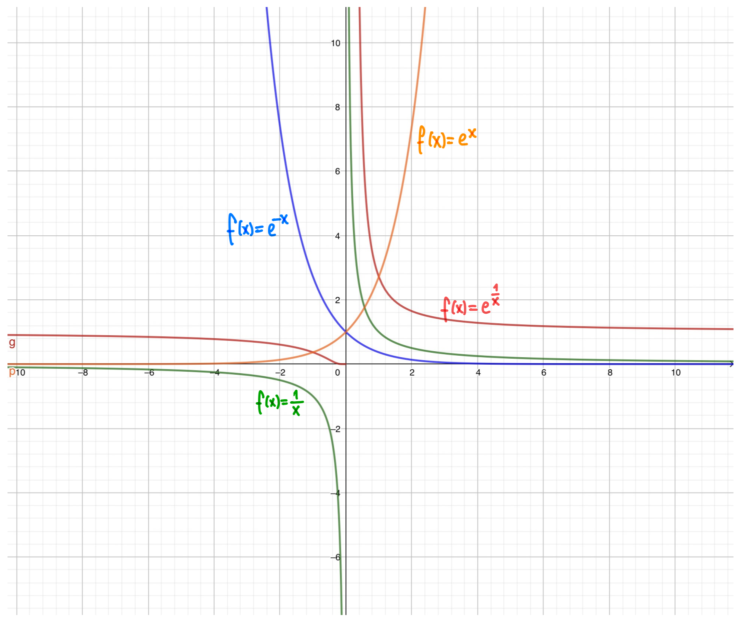
⇒ Ableitungen und Stammfunktionen siehe S. 29.

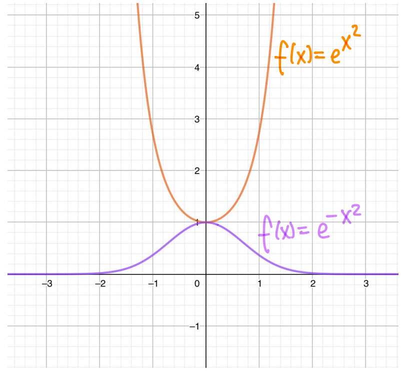


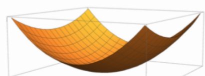




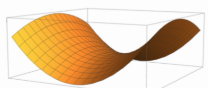




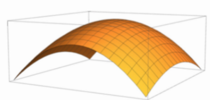




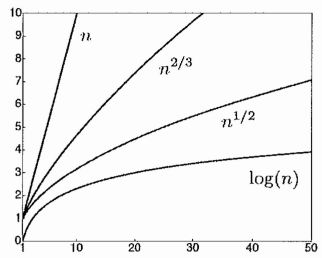
$f(x,y) = x^2 + y^2$

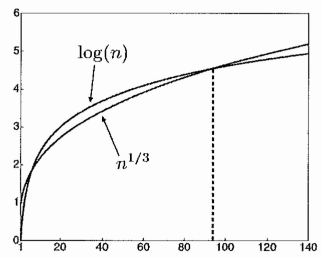


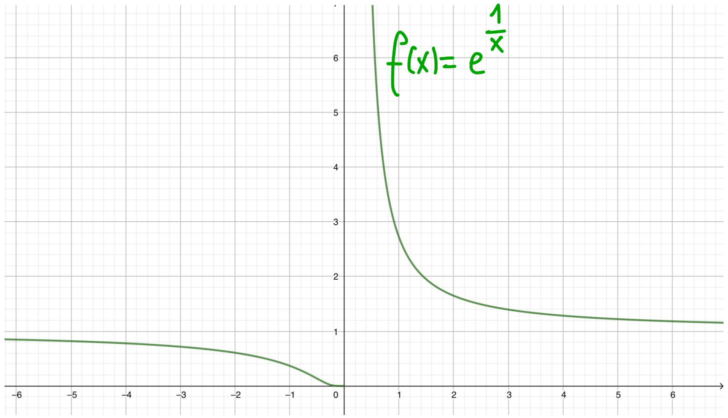
$f(x,y) = x^2 - y^2$

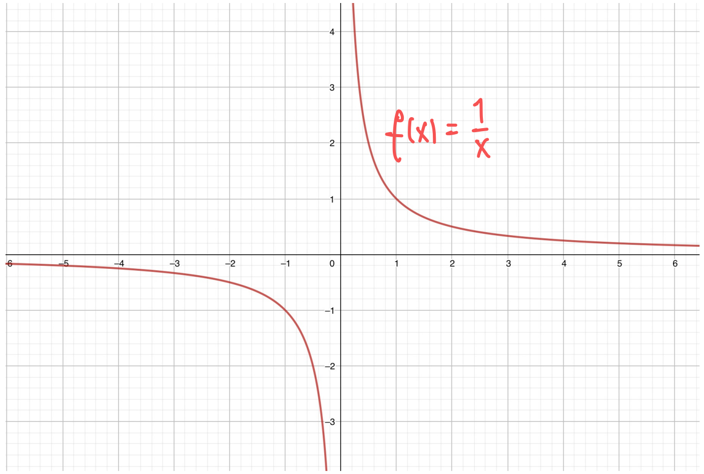


$f(x,y) = -x^2 - y^2$









Seien $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$ und $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Wenn $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, so gilt $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|$

Beweis: ① $\forall a, b \in \mathbb{C}$: $|a| = |a+b-b| \leq |a-b| + |b|$
$\Rightarrow$ $|a| - |b| \leq |a-b|$. Da a, b beliebig waren folgt auch $|b| - |a| \leq |a-b|$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ gilt, folgt, dass $\exists r = r(\varepsilon) > 0$ s.d. $\forall z \in \mathbb{C}$, mit $z \in B(z_0, r)$, $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ gilt. Somit folgt $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $z \in B(z_0, r)$
$$\big||f(z)| - |w_0|\big| \leq |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$
Deswegen gilt auch $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = w_0$ ∎

Wann Laplace, wann Fourier transformation?

Wenn $f(t) = 0 \ \forall t < 0 \Rightarrow$ Laplace (konvergiert öfter als FR)

Laplace nicht möglich: $f(t) = H(t) e^{t^2}$
$\exists$ kein σ s.d. $e^{t^2} < e^{\sigma t} \ \forall t > 0$

dh. für Laplace: Funktion kann wachsen, aber nicht schneller als eine Exponentialfunktion mit linearem Exponent.

andere nicht-Originalfunktionen: $e^{\frac{1}{t}}, \frac{1}{t}, \ldots$

einige Originalfunktionen: $e^{\alpha t} \ \forall \mathrm{Re}(s) > \alpha$, $t^2, \ldots$

Unterschied Laplace & Fourier:

Laplace: kann auch wachsende Funktionen betrachten :)
aber: Werte von f für negative Werte bringen keine Kontribution

Liste holomorpher / nicht holomorpher Funktionen:

aus MC 3:

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist:

- $g(z) = f(z)^2$ holomorph
- $g(z) = f(z^2)$ holomorph.
- $g(z) = \overline{f(z)}$ nicht holomorph (nur bei $z=0$ holomorph)
- $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ holomorph $\to$ CR
- $g(z) = f(\bar{z})$ nicht holomorph (nur bei $z=0$ holomorph)

Sei $u(x,y) = x^2 + bxy + cy^2$ mit $b, c \in \mathbb{R}$. Wenn $c = -1$ ist u der Realteil einer holomorphen Funktion $f = u(x,y) + iv(x,y)$
(Weil nur dann ist u harmonisch)

Grob: lineare Ausdrücke mit $\bar{z}$, $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ sind (meist) nirgends diffbar. Hingegen sind quadratische Funktionen (oder Produkte dieser Grundfaktoren) in $z=0$ diffbar (und auch meist nur dort). $\to$ ersichtlich mit CR.

holomorph:

- Polynome
- Trigonometrische & hyperbolische Funktionen
- Exponentialfunktion
- $\mathrm{Log}(z)$ auf $\mathrm{Re}(z) > 0$. $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$
- $f(z) = \frac{1}{z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Sei $z := x + iy$.

- $f(z) = \frac{|z|^2}{\bar{z}} = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}} = z$
- $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$
- $f(z) = -y + ix = iz$
- $f(z) = e^x e^{iy}$
- $f(z) = e^{-x}\cos(x) - ie^{-x}\sin(y) = e^{-z}$

nicht holomorph:

- $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy = \bar{z}^2$
- $f(z) = x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(\bar{z}^2 + z)$
- $f(z) = y + ix = i\bar{z}$
- $f(z) = -x + iy = -\bar{z}$
- $f(z) = e^x + e^{iy} = \exp\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + \exp\left(\frac{z-\bar{z}}{2}\right)$
- $f(z) = e^x e^{-iy} = e^{\bar{z}}$
- $f(z) = e^{-x\cos(y)} = \frac{1}{2}(e^{-\bar{z}} + e^{-z})$

$f(z) = \frac{1}{1 - z\bar{z}}$

- $\frac{\bar{z}}{z}$
- $\frac{\bar{z}^2}{z}$
- $|z|$, $\bar{z}$

$f(z) = \bar{z}$ ist nirgends holomorph.
$f(z) = \mathrm{Im}(z)$ ist nirgendes holomorph. ($f(z) = \mathrm{Re}(z)$ gleichfalls)

$f(z) = z\bar{z}$ ist diffbar im Ursprung (und auch nur dort)

$\bar{z}^2$ ist nicht holomorph (ausser auf $z=0$)

$e^{\bar{z}}$ auch nicht holomorph.

Bem: Funktion hängt direkt von $\bar{z}$ ab $\Rightarrow$ Hinweis darauf, dass Funktion ist nicht analytisch

↳ Achtung das genügt nicht als Argumentation an der Prüfung!

Bem: irgendwo nicht definiert (z.B. Polstelle) $\Rightarrow$ nicht holomorph.

Bem: bei Reihen: wenn Reihe auf geg. Bereich nicht konv. $\Rightarrow$ nicht holomorph

Beispiel Integral Typ III:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx$$

gerade Funktion

① komplexifizieren:

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2+1} \quad \rightarrow \quad f(x) = \mathrm{Re}(f(z))$$

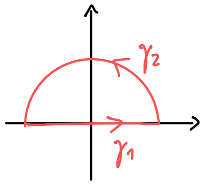
② Residuensatz anwenden über:

$\gamma_1: [-R,R] \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma_1(t)=t$

$\gamma_2: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$

$\gamma_2(t) = Re^{i\pi t}$



$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

- $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz$ = gesuchtes Integral.
- $\left|\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{iRe^{\pi i t}} R\pi i e^{\pi i t}}{R^2 e^{2\pi i t}+1}\,dt\right| =$

$$= \left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{iR\cos(\pi t)} e^{-R\sin(\pi t)} R\pi i e^{\pi i t}}{R^2 e^{2\pi i t}+1}\,dt\right|$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-R\sin(\pi t)} R\pi}{R^2+1}\,dt \leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R^2+1} = \int_0^1 0\,dt = 0$$

③ Residuen berechnen: $\mathrm{Res}(f(z), z_0=i) = -\frac{1}{2e}i$

④ Residuensatz: $\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma} f(z)\,dz = \frac{\pi}{e}$

⑤ gesuchtes Integral:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,dz\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2e}}}$$

Faltung ausführlich berechnen, Beispiel:

Sei $f(t) = \begin{cases} 1 & t\in[0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und $g(t) = \begin{cases} 2t & t\in[0,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

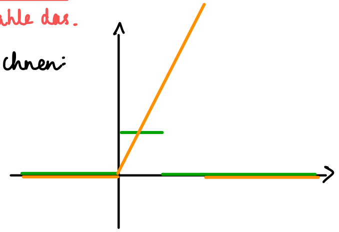
$(f*g)(t)$ berechnen:

① Faltung (Definition) aufschreiben & wählen welche Funktion welches Argument hat:

$$(f*g)(t) = \underline{\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = (g*f)(t)$$

↳ hier wähle das.

② Beide Funktionen zeichnen:



③ Wann ist das Integral $\neq 0$?

$f(\tau) \neq 0$ wenn $0 \leq \tau \leq 1$

$g(t-\tau) \neq 0$ wenn $0 \leq t-\tau \leq 2$

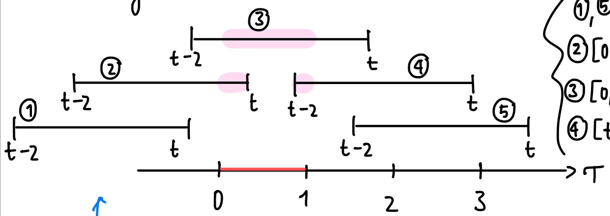
$t \geq \tau \geq t-2$

=> d.h. Faltung ist $\neq 0$ wenn $\tau \in [0,1] \cap [t-2,t]$

unser "Cursor"

nicht vergessen: t ist eine Variable!

④ Integrationsbereiche bestimmen:



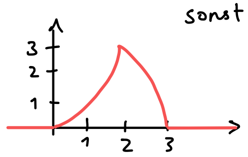
$$\begin{cases} ①,⑤\ \emptyset & t<0,\ t>3 \\ ②\ [0,t] & 0<t\leq 1 \\ ③\ [0,1] & 1<t\leq 2 \\ ④\ [t-2,1] & 2<t\leq 3 \end{cases}$$

schauen wo t ist → $\forall t$ wo es ein Schnitt gibt, ist die Faltung $\neq 0$.

⑤ Integrieren:

$$(f*g)(t) = \begin{cases} \int_0^t 1\cdot 2(t-\tau)\,d\tau = t^2 & \text{für } 0<t\leq 1 \\ \int_0^1 1\cdot 2(t-\tau)\,d\tau = 2t-1 & \text{für } 1<t\leq 2 \\ \int_{t-2}^1 1\cdot 2(t-\tau)\,d\tau = 3+2t-t^2 & \text{für } 2<t\leq 3 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

⑥ Resultat zeichnen:



Aufpassen!:

- $\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1}$ von LR von f an der Stelle z_0 entwickelt.
- bei der Singularitätenbestimmung:
  falls man für ein z_0 $\frac{0}{0}$ bekommt
  → weiter untersuchen. evtl ist sie hebbar :)
- $\mathrm{Im}\left(\int_\gamma f(z)\,dz\right) \neq \int_\gamma \mathrm{Im}(f(\gamma))\,dz$

Zusammenfassung Netzwerke und Schaltungen II (D-ITET)

Fourieranalyse

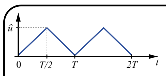
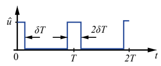
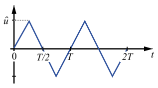
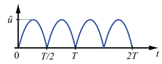
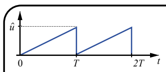
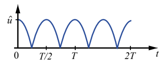
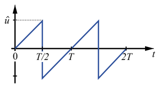
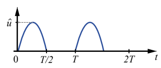
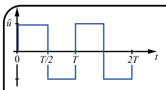
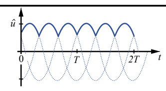
Fourierreihe — periodisch

Eine periodische Funktion $f(x)$, welche endlich ist und sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen lässt, in denen $f(x)$ stetig und monoton ist, erfüllt die Dirichlet'schen Bedingungen. Das heisst: $f(x)$ lässt sich als eine Summe von trigonometrischen Funktionen darstellen.

Im Beispiel der Spannung $u(t)$ lässt sich dies z.B. wie folgt interpretieren: $u(t) = \underbrace{U_0}_{\text{DC}} + \underbrace{\hat{u}_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1)}_{\text{Grundschwingung}} + \underbrace{\hat{u}_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2)}_{\text{1. Oberschwingung}} + \dots$

Periodendauer	$T = 2\pi/\omega$
Normalform	$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \cdot \cos\left(n2\pi\frac{t}{T}\right) + \hat{b}_n \cdot \sin\left(n2\pi\frac{t}{T}\right)\right]$
Spektralform	$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n\, \cos(n\omega t - \psi_n) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{c}_n\, \sin(n\omega t + \varphi_n)$
Koeffizientenberechnung	$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$ $\hat{a}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$ $\hat{b}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$
Amplitudenspektrum	$\hat{c}_n = \sqrt{\hat{a}_n^2 + \hat{b}_n^2}$ $\tan(\varphi_n) = \frac{\hat{a}_n}{\hat{b}_n}$ $\tan(\psi_n) = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_n}$

Fourierreihen von typischen Signalen:

Zeitfunktion	U_{eff}	Fourier-Koeffizienten
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}$ $n = 1, 3, 5, ...$ $u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{4\hat{u}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + ...\right]$
	$\hat{u}\sqrt{2\delta}$	$a_0 = 2\delta\hat{u}$ $\hat{a}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}\sin(n2\pi\delta)$ $n = 1, 2, 3, ...$ $u(t) = 2\delta\hat{u} + \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(2\pi\delta)\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(4\pi\delta)\cos(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi\delta)\cos(3\omega t) + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n+3}{2}}$ $n = 1, 3, 5, ...$ $u(t) = \frac{8\hat{u}}{\pi^2}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega t) - +...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $n = 2, 4, 6, ...$ $u(t) = \hat{u}\lvert\sin(\omega t)\rvert$ $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} - \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$a_0 = \frac{1}{2}\hat{u}, \hat{b}_n = \frac{-\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$ $n = 1, 2, 3, ...$ $u(t) = \frac{\hat{u}}{2} - \frac{\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + ...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$	$a_0 = \frac{2\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n+1)(n-1)}$ $n = 2, 4, 6, ...$ $u(t) = \hat{u}\lvert\cos(\omega t)\rvert$ $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi} + \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} - \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - +...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{\sqrt{3}}$	$\hat{b}_n = \frac{2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}$ $n = 1, 2, 3, ...$ $u(t) = \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) - \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) - +...\right]$
	$\frac{\hat{u}}{2}$	$a_0 = \frac{\hat{u}}{\pi}, \hat{a}_n = \frac{-2\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $\hat{b}_1 = \frac{\hat{u}}{2}$ $n = 2, 4, 6, ...$ $u(t) = \hat{u}\sin(\omega t)$ für $0 \le t \le T/2$ $u(t) = \frac{\hat{u}}{\pi} + \frac{\hat{u}}{2}\sin(\omega t) - \frac{2\hat{u}}{\pi}\left[\frac{\cos(2\omega t)}{1\cdot 3} + \frac{\cos(4\omega t)}{3\cdot 5} + \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} + ...\right]$
	$\hat{u}$	$\hat{b}_n = \frac{4\hat{u}}{\pi}\frac{1}{n}$ $n = 1, 3, 5, ...$ $u(t) = \frac{4\hat{u}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + ...\right]$
	$\hat{u}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8\pi}}$	$a_0 = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{2\pi}$ $\hat{a}_n = \frac{-3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\frac{1}{(n+1)(n-1)}$ $n = 3, 6, 9, ...$ $u(t) = \frac{3\sqrt{3}\hat{u}}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \frac{\cos(3\omega t)}{2\cdot 4} - \frac{\cos(6\omega t)}{5\cdot 7} - \frac{\cos(9\omega t)}{8\cdot 10} - ...\right]$

Fourier-Transformation — nicht-periodisch

Für den Grenzübergang $T \to \infty$ geht das diskrete Linienspektrum in ein kontinuierliches Spektrum über. Durch den Zusammenhang $T = 2\pi/\omega$ streben gleichzeitig die Abstände $\Delta\omega$ zwischen den Oberschwingungen zu immer kleineren Werten.

$$\mathcal{F}\{u(t)\} \qquad \underline{U}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{\underline{U}(\omega)\} \qquad u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underline{U}(\omega)\, \mathrm{e}^{j\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

Symmetrien und Vereinfachungen

Gerade Funktionen

$u(t) = u(-t)$

$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} u(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \hat{b}_n = 0$

$\hat{a}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$

($\rightarrow$ Spiegelung an y-Achse)

Ungerade Funktionen

$-u(t) = u(-t)$

$a_0 = \hat{a}_n = 0$

$\hat{b}_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$

($\rightarrow$ Punktspiegelung)

Halbwellensymmetrie $a_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_{2n} = 0$

$u(t) = -u(t+T/2)$

$$\hat{a}_{2n-1} = \frac{2}{T}\int_0^{T} u(t)\cos\left((2n-1)\omega t\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos\left((2n-1)\omega t\right)\mathrm{d}t$$

$$\hat{b}_{2n-1} = \frac{2}{T}\int_0^{T} u(t)\sin\left((2n-1)\omega t\right)\mathrm{d}t = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin\left((2n-1)\omega t\right)\mathrm{d}t$$

Gerade Fkt. mit Halbwellensymmetrie

$a_0 = \hat{a}_{2n} = \hat{b}_n = 0$

$\hat{a}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\cos\left((2n-1)\omega t\right)\mathrm{d}t$

$u(t) = u(-t) = -u(t+T/2)$

Ungerade Fkt. mit Halbwellensymmetrie

$a_0 = \hat{a}_n = \hat{b}_{2n} = 0$

$\hat{b}_{2n-1} = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} u(t)\sin\left((2n-1)\omega t\right)\mathrm{d}t$

$u(t) = -u(-t) = -u(t+T/2)$

Zerlegung in geraden & ungeraden Anteil

$u(t) = u_g(t) + u_u(t)$

mit $u_g(t) = \frac{1}{2}\left[u(t) + u(-t)\right]$

$u_u(t) = \frac{1}{2}\left[u(t) - u(-t)\right]$

Achsen-/Zeitverschiebung um t_0

$\hat{a}_{n,\text{neu}} = \hat{a}_n \cdot \cos(n\omega t_0) - \hat{b}_n \cdot \sin(n\omega t_0)$

$\hat{b}_{n,\text{neu}} = \hat{a}_n \cdot \sin(n\omega t_0) + \hat{b}_n \cdot \cos(n\omega t_0)$

Laplace Transformation

Laplace Eigenschaften und Korrespondenzen

Laplace-Transformation ist Weiterentwicklung der Fourier-Transf. Gehen für $s = j\omega$ ineinander über. Bedingung: $u(t) = 0$ für $t < 0$.

Komplexe Frequenz $\quad s = \sigma + j\omega,\ \mathrm{d}\omega = \frac{1}{j}\,\mathrm{d}s$

Laplace Transformation $\quad u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\underline{U}(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\bar{s}}^{s} \underline{U}(s)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}s \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U}(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

$u(t)$		$\underline{U}(s)$	$u(t)$		$\underline{U}(s)$
$u(at)$, $a>0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{a}\,\underline{U}(\frac{s}{a})$	$\lambda\, u(t) + \mu\, v(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\lambda\,\underline{U}(s) + \mu\,\underline{V}(s)$
$u(t-t_0)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\mathrm{e}^{-st_0}\,\underline{U}(s)$	$\mathrm{e}^{-at}\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}(s+a)$
$-t\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}'(s)$	$t^2\,u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}''(s)$
$(-t)^n u(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\underline{U}^{(n)}(s)$			
$u'(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s\,\underline{U}(s) - u(0)$	$u''(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2\underline{U}(s) - s\,u(0) - u'(0)$
$u^{(n)}(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^n\underline{U}(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \ldots - u^{(n-1)}(0)$			
$\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}\,\underline{U}(s)$	period. mit T	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-sT}}\int_0^T u(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$
$\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s\tau+1}$	$1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s(s\tau+1)}$
$\frac{1}{\tau^2}\,t\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau+1)^2}$	$\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\right)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{(s\tau_1+1)(s\tau_2+1)}$
$\mathrm{ramp}(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ t & t>0 \end{cases}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2}$	$t - \tau + \tau\mathrm{e}^{-t/\tau}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(\tau s+1)}$
$\cos(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}$
$\sin(\omega t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1)E(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s^2(s-a)}$
$\exp(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s-a}$			