THERMODYNAMIK 1&2

Patrik Rohner, 24. Juni 2009 (rev. 15. Juli 2010) rohnerpa@student.ethz.ch

THERMODYNAMIK 1

KONZEPTE UND DEFINITIONEN

KONSTANTEN

- Avogadro-Zahl	$N_A = 6.022 \cdot 10^{26} \frac{1}{kmol}$
- Bolzmannkonstante	$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\int_{K}^{kmol}}{K}$
- Gaskonstante	$\bar{R} = R_0 = 8.314 \frac{kJ}{kmol K} = N_A \cdot k_B$
- Normdruck	$p_0 = 101325 Pa = 1.01325 bar$
- Normalfallbeschleunigung	$g_0 = 9.81 ms^{-2}$
- Normtemperatur	$T_0 = 298 K \cong 25^{\circ}C$

 $T_c = 273.16 K = 0.01^{\circ}C$

- Tripelpunkt Wasser

EINHEITEN	
- Molmasse	$M: \left[\frac{kg}{kmol}\right] \qquad \qquad N = \frac{m}{M} \cdot N_A = n \cdot N_A$
- Druck	$p: \left[\frac{N}{m^2}\right] = [Pa] \qquad 1bar = 10^5 Pa$
- Spezifisches Volumen	$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{m^3}{kg} \right]$
- Innere Energie	$U: [kJ]$, $u: \left[\frac{kJ}{kg}\right]$, $\bar{u}: \left[\frac{kJ}{kmol}\right]$
- Enthalpie	$H:[kJ]$, $h:\left[\frac{kJ}{ka}\right]$, $\bar{h}:\left[\frac{kJ}{kmol}\right]$
- Entropie	$S: \begin{bmatrix} \frac{kJ}{K} \end{bmatrix}$, $S: \begin{bmatrix} \frac{kJ}{kgK} \end{bmatrix}$, $\bar{S}: \begin{bmatrix} \frac{kJ}{kmolK} \end{bmatrix}$
- Gaskonstante	$R: \left[\frac{J}{kgK}\right] = \frac{\bar{R} \cdot 1000}{M}$, $R: \left[\frac{kJ}{kgK}\right] = \frac{\bar{R}}{M}$
- Kraft	$F: [N] = \left[\frac{kg m}{s^2}\right]$
- Energie	$E: [J] = \left[\frac{kg \ m^2}{s^2}\right]$
- Exergie	$Ex: [J] = \left[\frac{kg m^2}{s^2}\right]$
- Leistung	$P: [W] = \left[\frac{J}{s}\right] = \left[\frac{kg \ m^2}{s^3}\right]$
- Arbeit	$W = \int \vec{F} ds = \int_{V_1}^{V_2} p(v) dV [Nm] = [J]$
- Kinetische Energie	$KE = \frac{1}{2}mw^2$
- Potentielle Energie	PE = mgz

W > 0	Vom System geleistete Arbeit = ab geführte Arbeit
W < 0	Am System geleistete Arbeit = zu geführte Arbeit

Q > 0	Dem System zu geführte Wärme
0 < 0	Vom System ab gegebene Wärme

SI-PRÄFIXE

F	Peta-	10^{15}	k	Kilo-	10^{3}	m	Milli-	10^{-3}
7	' Tera-	10^{12}	h	Hekto-	10^{2}	μ	Mikro-	10^{-6}
G	Giga-	10 ⁹	d	Dezi-	10^{-1}	n	Nano-	10^{-9}
N.	1 Mega-	10^{6}	С	Zenti-	10^{-2}	p	Pico-	10^{-12}

Zustandsgrössen						
	- Druck p	- Temperatur T				
Thermische	- Volumen V	- Masse m				
	- Stoffmenge n					
Kalorische	- Innere Energie U (T, (E	E _{pot}))				
Kalorische	- Entropie S (T,p)	 Enthalpie H (T,p) 				
Prozessgrössen						
- Wärme Q - Arbeit W						

- Intensive Grössen: ändern ihre Werte bei der gedachten Teilung des (homogenen) Systems nicht (p.T)
- Extensive Grössen: Sind auf Masseneinheiten bezogen (m, V)
- Spezifische Grössen: x = X/m extensive Zustandsgrössen in intensive umgewandelt:
- Molare Grössen \overline{u} : $U = n \cdot \overline{u} = \frac{m}{M} \cdot \overline{u}$, $u = \frac{\overline{u}}{M}$ Bezieht sich auf N_A Moleküle. Bsp: Molares Volumen $\bar{v} = \frac{M}{\rho} \left[\frac{m^3}{km\alpha} \right]$

THERMODYNAMISCHES SYSTEM

- Massenstrom-System
 - geschlossenes System: Anz. im System enthaltene Moleküle konst.
 - offenes System: Es fliessen Massenströme über die Syst. Grenze
- Wärmestromsystem
 - adiabates Systeme: Keine thermische E über Syst. Grenze = isoliert
 - diathermes Systeme: nicht isoliert
- physikalisch-chemisches System
 - homogenes System: physikalische und chemische Zusammensetzung ist überall gleich.
 - heterogenes System: Bsp: Mineralien
 - → ein nur chemisch homogenes System kann auch 2 Phasen beinhalten; das System [H₂O (I) und H₂O (g)] ist chemisch homogen aber phisikalisch heterogen

Nullter Hauptsatz: Wenn sich zwei Systeme mit einem dritten im Gleichgewicht befinden, sind sie auch untereinander im thermischen GG.

ELEMENTE DER KINETISCHEN GASTHEORIE

	Perfektes Gas	Ideales Gas	Realgas		
Innere Energie U	U =	$U = E_{th}$			
Therm. Energie E_{th}		$E_{th} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_M}{2} \cdot w_i^2$			
Temperatur T	$T = \frac{1}{3} \frac{E_{th}}{N}$	$T = \frac{1}{f} \frac{E_{th}}{N}$			
$N = \frac{m}{M} \cdot N_A$	$n = \frac{m}{M} \cdot N_A \cdot \frac{1}{V}$	$\rho = \frac{m}{V}$	$v = \frac{V}{m}$		

• Thermische Energie Bewegung aller Moleküle (Translation, Rotation, Oszillation) ergibt eine endliche Menge von kinetischer E = Eth

$$E_{th} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_M}{2} \cdot w_i^2$$
, $\overline{E_{th}} = \frac{E_{th}}{N} = \frac{m_M}{2} \cdot \overline{w_i^2}$, $e_{th} = \frac{E_{th}}{N \cdot m_M} = \frac{\overline{w_i^2}}{2}$

- Wärme Q Über Systemgrenze transportierte thermische Energie.
- Abs. Temperatur Die Temperatur ist gleich der thermischen Energie dividiert durch die Anz. Freiheitsgrade.

$$E_{th} = N \cdot \frac{f}{2} k_b \cdot T$$
 , $\overline{E_{th}} = \frac{f}{2} k_b \cdot T$, $e_{th} = \frac{f}{2} \frac{k_b \cdot T}{m_{th}}$

 k_h beschreibt die Umrechnung der Temp. als Energie in J nach Kelvin.

• Innere Energie bei perfekten Gasen $\triangle U = \triangle E_{th}$

 $\triangle U = \triangle E_{th}$ $u = \frac{f}{a}RT$ • Innere Energie bei idealen Gasen f: Anz. Freiheitsgrade. Daraus folgt : $c_v = \frac{f}{2}R$ und $c_n = \left(\frac{f}{2} + 1\right)R$ $c_n - c_v = R$ gilt weiterhin (auch bei realen Gasen)

Einatomig:	f=3	Bsp: He (Translation in 3 Richtungen)
Zweiatomig:	f=5	Bsp: O ₂ , N ₂ (Translation und Rotation)
Dreiatomig:	f=5	Bsp: CO ₂ (Translation und Rotation)
Dreiatomig:	f=12	Bsp: CO ₂ (ab 1800K auch Oszillation)

- Innere Energie bei realen Gasen
- $\triangle U = \triangle E_{th} + \triangle E_{pot}$
- Druck Kraftwirkung der Moleküle bezogen auf eine Flächeneinheit.

$$p_0 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot n \cdot w_0^2$$
 , $p = n \cdot k_B \cdot T$, $p \propto T, n$

- Enthalpie bei perfekten Gasen $h = u + pv = \frac{5}{2}RT$
- Enthalpie bei idealen Gasen $h = u + pv = (\frac{f}{2} + 1)RT$
- Enthalpie bei realen Gasen ist in Tabellen nachzuschlagen

1. HAUPTSATZ: ENERGIE EINES SYSTEMS

Energie im System: E = KE + PE + U bleibt konstant. U ist die innere Energie und umfasst Wärme-, Elektrische-, Bindungs-E. ...

$$\Delta E = Q - W = Q - \int p dV = \Delta K E + \Delta P E + \Delta U$$

mit ΔKE und ΔPE vernachlässigt: $\Delta U = Q - W = O - \int p dV$

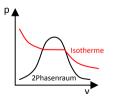
DER ERSTE HAUPTSATZ ALS LEISTUNGSBILANZ

$$\frac{dE}{dt} = \dot{Q} - \dot{W} \qquad \frac{dU}{dt} = mc \frac{dT}{dt} \qquad U(T_2) - U(T_1) = m \int_{T_1}^{T_2} c(T) dT$$

ENERGIEANALYSE VON KREISPROZESSEN

$$Q_{KP} = W_{KP} \qquad \qquad \triangle U = 0$$

DIE P-V-T-BEZIEHUNG





Dampfmassenteil: $x = \frac{v_x - v_f}{v_o - v_f} = \frac{m_x - m_f}{m_o - m_f} \cdots$ $TR :: xvap(v, v_f, v_g)$

2-Phasenraum: $v(x,T) = x \cdot v_a(T) + (1-x) \cdot v_f(T)$

Linear Interpolieren: $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1 \ TR :: ipl(x_1, x, x_2, y_1, y_2)$

DIE IDEALE GASGLEICHUNG

$$pv = RT$$
 $pV = mRT$ $pV = n\overline{R}T$

$$p = \rho RT$$
 $\rho = \frac{1}{v}$ $R = \frac{\bar{R}}{M}$ $U = U(T)$ $c_p - c_v = R$

IDEALE GASE: POLYTROPE ZUSTANDSÄNDERUNGEN

$$p \cdot V^n = konst$$
 $\frac{T_2}{T_1} = (\frac{p_2}{p_1})^{n-1/n} = (\frac{V_1}{V_2})^{n-1}$ $W = \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV$

n: Polytropenkoeffizient

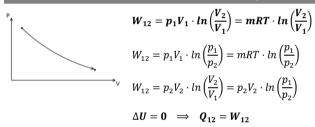
Für ideale Gase gilt: u(T), h(T)

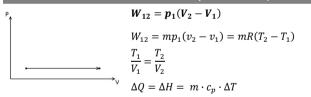


↑ Folgende Formeln gelten nur für ideale Gase

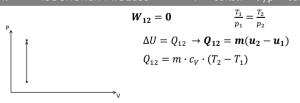
n=1 ISOTHERMER PROZESS

SS
$$T = const. \rightarrow p \cdot V = const.$$





$n = \infty$ ISOCHORER PROZESS



ISENTHALPER PROZESS

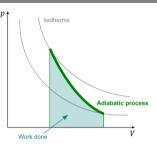
$H = const. \rightarrow U + p \cdot V = const.$

$$\Delta H = \mathbf{0} \rightarrow H_1 = H_2$$

$$dH = d(U + pV) = dU + d(pV) = mc_V dT + mRdT = mc_p dT$$

$$dH = 0 = mc_p dT \rightarrow dT = 0 \implies \text{im idealen Gas auf der Isothermen!}$$

$n = \kappa$ ISENTROPER PROZESS



Isentrop = adiabatisch und reversibel

$$n=\kappa=\frac{c_p}{c_n}$$

 $Q_{12} = 0$

 $p \cdot V^{\kappa} = const.$

 $T \cdot V^{\kappa-1} = const.$

 $p^{1-\kappa} \cdot T^{\kappa} = const.$

 $\Delta U = -W_{12} \rightarrow W_{12} = U_1 - U_2$

 $W_{12}=m\cdot(u_1-u_2)$

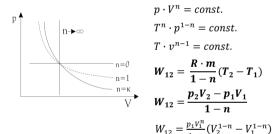
 $W_{12} = m \cdot c_V \cdot (T_1 - T_2)$

 $W_{12} = \frac{m \cdot R}{\kappa - 1} \cdot (T_1 - T_2)$

 $W_{12} = \frac{p_1 V_1^{\kappa}}{1 \cdot 1 \cdot 1} \cdot \left[V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa} \right]$

 $W_{12} = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa} \cdot \left[\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1 - \kappa}{\kappa}} - 1 \right]$

ALLGEMEINER PROZESS



REALE GASE: POLYTROPE ZUSTANDSÄNDERUNGEN

Allgemein: $\Delta U = m(u_2 - u_1) = m(c_{v_2}T_2 - uc_{v_1}T_1)$

 $\Delta U = O - W \iff W = O - \Delta U$ Isotherm:

Isobar: $W_{12} = p_1(V_2 - V_1) = mp_1(v_2 - v_1)$

Isochor: $W_{12} = 0$ Isentrop/adiabat: $\Delta Q = 0$

THERMODYNAMISCHE ZUSTANDSDATEN

Enthalpie (Wärmefunktion)
$$H = U + pV$$
 $h = \frac{H}{H} = u + pV$

pV ist die Arbeit die nötig ist um das Volumen V des Systems gegen die Wirkung des Aussendrucks p aufzuspannen.

Verdampfungsenthalpie $h_{fa} = h_a - h_f$ Energie die nötig ist um ein Fluid unter konst. Druck und Temp gasförmig zu machen.

Wärmemenge

$$\triangle Q = m \cdot c \cdot \triangle T$$

Spezifische Wärmekapazität c Energie die nötig ist um 1kg der Masse um 1K zu erwärmen. Man unterscheidet zwischen c_n und c_n :

• Wärmezufuhr bei konstantem Volumen (isochore Wärmekap.)

 $c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_v \quad \left[\frac{kJ}{k\sigma v}\right]$

(Verwenden in Verbindung mit u)

$$du = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{v}}_{c_{n}} dT + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_{T} dv \xrightarrow{bet dv = 0} du = c_{v} dT$$

• Wärmekapazität bei konstantem Druck (isobare Wärmekap.)

 $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p \quad \left[\frac{kJ}{kg \, \nu}\right]$

(Verwenden in Verbindung mit h)

$$dh = \underbrace{(\frac{\partial h}{\partial T})_p}_{c_p} \ dT + \ (\frac{\partial h}{\partial p})_T \ dp \ \stackrel{bei \ dp=0}{\longrightarrow} \ dh = c_p \ dT$$

$$z(x,y) \stackrel{dt}{\to} dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y} dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x} dy \qquad \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y}\right]_{x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x}\right]_{y}$$

$$\text{Mit } \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z} = 1 \text{ und } \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_{x} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y} \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_{z} = -1$$

MAXWELL'SCHE GLEICHUNGEN DER THERMODYNAMIK

Aus 1. & 2. HS \Rightarrow $du = T \cdot ds - p \cdot dv$ (1) $dh = T \cdot ds + v \cdot dp$ (2)

Freie Enthalpie (nach Gibbs) $g = h - T \cdot s \stackrel{dt}{\rightarrow} dg = dh - T ds - s dT$

- Mit $G = H - T \cdot S = U + p \cdot V - T \cdot S$

- $\Delta G < 0 \rightarrow$ exergon, spontan

- $\Delta G = 0$ \rightarrow Gleichgewichtszustand

- $\Delta G > 0 \rightarrow$ endergon, nicht spontan

Freie Energie (nach Helmholz) $\psi = u - T \cdot s \stackrel{dt}{\rightarrow} d\psi = du - T ds - s dT$

Mit (1) & (2)
$$\Rightarrow$$

$$\frac{d\psi = -p \cdot dv - s \cdot dT}{dg = v \cdot dp - s \cdot dT}$$
 (4)

VERMISCHUNG

Bei der Vermischung zweier Tanks können folgende Vereinfachungen getroffen werden:

• PE = 0 , KE = 0wenn nicht besondere Situation

• 0 = 0falls adiabat

• W = 0 falls keine Volumenausdehnung

Sind alle diese Bedingungen erfüllt, gilt

$$Q - W = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE \rightarrow \Delta U = 0$$

Wird geheizt/gekühlt, d.h. ist das System nicht mehr adiabat, gilt

$$Q - W = \Delta U + \Delta KE + \Delta PE \quad \rightarrow \quad \Delta \boldsymbol{U} = \boldsymbol{Q}$$

1. HAUPTSATZ IN OFFENEN SYSTEMEN

Der Massenstrom über die Systemgrenze und die damit verbundenen Energieströme werden in die Energiebilanz mit einbezogen.

MASSENSTROMBILANZ

$\frac{dM_S}{dt} = \sum \dot{m}_{i=inlet} - \sum \dot{m}_{e=exit}$	$ ightharpoonup \sum \dot{m}_i = \sum \dot{m}_e$
--	--

In Integral form: $\frac{d}{dt} \Bigl(\int_V \rho dV \Bigr) + \int_A \rho (\overrightarrow{w} \cdot d\overrightarrow{A}) = 0$

In differentieller Form: $div(p \cdot \vec{w}) = 0 \Rightarrow$ quellenfrei

ENERGIESTROM-BILANZ

Energiezunahme = Energiezunahme durch Wärme und Arbeit + Energie der Eintretenden Masse – Energie der austretenden Masse.

Die Arbeit wird dabei in zwei Komponenten zerlegt:

- (1) Anteil der nicht mit Massenstrom über Systemgrenze verbunden ist. z.B. Bewegliche Kolben oder elektrische Flüsse $\rightarrow W_s$ gewünschte Arbeit.
- (2) Notwendige Arbeit zum Ein- und Ausschieben des bewegten Fluids. Einschiebeleistung: $\dot{W}_i = p_i A_i w_i$ Ausschiebeleistung: \dot{W}_e

$$\frac{dE_s}{dt} = \dot{Q} - \dot{W}_s + \sum \dot{m}_i (h_i + \frac{w_i^2}{2} + gz_i) - \sum \dot{m}_e (h_e + \frac{w_e^2}{2} + gz_e)$$

- h = u + pv Enthalpie; $\frac{w^2}{2}$ kinetische Energie; gz potentielle Energie
- $\Delta E = \Delta U = m_2 u_2 m_1 u_1$ wenn KE, PE vernachlässigt werden.

- stationär:
$$\frac{dE_s}{dt} = 0 , \dot{m}_i = \dot{m}_e \implies \dot{Q} - \dot{W}_s = \dot{m} \cdot \left[h_e - h_i + \frac{1}{2} \cdot \left(w_e^2 - w_i^2 \right) + g \cdot (z_e - z_i) \right]$$

- isoliert: $\dot{Q} = 0$
- **keine Arbeit:** $\dot{W}_s = \mathbf{0}$ (z.B. beim Wärmetauscher)
- 3-d: $\dot{m}=\dot{V}/_{V}=\rho\dot{V}$ beim idealen Gas: $\dot{m}=\frac{p\dot{V}}{RT}$
- 1-d: $\dot{m} = \dot{V}/v = Aw/v$ beim idealen Gas: $\dot{m} = \frac{pAw}{RT}$

DÜSE UND DIFFUSOR

 Düse (Nozzle) Eine Düse ist eine Verengung in einer Strömung. Die Enthalpie des Fluids wird in kinetische Energie umgewandelt (Beschleunigung).

$$w_2 > w_1 \qquad p_2 < p_1 \qquad h_2 < h$$

Bsp. stationär ($\dot{E}=0$), isoliert ($\dot{Q}=0$), Arbeit wird keine abgegeben ($\dot{W}_{\rm S}=0$), pot. Energie wird vernachlässigt.

$$h_1 + \frac{w_1^2}{2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} = const.$$
 Interpretation: $w \uparrow h \downarrow u const., p \downarrow$

Diffusor (Diffuser) Ein Diffusor ist eine Erweiterung in einer Strömung.
 Anwendungsbeispiel ist ein Überschallflugzeug, wo die Luft auf
 Geschwindigkeit unter M=1 abgebremst werden muss.

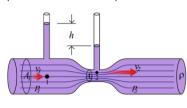
Umgekehrter Vorgang wie Düse: $w_2 < w_1 \quad p_2 > p_1 \quad h_2 > h_1$

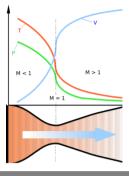
Isentroper Düsenwirkungsgrad

$$\eta_{D,s} = \frac{w_2^2}{w_{2,max}^2} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2,s} - h_1}$$
 (falls adiabat) \rightarrow tatsächliches h_2

↓ Ventouri – Düse für den Unterschallbereich

→ Laval – Düse für den Überschallbereich (Mach-Zahl beim Austritt > 1)





TURBIN

Gas durchströmt die Turbine und wird dabei von einem hohen Druckniveau auf ein tiefes entspannt. Dabei wird Arbeit geleistet.

Bsp
$$\dot{E}=0$$
, $E_{pot}=0 \rightarrow 0 = -\dot{W_S} + \dot{Q} + \dot{m} \left(h_1 + \frac{w_1^2}{2}\right) - \dot{m} \left(h_2 + \frac{w_2^2}{2}\right)$
 $h_{1,2}$ lassen sich aus Tabellen ablesen. 2. Zustand ev. im 2 Phasengebiet.

 $h_{1,2}$ lassen sich aus Tabellen ablesen. 2. Zustand ev. im 2 Phasengebiet. Bei Kraftwerken soll w_2 möglichst klein sein, bei Jet – Turbinen soll der Rückstoss möglichst gross sein.

Isentroper Turbinenwirkungsgrad $\eta_{T,s} = \frac{\dot{W}}{\dot{W}_{rev}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_2 s}$ (falls adiabat)

KOMPRESSOR / PUMPE

- Kompressor: Durch aufwenden von Arbeit wird Druck des Fluids erhäht.
- Pumpe: Durch aufwenden von Arbeit wird ein Massenstrom erzeugt, bei möglichst geringem Druckanstieg.
- isentrop & inkompressibel: $h_{2,s} h_1 = v\Delta p$
- Isentroper Kompressorwirkungsgrad Vergleich der isentrop minimal aufzuwendenden Arbeit mit realer Arbeit: $\eta_{K,s}=rac{\dot{w}_{rev}}{\dot{w}}=rac{h_{1-}h_{2,s}}{h_{1}-h_{2}}$

WÄRMEÜBERTRAGER

Bei Durchströmung soll möglichst viel Wärme aufgenommen/abgegeben werden. Arbeit wird keine geleistet, $\dot{W}_{s}=0$. Wärmetransport mit Umgebung meist vernachlässigbar, $\dot{Q}=0$.

wenn ΔKE und $\Delta PE \approx 0 \implies \mathbf{0} = \dot{m}_1(h_2 - h_1) + \dot{m}_3(h_4 - h_3)$



DROSSELELEMENTE (THROTTLING DEVICES)

In der Drossel wird ein Fluid entspannt. Bsp.: Kompressionswärmepumpen und –kältemaschinen

$$\implies p_2 < p_1 \qquad W_{12} = 0 \qquad Q_{12} = 0 \qquad h_1 = h_2$$

ISENTROPE ENTSPANNUNG IN EINER TURBINE 1

stationäres System, ohne Änderung der KE und PE, überhitztes Gebiet:

$$-\dot{W}_{s} = \dot{m} \cdot [h_{e} - h_{i}] \implies \dot{W}_{s} = \dot{m} \cdot [h_{i} - h_{e}] \implies \dot{W}_{s} = \dot{m} \cdot [h_{1} - h_{2}]$$

Gegeben: $\dot{m}, p_1, p_2, T_1, h_1, s_1$ Gesucht: $T_2, h_2 \Rightarrow \dot{W}_s$

Vorgehen: -S = const.

- in Tabelle A-4 bei p_2 , $S_2 \ \Rightarrow \ T_2$, h_2 finden
- nun mit h_1 , $h_2 \Longrightarrow \dot{W}_s$ finden

ISENTROPE ENTSPANNUNG IN EINER TURBINE 2

stationäres System, ohne Änderung der KE und PE, 2-Phasen Gebiet:

$$-\dot{W}_s = \dot{m} \cdot [h_e - h_i] \implies \dot{W}_s = \dot{m} \cdot [h_i - h_e] \implies \dot{W}_s = \dot{m} \cdot [h_1 - h_2]$$

Gegeben: \dot{m} , p_1 , p_2 , T_1 , h_1 , s_1

Gesucht: $T_2, h_2 \Rightarrow \dot{W}_s$

Vorgehen: - in Tabelle A-3: nach s_f , s_q suchen.

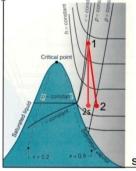
- aus xvap $(s, s_f, s_g) = x_2$ berechnen. $\Rightarrow h_2, T_2$
- nun mit $h_1, h_2 \Longrightarrow \dot{W}_s$ finden

ADIABATE IRREVERSIBLE ENTSPANNUNG TURBINE 1

Wie Bsp. isentrop, aber neu irreversibel mit $\eta_{T,s} = 0,9$

Vorgehen:

- i. Punkt 2_S finden: Vorgehen wie wenn reversibel $\Rightarrow T_2, h_{2,S}$
- ii. $\Delta h_{rev} = h_{2,S} h_1$
- iii. $\Delta h_{irr} = \eta_{T,s}(h_{2,s} h_1)$
- iv. $\Delta h_{irr} = h_2 h_1$ v. $h_2 = \Delta h_{irr} + h_1$
- v. $h_2 = \Delta h_{iri}$ vi. $h_2 > h_{2.S}$
- vii. Mit h_2 , T_2 ist der Zustand bekannt, aus der Tabelle können alle geforderten Werte herausgelesen werden.



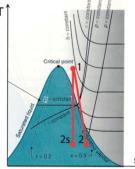
- viii. $\dot{W}_{s,irr} = \dot{m} \cdot [\dot{h}_1 h_2]$ oder auch mit $\dot{W}_{s,irr} = \dot{W}_{s,rev} \cdot \eta_{T,s}$
- ix. im h-s Diagramm ersichtlich: $h_2>h_{2,S}$ die Punkte 2 und $2_{\rm S}$ liegen beide auf ${\rm p}_2$.

ADIABATE IRREVERSIBLE ENTSPANNUNG TURBINE 2

Wie Bsp. isentrop, aber neu irreversibel mit $\eta_{T,s} = 0,9$

Vorgehen:

- i. Punkt 2_s finden: Vorgehen wie wenn reversibel $\Rightarrow x_{2,S} \Rightarrow h_{2,S}, T_2$
- ii. $\dot{W}_{s,irr} = \dot{W}_{s,rev} \cdot \eta_{T,s}$
- iii. $h_2 = \Delta h_{irr} + h_1$
- iv. Check $h_2 < , > h_{2,g}$
- v. Falls $h_2 > h_{2,g}$ $\text{mit } h_2, T_2 \Longrightarrow \text{alle Werte}$
- vi. Falls $h_2 < h_{2,g}$ mit $h_2, T_2 \Longrightarrow x_2$ mit $h_2, x_2 \Longrightarrow$ alle Werte



 $\stackrel{\smile}{\rightarrow}$

2. HAUPTSATZ DER THERMODYNAMIK

Bedeutung:

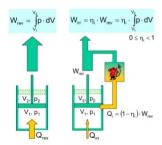
- Wärme kann nicht von selbst (spontan) von einem Körper mit tieferer Temperatur auf einen Körper mit höherer Temperatur übertragen werden. (Clausius).
- Ein Kreisprozess kann zugeführe Wärme nicht zu 100% in Arbeit umwandeln. Es gibt immer Abwärme (Kelvin-Planck).
- Der Thermodynamische Teufel ist unfähig, er kann nur Arbeit in Wärme, aber nicht Wärme in Arbeit umwandeln.

REVERSIBLE UND IRREVERSIBLE PROZESSE

Reversibel d.h. umkehrbar, ist ein Prozess wenn der Ausgangszustand im System und der Umgebung wieder hergestellt werden kann. Die Arbeit um das System wieder in den Ausgangszustand zu bringen soll also ohne Verlust gespeichert werden. Abgeführe Temperatur müsste bei der gleichen Temperatur gespeichert werden. Praktisch nicht möglich. Irreversibel d.h. unumkehrbar, sind Prozesse, wenn sie irreversible Teilprozesse enthalten z.B.:

- Wärmeübertragung
- Reibung
- Expansion zu tieferem Druck. thermodynamischen Ungleichgewicht
- Vermischung Stoffe unterschiedlicher Temperaturen
- spontane chemische Reaktionen

REVERSIBLE VS. IRREVERSIBLE EXPANSION



$$|W_{rev}| > |W_{irr}|$$

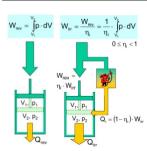
 $\Delta U_{rev} = \Delta U_{irr}$
 $|Q_{rev}| > |Q_{irr}|$

Der Teufel bremst die Expansion: es wird weniger Arbeit geleistet, es muss dafür aber auch weniger Wärme zugeführt werden.



Irreversibilität im p-v Diagramm nicht zu erkennen

REVERSIBLE VS. IRREVERSIBLE KOMPRESSION



$$|W_{rev}| < |W_{irr}|$$

 $\Delta U_{rev} = \Delta U_{irr}$

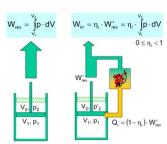
$$\Delta \boldsymbol{U}_{rev} = \Delta \boldsymbol{U}_{ir}$$

$$|\boldsymbol{Q}_{rev}| < |\boldsymbol{Q}_{irr}|$$

Der Teufel bremst die Kompression; es muss mehr Arbeit geleistet werden, mehr Wärme wird frei.

Irreversibilität im p-v Diagramm nicht zu erkennen

REVERSIBLE VS. IRREVERSIBLE ADIABATISCHE EXPANSION

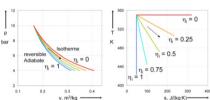


$$|W_{rev}| > |W_{irr}|$$
 $|\Delta U_{rev}| > |\Delta U_{irr}|$
 $|O_{rev}| = |O_{irr}| = 0$

Der Teufel bremst die Expansion; es wird weniger Arbeit geleistet. Wärme rückgeführt. Abnahme der inneren Energie geringer.



Irreversibilität im p-v Diagramm erkennbar.



$$p \cdot V^{\eta_i(\kappa-1)+1} = const.$$

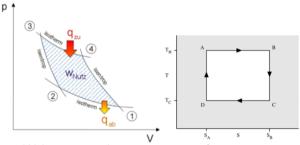
$$c_v \cdot \ln(\frac{T}{T_0}) + \eta_i \cdot R \cdot \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = 0$$

$$s = c_v \cdot \ln(\frac{T}{T_0}) + R \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) + s_0$$

$$\Delta s = \left(1 - \frac{1}{\eta_i}\right) c_V \ln \frac{T}{T_0}$$

DER CARNOT KREISPROZESS

Der Carnot Prozess ist ein idealisierter reversibler Kreisprozess. Er dient zur Definition der theoretisch maximalen umsetzbaren Wärmemenge in Arbeit



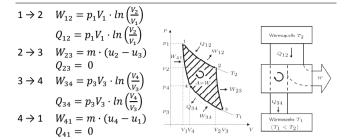
Die Abblidungen zeigen den Carnot-Wärme-Kraft-Prozess im p-V -Diagramm links und im T-S – Diagramm rechts. (1=C, 2=D, 3=A, 4=B)

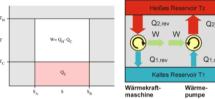
- **1-2:** Isotherm Komprimieren: W_{12} wird aufgewendet. Da isotherme Reaktion geht Wärme Qah an kaltes Reservoir.
- 2-3: Adiabatisch Komprimieren: Arbeit wird hineingesteckt, die Temperatur steigt. Es findet kein Wärmeaustausch statt. Entropie konstant.
- 3-4: Isotherm Expandieren: Das System leistet Arbeit W₃₄. Da isotherme Reaktion muss Wärme Qzu dazukommen
- 4-1: Adiabatisch Expandieren: Es wird Arbeit geleistet. Entropie konstant.

Beim idealen Gas: 1-2: Q=W. 2-3: Q=0. 3-4: Q=W. 4-1: Q=0

WÄRME-KRAFT-PROZESS

Carnot Prozess im Uhrzeigersinn. Der Prozess liefert Arbeit. Wärme aus dem heissen Reservoir und Abwärme an das kalte Reservoir.





 \uparrow Das linke Bild zeigt den Wärme-Kraft – Prozess im UZS, die Differenz aus Q_H und O_C ist gerade die geleistete Arbeit.

→ Das rechte Bild zeigt den Wärme-Kraft – Prozess links und den Kältemaschinen – Prozess rechts. Links wird "die Wärme in Arbeit umgewandelt"; rechts wird "die Arbeit in Kälte umgewandelt".

KÄLTEMASCHINEN- UND WÄRMEPUMPENPROZESS

Carnot Prozess im Gegenuhrzeigersinn. Es muss Arbeit hineingesteckt werden um Wärme aus dem kalten Reservoir an das Heisse abzugeben.

• Kältemaschine Nutzen ist dem kalten Reservoir abgeführte Wärme: Leistungsziffer wenn reversibel $arepsilon_k = arepsilon_{k,max} = rac{arepsilon_k}{T_H - T_C}$

• Wärmepumpe Nutzen ist dem warmen Reservoir zugeführe Wärme:

Leistungsziffer
$$\varepsilon_{w} = \frac{Q_{xu}}{-W_{S}} = \frac{Q_{H}}{-W_{S}} = \frac{Q_{H}}{Q_{H}-Q_{C}}$$
wenn reversibel $\varepsilon_{w} = \varepsilon_{w,max} = 1 + \frac{T_{C}}{T_{H}-T_{C}} = 1 + \varepsilon_{k}$

DER THERMISCHE WIRKUNGSGRAD

ALLGEMEIN

Der thermische Wirkungsgrad ist das Verhältnis zwischen Nutzen, meist mechanische Arbeit, und aufgewendeter Energie, meist Wärme.

$$\eta_{th} = \frac{Nuzten}{Aufwand} = \frac{W_{nutz}}{Q_{zu}}$$

Für Kreisprozesse: $Q_{KP} = W_{KP}$, $\Delta U = 0$

$$\Rightarrow \eta_{th} = \frac{W_{nutz}}{Q_{zu}} = \frac{Q_{zu} - Q_{ab}}{Q_{zu}} = 1 - \frac{Q_{ab}}{Q_{zu}} = 1 - \frac{Q_C}{Q_H}$$

Einige Wirkungsgrade realer Kreisprozesse						
Kombikraftwerk	50-60%	Windkraftwerk	Bis 50%	Elektromotor	20-99%	
Leichtwassereaktor	30-40%	Brennstoffzelle	20-70%	Glühlampe	3-5%	
Solarzelle	5-25%	Dieselmotor	Bis 45%	LED	5-25%	
Kohlekraftwerk 25-50% Ot		Ottomotor	Bis 37%	Lautsprecher	0.3%	
Wasserkraftwerk	80-95%	Turbinentriebwerk	40%			

WIRKUNGSGRAD DES CARNOT PROZESSES

Wäre T_c/T_u gerade null, so wäre der Wirkungsgrad gerade 1. Aber aus dem 2. Hauptsatz folgt, dass zwingend ein Teil der zugeführen Wärmemenge an das kalte Reservoir abgegeben werden muss: $\eta_c < 1$. Der Carnot Wirkungsgrad ist der höchst mögliche Umwandlungsgrad von Q in W. Er geht mit mit steigender Temperatur $T_H \to \infty$ oder mit $T_C = 0$ gegen 1. $(T_H = 1500K, T_C = T_0 \rightarrow \eta_C \approx 0.75)$

$$\eta_c = \frac{Nutzen}{Aufwand} = \frac{W}{Q} = 1 - \frac{Q_{ab}}{Q_{zu}} = 1 - \frac{T_C}{T_H}$$
 $\frac{Q_C}{Q_H} = \frac{T_C}{T_H}$ (reversibel)

Der thermische Wirkungsgrad eines irreversiblen Wärmekraftprozesses ist immer geringer als derienige eines reversiblen.

WIRKUNGSGRAD ISENTROPE PROZESSE

reversibel – keine Dissipation – kein Wärmetransport – adiabat

Isentroper Düsenwirkungsgrad

$$\eta_{D,s} = \frac{w_2^2}{w_{2,max}^2} = \frac{h_2 - h_1}{h_{2,s} - h_1}
\eta_{T,s} = \frac{\ddot{W}}{\dot{W}_{rev}} = \frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_{2,s}}
\eta_{K,s} = \frac{\dot{W}_{rev}}{\dot{W}} = \frac{h_1 - h_{2,s}}{h_1 - h_2}$$

Isentroper Turbinenwirkungsgrad

$$\eta_{T,c} = \frac{W}{W} = \frac{h_1 - h_2}{W}$$

$$\dot{W}_{rev}$$
 $h_1 - h_{2,s}$ \dot{W}_{rev} $h_1 h_2 s$

Isentroper Kompressorwirkungsgrad

$$\eta_{Ks} = \frac{\dot{W}_{rev}}{\dot{\psi}_{rev}} = \frac{h_1 - h_{2,s}}{\dot{\psi}_{rev}}$$

inkompressibel, T=const $\Rightarrow \Delta h = h_2 - h_1 = v(p_2 - p_1)$

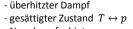
ENTROPIE

Die Entropie S ist ein Mass für die Unordnung im System.

$$S_y = S_x + \int_x^y \frac{dQ_{rev}}{T_G}$$
 $\left[\frac{kJ}{K}\right]$

Ein Prozess wird spontan immer in der Richtung ablaufen, dass die Entropie zunimmt. Die Entropie ist ein Mass für die Irreversibilität.

isentrop d.h. ds = 0 ist ein Prozess, wenn kein Wärmeaustausch stattfindet (adiabat) und der Prozess reversibel ist.

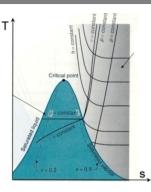


$$s(T,p)$$

 $s(T)bzw.s(p)$

$$s(T, p) \approx s(T)$$
 inkmprssibel

T-S - DIAGRAMM



Im Nassdampfgebiet gilt: $s = x \cdot s_a + (1 - x) \cdot s_f$

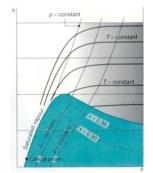
Im Gebiet der unterkühlten

Flüssigkeit gilt: s(T,p) = s(T)

Im grau schattierten Bereich gilt: $h(T, p) \approx h(T)$

Dort sind die Molekülabstände gross, die Drücke daher klein und zu vernachlässigen, womit die Enthalpie nur noch eine Funktion der Temperatur sind.

H-S – DIAGRAMM AKA MOLLIER - DIAGRAMM



Position des kritischen Punktes beachten!

Im Nassdampfgebiet gilt:

$$h = x \cdot h_g + (1 - x) \cdot h_f$$

Im grau schattierten Bereich verlaufen die Isothermen horizontal, somit ist die Temperatur dort nicht mehr von der Entropie abhängig, sondern alleine von der Enthalpie.

TdS GLEICHUNGEN

Die TdS Gleichungen stellen Beziehungen der verschiedenen Grössen der Thermodynamik her. Auch 1. Hauptsatz in Differentialen:

$$T \cdot dS = dU + pdV$$

$$T \cdot dS = dH - Vdp$$

$$T \cdot ds = du + pdv$$

$$T \cdot ds = dh - vdp$$

$$T \cdot d\bar{s} = d\bar{u} + pd\bar{v}$$

$$T \cdot d\bar{s} = d\bar{h} - \bar{v}dp$$

Gilt für reversible und irreversible Prozesse.

Bei Verdampfung/Kondensation gilt: $p = const. \implies T \cdot ds = dh$ Aus der Integration (T=const.) folgt $T \cdot (s_q - s_f) = (h_q - h_f)$

CLAUSIUS UNGLEICHUNG

 $\begin{array}{ll} \text{Entropiezuwachs:} & \Delta \, S = \frac{\triangle Q}{T_G} = S_2 - S_1 \\ \text{Clausius:} & \oint \frac{\delta Q}{T_G} = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C} \leq \mathbf{0} \\ \text{für Carnot-Prozess:} & \oint \frac{\delta Q}{T_G} = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_C}{T_C} = \Delta \, S_{zu} - \Delta \, S_{ab} = \mathbf{0} \end{array}$

 $\oint \frac{\delta Q}{x}$: Umlaufintegral über Kreisprozess. Q: zugeführte Wärmemenge. T: absolute Temperatur an Systemgrenze wo Wärme übertragen wird, d.h. Temperatur des Reservoirs, gegen das gearbeitet wird.

ENTROPIEÄNDERUNG IDEALER GASE

· Allgemein:

$$\begin{aligned} & \text{Air (A-22):} \quad s(T_2, p_2) - s(T_1, p_1) = s^0(T_2) - s^0(T_1) - R \cdot \ln{(\frac{p_2}{p_1})} \\ & \text{else (A-23ff):} \quad \overline{s}(T_2, p_2) - \overline{s}(T_1, p_1) = \overline{s}^0(T_2) - \overline{s}^0(T_1) - \overline{R} \cdot \ln{(\frac{p_2}{p_1})} \end{aligned}$$

 s^0 für einen Referenzdruck, $R \ln \left(\frac{p_2}{r}\right)$ ist dann der Druckkorrekturterm

• c = const. \Rightarrow $s^0(T, p) = c_p(T) \cdot \ln\left(\frac{T}{T}\right)$

(T,p):
$$s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right) - R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$
(T,v):
$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \left(\frac{r_2}{r_1}\right) - R \cdot \ln \left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

• Isothremer Prozess: $s^0(T_2) - s^0(T_1) = 0 \xrightarrow{yields} s_2 - s_1 = R \cdot \ln \left(\frac{p_2}{p_2}\right)$

ISENTROPER PROZESS BEIM IDEALEN GAS

$$\begin{split} s_2 - s_1 &= 0 \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad c_p = c_v + R \quad \rightarrow \quad c_p = R \cdot \frac{\kappa}{\kappa - 1}, \quad c_v = R \cdot \frac{1}{\kappa - 1} \\ &\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1 - \kappa} \quad \text{und} \quad \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\kappa} \quad \text{(siehe auch p. 2)} \end{split}$$

ENTROPIEÄNDERUNG INKOMPRESSIBLER STOFFE

• v = const. \Rightarrow

 $s_2 - s_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c(T)}{T} dt$

• v, c = const. $\Rightarrow c_p = c_v = c$ $\Rightarrow s_2 - s_1 = c \ln \left(\frac{r_2}{r_*}\right)$

ENTROPIEBILANZ FÜR GESCHLOSSENE SYSTEME

$$S_{erz} = S_2 - S_1 - \sum_{T_G} \frac{Q}{T_G} [kJ/kgK] \qquad \qquad \dot{S}_{erz} = \dot{S} - \sum_{T_G} \frac{\dot{Q}}{T_G} [kW/kgK]$$

- stationärer Prozess: $\Delta S = S_2 S_1 = 0$
- Kreisprozess Zustand ist am Ende wieder der selbe $S_{erz,KP} = -\sum \frac{Q}{T_c}$
- reversibler Prozess: $S_{erz} = 0$ $dS = \frac{dQ}{T}$

T_G: Temp. an Grenze der Wärmeübertragung

ullet Entropie Produktion S_{erz} bei nicht reversiblen Prozessen.

 S_{erz} ist keine Zustandsgrösse! Im realen Kreisprozess wird Entropie erzeugt, die Entropie S hat jedoch nach jedem Zyklus wieder den selben Wert.

ENTROPIEBILANZ FÜR OFFENE SYSTEME

$$\underbrace{\dot{S}_{erz}}_{1} = \underbrace{\dot{S}}_{2} - \underbrace{\sum \frac{\dot{Q}}{r_{c}}}_{3} + \underbrace{\sum \dot{m}_{e} s_{e}}_{4} - \underbrace{\sum \dot{m}_{i} s_{i}}_{5}$$

- Erzeugungsrate im System
- Zunahme des Entropieinhaltes des Systems
- Entropietransport über Systemgrenze per Wärmeleitung
- Mit Masse ausströmender Entropiestrom
- Mit Masse einströmender Entropiestrom
- stationärer Prozess , 1 Massenstrom: $\dot{S}_{erz} = -\sum \frac{Q}{T_C} + \dot{m}(s_e s_i)$

STATIONÄRE INTERN REVERSIBLE PROZESSE

- Entropiebilanz für offene Systeme mit $\frac{\partial}{\partial t}=0$, $\dot{m}_e=\dot{m}_i$, $\dot{S}_{erz}=0$: $0=-\sum\frac{\dot{Q}}{T_C}+\dot{m}\cdot(s_2-s_1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\dot{Q}_{rev}}{\dot{m}}=\int_1^2 T ds$
- $\bullet \ \ \text{1. HS mit} \ \frac{dE_S}{dt} = 0 \ \text{und} \ \frac{\dot{Q}_{rev}}{m} = \int_1^2 T ds \frac{T ds = dh v dp}{h} \ h_2 h_1 \int_1^2 v \ dp :$

$$\frac{\dot{W}_{rev}}{\dot{m}} = -\int_{1}^{2} v \, dp - \frac{w_{2}^{2} - w_{1}^{2}}{2} - g(z_{2} - z_{1})$$

- Berechnung des Integrals $-\int_1^2 v\ dp \quad \text{mit} \quad p\cdot v^n = const.$ n=1 (isotherm): $-\int_1^2 v\ dp = -\underbrace{p_1 v_1}_{const.} \ln \frac{p_2}{p_1} \underbrace{\longrightarrow}_{ideales\ Gas} -RT_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$ n≠1 (polytrop): $-\int_1^2 v\ dp = -\frac{n}{n-1} (p_2 v_2 p_1 v_1) \underset{id}{\Rightarrow} -\frac{n}{n-1} R(T_2 T_1)$
- In Düsen/Diffusoren: $\dot{W}_{rev}=0$ folgt der stationäre Bernoulli $\int_{1}^{2}v\ dp+\frac{w_{2}^{2}-w_{1}^{2}}{2}+g(z_{2}-z_{1})=0\xrightarrow{\mathrm{inkompr.}}\frac{p}{\rho}+\frac{w_{2}^{2}}{2}+gz=const.$
- Für isotherme Prozesse gilt auch (mit $v\ dp = dh T\ ds$) $\frac{w_{rev}}{m} = T(s_2 s_1) (p_2 \frac{v_2}{m} p_1 \frac{v_1}{m}) \frac{w_2^2 w_1^2}{2} g(z_2 z_1)$

EXERGIE

Exergie ist ein Mass für die vorhandene Arbeitsmöglichkeit der Energie. Es ist der Anteil des Energieinhaltes eines Systems, der maximal mittels eines reversiblen Prozesses in Arbeit umgewandelt werden kann.

Anergie ist der Energieanteil, der nach dem Erreichen des Gleichgewichtes im System zurückbleibt und nicht mehr in Arbeit umgewandelt werden kann.

Die Exergie eines isolierten, geschlossenen Systems kann nur abnehmen. Zum Beispiel wird im System Motor und Umgebung bei der Verbrennung keine Energie, wohl aber Exergie verbraucht.

EXERGIE FÜR GESCHLOSSENE SYSTEME

$$\begin{split} E_x &= U - U_0 + p_0(V - V_0) - T_0(S - S_0) + KE + PE \\ e_x &= u - u_0 + p_0(v - v_0) - T_0(s - s_0) + ke + pe \end{split}$$
 mit $KE = \frac{mw^2}{2}$, $PE = mgz$, $ke = \frac{w^2}{2}$, $pe = gz$

EXERGIEDIFFERENZ FÜR GESCHLOSSENE SYSTEME

$$\Delta E_x = E_{x,2} - E_{x,1} = \Delta U + p_0(V_2 - V_1) - T_0(S_2 - S_1) + \Delta KE + \Delta PE$$

$$\Delta e_x = e_{x,2} - e_{x,1} = \Delta U + p_0(V_2 - V_1) - T_0(S_2 - S_1) + \Delta ke + \Delta pe$$

EXERGIE FÜR OFFENE SYSTEME

$$\dot{E}_{x,str} = \dot{m}[(h - h_0) - T_0(s - s_0) + ke + pe]$$

$$e_{x,str} = (h - h_0) - T_0(s - s_0) + ke + pe$$

EXERGIEDIFFERENZ FÜR OFFENE SYSTEME

$$\Delta \ \, \dot{E}_{x,str} = \dot{E}_{x,str,2} - \dot{E}_{x,str,1} = \dot{m}[(h_2 - h_1) - T_0(s_2 - s_1) + \Delta ke + \Delta pe] \\ \Delta \ \, e_{x,str} = e_{x,str,2} - e_{x,str,1} = (h_2 - h_1) - T_0(s_2 - s_1) + \Delta ke + \Delta pe$$

EXERGIEVERLUST :: GOUY-STODOLA-THEOREM

Die verlorene Arbeitsmöglichkeit ist die Differenz zwischen der maximal möglichen und der effektiv vorhandenen Arbeitsleistung. Max. verlorene Arbeit kann als Exergieverlust betrachtet werden. Exergie ↔ Entropie

$$E_{x,Verlust} = T_0 \cdot S_{erz} = W_{Verlust} = W_{rev} - W \quad [kJ]$$

EXERGIEBILANZ FÜR GESCHLOSSENE SYSTEME

$$\Delta E_{x} = \underbrace{\int \left(1 - \frac{T_{0}}{T_{G}}\right) \delta Q}_{E_{x,Q}} - \underbrace{\left(W - p_{0} \Delta V\right)}_{E_{x,W}} - \underbrace{T_{0} \cdot S_{erz}}_{E_{x,Verlust}}$$
reversibel

 T_0 : Umgebungstemperatur T_G : Temperatur am Ort der Q-Übertragung

$$\int \left(1 - \frac{\tau_0}{\tau_G}\right) \delta Q = Q_{12} - T_0 \cdot \Delta S = Q_{12} - T_0 \cdot m \cdot \left[s_2^0 - s_1^0 - R \cdot \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]$$

• stationärer Prozess: $\triangle E_r = 0$

• reversibler Prozess: $T_0 \cdot S_{erz} = 0$

• keine Arbeit: $W - p_0 \Delta v = 0$

EXERGIEÄNDERUNGSGESCHWINDIGKEIT

$$\frac{dE_x}{dt} = \dot{E_x} = \sum \left(1 - \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \left(W - p_0 \frac{dV}{dt}\right) - T_0 \cdot \dot{S}_{erz}$$

- Gouy Stodola: $-\frac{dE_{x,irr}}{dt} = E_{x,v} = T_0 \cdot \dot{S}_{erz}$
- Bei Wärmeübergang: stationäres System: $\frac{dE_x}{dt} = 0$, $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}$ keine Arbeit: $W p_0 \frac{dV}{dt} = 0$ $E_{x,v} = T_0 \cdot \dot{S}_{erz} = \sum \left(1 \frac{T_0}{T_i}\right) \dot{Q}_i = \dot{Q} \left(\frac{T_0}{T_1} \frac{T_0}{T_2}\right) \frac{dE_{x,irr}}{dt} = E_{x,v} = T_0 \cdot \dot{S}_{erz} = \dot{Q} \left(\frac{T_0}{T} \frac{T_0}{T}\right)$

EXERGIEBILANZ FÜR OFFENE SYSTEME

$$\begin{split} &\frac{dE_{x}}{dt} = \sum \dot{m_{i}} e_{x,str,i} - \sum \dot{m_{e}} e_{x,str,e} - \left(\dot{W_{s}} - p_{0} \frac{dV}{dt} \right) + \sum \dot{Q}_{i} \left(1 - \frac{T_{0}}{T_{i}} \right) - T_{0} \dot{S}_{erz} \\ &\frac{dE_{x}}{dt} = \sum \dot{m_{i}} \cdot e_{x,str,i} - \sum \dot{m_{e}} \cdot e_{x,str,e} - \dot{W}_{s} + \sum \dot{Q}_{i} \left(1 - \frac{T_{0}}{T_{i}} \right) - T_{0} \cdot \dot{S}_{erz} \end{split}$$

 \uparrow wobei angenommen wurde, dass $\frac{dV}{dt} = 0$

- Jeder Term enthält 100% nutzbare Energie.
- reversibler Prozess: $T_0 \cdot S_{erz} = 0$
- stationär, 1 Massenstrom: $\frac{dE_x}{dt}=0$, $\dot{m_l}=\dot{m_e}=\dot{m}$

$$\sum \left(1 - \frac{T_o}{T_i}\right) \dot{Q}_i - \dot{W}_s - T_0 \dot{S}_{erz} = \dot{m}[h_2 - h_1 - T_0(s_2 - s_1) + \Delta ke + \Delta pe]$$

oder anderst geschrieben: $\sum \left(1 - \frac{T_o}{T_l}\right) \dot{Q}_i - \dot{W}_s - T_o \dot{S}_{erz} = \dot{E}_{x,str,e} - \dot{E}_{x,str,i}$

DER EXERGETISCHE WIRKUNGSGRAD (2ND LAW EFF.)

Der **energetische Wirkungsgrad** η bewertet die Nutzung der Energie in der Quantität, währenddessen der **exergetische Wirkungsgrad** ε die Nutzung der Exergie in der Quantität bewertet – und damit die qualitative Nutzung der Energie beschreibt.

Ganz allgemein gilt: $\varepsilon \uparrow @ \{(T_N - T_0) \uparrow, (T_Q - T_N) \downarrow \}$

- Energetisch: $\eta = \frac{genutzter\ Energiestrom}{zugef\ \"uhrter\ Energiestrom} = \frac{\dot{W}_S}{\dot{Q}_Q} \xrightarrow{\text{bei W\"armestr\"omen}} \frac{\dot{Q}_N}{\dot{Q}_Q}$
- Exergetisch:

$$\varepsilon = \underbrace{\frac{genutzter\ Exergiestrom}{zugefuehrter\ Exergiestrom}}_{ \ \ \ \ \ } \underbrace{\frac{\text{bei\ W\"{a}rmestr\"{o}men}}{\left(1-\frac{T_0}{T_Q}\right)\cdot \dot{Q}_{N}}}_{\left(1-\frac{T_0}{T_Q}\right)\cdot Q_{Q}} = \eta \left(\underbrace{\frac{\left(1-\frac{T_0}{T_N}\right)}{\left(1-\frac{T_0}{T_Q}\right)}}_{\left(1-\frac{T_0}{T_Q}\right)}\right)$$

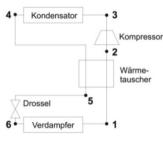
wobei Indizes: Q: Quelle, N: Nutz, 0: Umgebung

- ${}^{\epsilon}/\eta = \frac{1-T_0/T_N}{1-T_0/T_Q}$ $\epsilon \to \eta \equiv E_{x,Verlust} \to 0 \text{ für } T_N \to T_O \equiv S_{erz} \to 0 \text{ oder } T_0 \to 0$
- Bsp.: $\{T_0$ = 0°C , T_Q = 800°C , T_N = 24°C $\}$ \Longrightarrow $\{\eta$ = 90% \to ϵ \cong $\mathbf{10}\%\}$

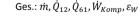
BEISPIELE VON EXERGETISCHEN WIRKUNSGRADEN

- offenes System mit Leistung: $\varepsilon = \frac{\dot{E}_{x,Nutz}}{\dot{m}(e_{x,Str,1} e_{x,Str,2})} = \frac{\dot{E}_{x,Nutz}}{\dot{E}_{x,Nutz} + T_0 \cdot S_{erz}}$
- bei Nutzung der Abwärme $\dot{E}_{x,Nutz} = \dot{Q}_A \cdot \left(1 \frac{T_0}{T_*}\right) + \dot{W}_S$
- ohne Nutzung der Abwärme $\dot{E}_{x,Nutz} = \dot{W}_{S}$
- Turbine: $\varepsilon = \frac{W_S}{m(e_{x,str,1} e_{x,str,2})} = \frac{W_S}{W_S + T_0 \cdot S_{erz}}$
- Pumpe/Kompressor: $\varepsilon = \frac{m(e_{x,str,2} e_{x,str,1})}{\dot{W}_{invest}} = \frac{\dot{W}_{invest} E_{x,v}}{\dot{W}_{tnvest}}$ $= \frac{-\dot{W}_{s} T_{0} \cdot S_{erz}}{1 + \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{Q_{vert} = 0}{(h_{2} h_{1}) T_{0}(s_{2} s_{1})}}_{(h_{2} h_{2})}$
- Wärmetauscher ohne Vermischung: $\varepsilon = \frac{m_C(e_{x,str,C_i} e_{x,str,C_i})}{m_H(e_{x,str,H_i} e_{x,str,H_e})}$
- Wärmetauscher mit Vermischung: $\varepsilon = \frac{m_{C,l}(\varepsilon_{xstr,e} \varepsilon_{xstr,e})}{m_{H,l}(\varepsilon_{xstr,H,i} \varepsilon_{xstr,e})}$

EX-PRÜFUNGSAUFGABE:: KOMPRESSIONSWÄRMEPUMPE



- 1: gesättigeter Dampf 1→2: isobare Überhitzung
- 2→3: irr. adiabat. Verdichtung
- 3→4: isobare Abkühlung, vollständige Kondensation
- 4→5: Unterkühlung an Sättigl.
- 5→6: isentrope Drosselung
- 6→1: isobare Verdampfung
- Geg.: \dot{W}_{heiz} , $\eta_{K,s}$



Vorgehen:

- i. mit Tabellen: $\eta_{K.S} \rightarrow h_1$, h_2 ... h_6 bestimmen
- ii. $\dot{W}_{heiz} = -\dot{Q}_{34} = \dot{m}(h_3 h_4)$
- iii. $\dot{Q}_{12} = \dot{m}(h_2 h_1)$
- iv. $\dot{Q}_{61} = \dot{m}(h_1 h_6)$
- v. $\dot{W}_{Komp} = \dot{m}(h_2 h_3)$
- vi. $\varepsilon_W = \frac{Q_{zu/heiss}}{-W_S} = \frac{-\dot{W}_{heiz}}{-\dot{W}_{Komp}}$

THERMODYNAMIK 2 :: LAV

DEFINITIONEN

KONSTANTEN

- Normdruck $p_{ref} = 1atm = 1.01325 \ bar$ $T_{ref} = 298 K \approx 25^{\circ}C$ - Normtemperatur 1hv = 1PS = 0.735kW- Pferdestärke $e = 1.60219 \cdot 10^{-19} \,\mathrm{C}$ - Elementarladung

 $f = N_A \cdot e = 96485.3 \frac{c}{mol} = \frac{A \cdot s}{mol}$ - Faraday'sche Konstante

 $1ppm = 10^{-6}$ - ppm = parts per million

GRÖSSEN

 $\begin{aligned} n &= \frac{m}{M} & M: \left[\frac{kg}{kmol}\right] n: [kmol] m: [kg] \\ X_i &= \frac{n_i}{\sum_i n_i} = \frac{n_i}{n_{net}} = \frac{V_i}{\sum_i V_i} = \frac{V_i}{V_{net}} \end{aligned}$ - Molar ↔ Massenspezifisch - Molanteil (Volumenanteil)

- Partialdruck $p_i = X_i \cdot p_{net}$ - Konzentration (molar) $c_i = n_i / V_{net}$

- Massenanteil

 $\begin{aligned} & C_{l} = \frac{m_{l}}{m_{net}} = X_{l} \cdot M_{l} \cdot \frac{\sum_{j} n_{j}}{\sum_{j} n_{j} \cdot M_{j}} \\ & \lambda = \frac{(m_{L}/m_{B})}{(m_{L}/m_{B})_{st\"{o}ch}} = \frac{(m_{L}/m_{B})}{(m_{L}/m_{B})_{st\"{o}ch}} = \frac{(n_{L}/n_{B})}{(n_{L}/n_{B})_{st\"{o}ch}} \\ & \kappa = \frac{c_{p}}{c_{v}} = \frac{c_{v} + R}{c_{v}} = 1 + \frac{R}{c_{v}} = \frac{c_{p}}{c_{p} - R} \end{aligned}$ - Luftüberschussfaktor - Isentropenkoeffizient

bei idealen Gasen siehe Seite 1

VERBRENNUNGSPROZESSE

REAKTIONSGLEICHUNGEN VERBRENNUNG VON $\mathcal{C}_{\mathbf{r}}H_{\mathbf{v}}$ an Luft

•
$$\lambda \ge 1$$
: $C_x H_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4} \right) (O_2 + 3.76 N_2) \rightarrow x \cdot CO_2 + \frac{y}{2} \cdot H_2O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4} \right) O_2 + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4} \right) N_2$

→ Beispiel Methan CH₄:

 $CH_4 + 2\lambda(O_2 + 3.76 N_2) \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 2 \cdot (\lambda - 1)O_2 + 7.52\lambda \cdot N_2$

•
$$\lambda < 1$$
: $C_x H_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4} \right) (O_2 + 3.76 N_2) \rightarrow (1 - \lambda) C_x H_y + \lambda x \cdot CO_2 + \frac{\lambda y}{2} \cdot H_2 O + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4} \right) N_2$

 \rightarrow Beispiel Methan CH₄:

$$CH_4 + 2\lambda(O_2 + 3.76 N_2)$$

$$\rightarrow (1 - \lambda)CH_4 + \lambda \cdot CO_2 + 2\lambda \cdot H_2O + 7.52\lambda \cdot N_2$$

REAKTIONSGLN VERBRENNUNG VON $\mathcal{C}_x H_y \mathcal{O}_z$ AN LUFT

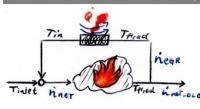
$$\lambda \ge 1: \qquad C_x H_y O_z + \lambda \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} \right) (O_2 + 3.76 N_2) \longrightarrow \\ x \cdot CO_2 + \frac{y}{2} \cdot H_2 O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} \right) O_2 + 3.76 \times \\ \lambda \left(x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} \right) N_2$$

→ Beispiel Methanol CH₃OH:

$$CH_3OH + 1.5\lambda(O_2 + 3.76 N_2)$$

 $\rightarrow CO_2 + 2H_2O + 1.5 \cdot (\lambda - 1)O_2 + 5.64\lambda \cdot N_2$

EGR: EXHAUST GAS RECIRCULATION / ABGASRÜCKFÜHRUNG



Idee: Rückgeführte Abgase kühlen sich wieder auf die Einlasstemperatur ab und müssen von neuem aufgeheizt werden. $T_{f,ad} \downarrow$

$$X_{EGR} = \frac{\dot{n}_{EGR}}{\dot{n}_{net}} = \frac{n_{EGR}}{n_{net}} = \frac{n_x \cdot n_{net_old}(as\ if\ no\ EGR)}{(1+n_x) \cdot n_{net_old}} = \frac{n_x}{1+n_x}$$

•
$$\lambda \ge 1$$
: $C_x H_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) (O_2 + 3.76 N_2)$
+ $n_x \left[x \cdot CO_2 + \frac{y}{2} \cdot H_2O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4}\right) O_2 + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2\right] \rightarrow$
 $(1 + n_x) \left[x \cdot CO_2 + \frac{y}{2} \cdot H_2O + (\lambda - 1) \left(x + \frac{y}{4}\right) O_2 + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4}\right) N_2\right]$

•
$$\lambda < 1$$
: $C_x H_y + \lambda \left(x + \frac{y}{4} \right) (O_2 + 3.76 N_2)$
 $+ n_x \left[(1 - \lambda) C_x H_y + \lambda x \cdot C O_2 + \frac{\lambda y}{2} \cdot H_2 O + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4} \right) N_2 \right] \rightarrow$
 $(1 + n_x) \left[(1 - \lambda) C_x H_y + \lambda x \cdot C O_2 + \frac{\lambda y}{2} \cdot H_2 O + 3.76 \cdot \lambda \left(x + \frac{y}{4} \right) N_2 \right]$

ENTHALPIEN

- allgemein: $\bar{h} = \bar{h}_f^0 + \bar{h}(T, p) \bar{h}(T_{ref}, p_{ref})$
- ideale Gase:

$$\overline{h} = \underbrace{\overline{h}_{f}^{0}}_{A-30} + \underbrace{\overline{h}(T) - \overline{h}(T_{ref})}_{A-23 \text{ bis } A-28}$$

• ideale Gase, mit \bar{c}_p : $\bar{h} = \underbrace{\bar{h}_f^0}_{A=30} + \int_{T_{ref}}^T \underbrace{\bar{c}_p(T)}_{A=21} dt$

1. HAUPTSATZ FÜR OFFENE SYSTEME

• stationär, KE und PE vernachlässigbar:

$$\dot{Q} - \dot{W}_s = \sum_P \dot{m}_e h_e - \sum_R \dot{m}_i h_i$$

• pro Mol Brennstoff

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{n}_{fuel}} - \frac{\dot{W}_s}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_{P} n_e \overline{h}_e - \sum_{R} n_i \overline{h}_i$$

wobei P = Produkte, R = Reaktanden, e = exit und i = inletn = stöchiometrische Verhältnisse bei $n_{fuel} = 1$

REAKTIONSENTHALPIE UND HEIZWERTE

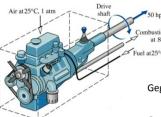
- Reaktionsenthalpie: $\bar{h}_R = \sum_P n_\rho \bar{h}_\rho \sum_R n_i \bar{h}_i$
- Heizwerte = Reaktionsenthalpien bei $T_R = T_P = T_{ref} \Rightarrow \bar{h} = \bar{h}_f^0$

$$H_{U,O} = -h_R^0 = -\overline{h}_R^0 / M_{fuel} \qquad H_{U,O}: \left[\frac{kJ}{kg}\right]$$

- unterer Heizwert H_{II} : Verbrennungsprodukt Wasser gasförmig
- oberer Heizwert H_0 : Verbrennungsprodukt Wasser flüssig
- \rightarrow falls nichts angegeben, gilt H_{II}
- Leistung (Heizleistung): $P = H_{U,O} \cdot \dot{m}_{fuel}$

- Wandwärmeverluste: Wird keine Arbeit geleistet, ist die ganze Reaktionsenthalpie zu den Wandwärmeverlusten zu zählen.
- Wandwärmeverluste als Anteil X der maximalen Kraftstoffwerte, also als Anteil des Heizwertes (je nach Phase des Wassers $H_{U,0}$):

$$\frac{\frac{\dot{Q}}{n_{fuel}} = \sum_{P} n_e \bar{h}_e - \sum_{R} n_i \bar{h}_i}{\frac{\dot{Q}}{n_{fuel}} = X \left(\sum_{P} n_e \bar{h}_f^0 - \sum_{R} n_i \bar{h}_f^0 \right)} \right\} \Longrightarrow X = \frac{\sum_{P} n_e \bar{h}_e - \sum_{R} n_i \bar{h}_i}{\sum_{P} n_e \bar{h}_f^0 - \sum_{R} n_i \bar{h}_f^0}$$



Gegeben: Daten aus Bild , $\lambda = 1$ $\dot{m}_{fuel} = 1.8 \cdot 10^{-3} \left[\frac{kg}{} \right]$

Gesucht: Q

i. Reaktionsgleichung: Octan m

$$C_8H_{18} + 12.5O_2 + 47N_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O + 47N_2$$

ii. 1. HS nach \dot{O} aufgelöst:

$$\dot{Q} = \dot{n}_{fuel} (\dot{W}_s + \sum_P n_e \bar{h}_e - \sum_R n_i \bar{h}_i)$$

$$\begin{split} \ddot{Q} &= \dot{n}_{fuel} \big(\dot{W}_{s} + \sum_{P} n_{e} \bar{h}_{e} - \sum_{R} n_{i} \bar{h}_{i} \big) \\ \text{iii.} \quad \sum_{R} \nu_{i} \bar{h}_{i} &= \stackrel{T=T_{ref}}{\Longrightarrow} 1 \big[\bar{h}_{f}^{0} \big]_{C_{8}H_{18}(I)} + 12.5 \big[\bar{h}_{f}^{0} \big]_{O_{2}} + 47 \big[\bar{h}_{f}^{0} \big]_{N_{2}} \end{split}$$

$$\begin{split} \text{iv.} \quad & \sum_{P} \nu_e \bar{h}_e = \Longrightarrow^{T=890K} 8 \big[\bar{h}_f^0 + \bar{h}(890K) - \bar{h} \big(T_{ref} \big) \big]_{CO_2} + 9 \big[\bar{h}_f^0 + \bar{h}(890K) - \bar{h} \big(T_{ref} \big) \big]_{H_20(g)} + 47 \big[\bar{h}_f^0 + \bar{h}(890K) - \bar{h} \big(T_{ref} \big) \big]_{N_2} \end{split}$$

- v. $\dot{n}_{fuel} = \frac{\dot{m}_{fuel}}{M_{fuel}}$
- vi. Alles in (ii) einsetzen und ausrechnen.

1. HAUPTSATZ FÜR GESCHLOSSENE SYSTEME

- allgemein: $Q W = \Delta U = \sum_{D} n\bar{u} \sum_{D} n\bar{u}$
- ideale Gase, mit $\bar{u}=\bar{h}-\bar{R}T=\bar{h}^0_f+\bar{h}(T)-\bar{h}(T_{ref})-\bar{R}T$

$$Q - W = \sum_{P} n \left(\overline{h}_{f}^{0} + \overline{h}(T) - \overline{h}(T_{ref}) \right)$$
$$- \sum_{R} n \left(\overline{h}_{f}^{0} + \overline{h}(T) - \overline{h}(T_{ref}) \right) - \overline{R} T_{P} \sum_{P} n + \overline{R} T_{R} \sum_{R} n$$

ADIABATE FLAMMTEMPERATUR

- $-\dot{W}_{\rm s} = \sum_{P} \dot{n}_{e} \bar{h}_{e} \sum_{R} \dot{n}_{i} \bar{h}_{i}$ • allgemein:
- wenn keine Arbeit:

$$\sum_{P} n_e \bar{h}_e = \sum_{R} n_i \bar{h}_i$$

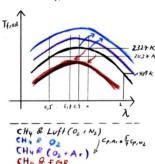
$$\sum_{P} n_{e} \left(\overline{h}(T_{f,ad}) - \overline{h}(T_{ref}) \right)_{e}$$

$$= \sum_{R} n_{i} \left(\overline{h}(T_{i}) - \overline{h}(T_{ref}) \right)_{i} + \sum_{R} n_{i} \overline{h}_{f,i}^{0} - \sum_{P} n_{e} \overline{h}_{f,e}^{0}$$

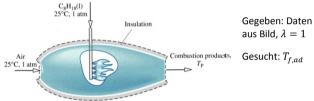
- · Vorgehen:
- i. Reaktionsgleichung aufstellen
- ii. Rechte Seite der obenstehenden Gleichung berechnen
- iii. Faustregel: $T_{f.ad} = 2000K + T_{Reaktanden}$ für 1. Iteration
- iv. 2 Iterationen der linken Seite berechnen
- v. Linear interpolieren mit $TR :: ipl(I_1, Rechte Seite, I_2, T_{I_1}, T_{i_2})$

Beeinflussung der adiabaten Flammtemperatur:

- Inertgase wie N_2 sind Ballast, es wird Energie gebraucht, um sie zu heizen: Je mehr Inertgase, desto kleiner ist $T_{f,qd}$.
- Je grösser c_n des Inertgases, desto mehr sinkt $T_{f,ad}$ ab. (c_n von idealen Gasen siehe p.1).
- Wenn Verbrennung an $O_2: T_{f,ad} + 800K$
- Abfall bei $\lambda > 1$: zu viel N_2 und O_2 .
- Abfall bei $\lambda < 1$: weniger Reaktionswärme
- $\lambda_{max} \cong 0.8 \dots 0.9$: Tradeoff von obigen Argumenten



ADIABATE FLAMMTEMPERATUR



$$\begin{split} &\text{i.} \quad C_8 H_{18} + 12.5 O_2 + 47 N_2 \longrightarrow 8C O_2 + 9 H_2 O + 47 N_2 \\ &\text{ii.} \quad \underbrace{\sum_{R} n_i \left(\bar{h}(T_i) - \bar{h}\left(T_{ref}\right) \right)_i}_{=0 \text{ , } T_i = T_{ref}} + \underbrace{\sum_{R} n_i h_{f,i}^0 - \sum_{P} n_e h_{f,e}^0}_{A - 30} = \\ &= 1 \big[\overline{h}_f^0 \big]_{C_8 H_{18}(I)} - 8 \big[\bar{h}_f^0 \big]_{CO_2} - 9 \big[\bar{h}_f^0 \big]_{H_2 O(g)} = 5' 074' 630^{\ kJ} /_{kmol} \end{split}$$

iii. Faustregel: $T_{f,ad} \cong 2300 \text{K}$

iv.

\sum_{P} 1	$n_e \left(\bar{h}(T_{f,ad}) - \bar{h}(T_{ref}) \right)_e$	@ 2300K	@ 2500K	
CO_2	$8[\bar{h}(T_{f,ad}) - \bar{h}(T_{ref})]_{CO_2}$	887'368	975′408	
H_20	$9[\bar{h}(T_{f,ad}) - \bar{h}(T_{ref})]_{H_20}$	794'655	890'676	
N_2	$47 \left[\bar{h}(T_{f,ad}) - \bar{h}(T_{ref}) \right]_{N_2}$	3'149'329	3'492'664	
	$\sum () \{I_1, I_2\} =$	$I_1 = 4'821'352$	$I_2 = 5'358'748$	

v. $TR :: ipl(I_1, 5'074'630, I_2, 2300, 2500) \implies T_{f,ad} = 2394, 3K$

ENTROPIE BEI VERBRENNUNGSPROZESSEN

3. HAUPTSATZ DER THERMODYNAMIK

Die Entropie einer Substanz ist beim absoluten Temperaturnullpunkt nur dann null, wenn diese eine perfekt kristalline Struktur hat. Sonst hat sie die absolute Entropie beim Nullpunkt von $s^0(T=0)$.

ENTROPIE DURCH ABSOLUTE ENTROPIE

• ideale Gase:
$$s(T,p) = s^0(T) - R \ln \frac{p}{p_{ref}}$$

$$\bar{s}(T,p) = \bar{s}^0(T) - \bar{R} \ln \frac{p}{p_{ref}}$$

 $\bar{s}_i(T, p_i) = \bar{s}_i^{\ 0}(T) - \bar{R} \ln \left(X_i \frac{p}{n} \right)$ komponentenweise:

ENTROPIEBILANZ FÜR STATIONÄRE. OFFENE SYSTEME

$$\frac{\dot{s}_{erz}}{\dot{n}_{fuel}} = -\sum_{i} \frac{\dot{Q}/T_G}{\dot{n}_{fuel}} + \sum_{P} n_e \bar{s}_e - \sum_{R} n_i \bar{s}_i$$

$$\begin{split} \frac{\dot{S}_{erz}}{\dot{n}_{fuel}} &= -\sum \frac{\dot{Q}/T_G}{\dot{n}_{fuel}} + \sum_{P} n_e \left[\overline{s}^0(T) - \overline{R} \ln \left(X_i \frac{p}{p_{ref}} \right) \right]_e \\ &- \sum_{R} n_i \left[\overline{s}^0(T) - \overline{R} \ln \left(X_i \frac{p}{p_{ref}} \right) \right]_i \end{split}$$

Da die Volumina der Flüssigkeiten und Festkörper verhältnismässig gering sind, zählen bei den Partialbrüchen nur die Gase.



 $C_8H_{18}(l) + 12.5O_2 + 47N_2 \rightarrow \cdots \implies X_{O_2} = \frac{12.5}{59.5}, X_{N_2} = \frac{47}{59.5}$ Absolute Entropien für die gebräuchlichen Gase in A-22 bis A-28.



Absolute Entropien für Brennstoffe bei T=298K in A-30.

• $\dot{Q}=0$ und $p=p_{ref}$:

$$\frac{\dot{S}_{erz}}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_{P} n_e [\overline{s}^0(T)]_e - \sum_{R} n_i [\overline{s}^0(T)]_i + \overline{R} \ln \left(\frac{\prod_R (X_i^e)^n}{\prod_P (X_i^e)^n} \right)$$

ENTROPIEPRODUKTION BEI METHANVERBRENNUNG

• Adiabat, $\lambda = 1$, $T_{f,ad} = 2300K$ $CH_4 + 2O_2 + 7.52 N_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 7.52N_2$ $\frac{\bar{s}_{erz}}{\bar{n}_{fuel}} = \left[\bar{s}^{0}(T_{f,ad})\right]_{CO_{2}} + 2\left[\bar{s}^{0}(T_{f,ad})\right]_{H_{2}O} + 7.52\left[\bar{s}^{0}(T_{f,ad}) - \bar{s}^{0}(T_{ref})\right]_{N_{2}} - \left[\bar{s}^{0}(T_{ref})\right]_{CH_{4}} - 2\left[\bar{s}^{0}(T_{ref})\right]_{O_{2}}$ $+\bar{R} \ln \left(\frac{\left(\frac{2}{9.52}\right)^2 \left(\frac{7.52}{9.52}\right)^{7.52}}{\left(\frac{1}{10.52}\right)^1 \left(\frac{2}{10.52}\right)^2 \left(\frac{7.52}{10.52}\right)^{7.52}} \right)$

• Adiabat, $\lambda = 2$, $T_{fad} = 1400K$ $CH_4 + 4O_2 + 15.04 N_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 2O_2 + 15.04N_2$ $\frac{s_{erz}}{n_{fuel}} = \left[\bar{s}^{0}(T_{f,ad})\right]_{CO_{2}} + 2\left[\bar{s}^{0}(T_{f,ad})\right]_{H_{2}O} + 2\left[\bar{s}^{0}(T_{f,ad})\right]_{O_{2}}$ $+15.04[\bar{s}^{0}(T_{f,ad})-\bar{s}^{0}(T_{ref})]_{N}$ $-[\bar{s}^{0}(T_{ref})]_{CH} - 4[\bar{s}^{0}(T_{ref})]_{CH}$ $+\bar{R} \ln \left(\frac{\left(\frac{4}{19.04}\right)^4 \left(\frac{15.04}{19.04}\right)^{15.04}}{\left(\frac{1}{39.04}\right)^3 \left(\frac{2}{39.04}\right)^2 \left(\frac{2}{39.04}\right)^2 \left(\frac{15.04}{39.04}\right)^{15.04}} \right)$

Vergleich und Diskussion

Der erste Brenner produziert mit $785 \, kI/(kmol \cdot K)$ viel weniger Entropie als der zweite Brenner, welcher $1063 \, kJ/(kmol \cdot K)$ produziert. Das kann damit begründet werden, dass beim zweiten Brenner die Abgastemperatur kleiner ist und die Gase gegenüber der Umwelt weniger Exergie in sich tragen, was bedeutet, dass mehr Exergie vernichtet wurde, aka der Exergieverlust grösser ist aka die erzeugte Entropie mal die Umgebungstemperatur grösser ist.

ENTROPIEBILANZ FÜR GESCHLOSSENE SYSTEME

$$\frac{S_{erz}}{n_F} = \sum_P n\bar{s} - \sum_R n\bar{s} - \frac{1}{n_F} \sum_{T_G} \frac{Q}{T_G}$$

$$\begin{split} \frac{S_{erz}}{n_{fuel}} &= -\frac{1}{n_{fuel}} \sum \frac{Q}{T_G} + \sum_{p} n \left[\overline{s}^0(T) - \overline{R} \ln \left(X_i \frac{p}{p_{ref}} \right) \right] \\ &- \sum_{R} n \left[\overline{s}^0(T) - \overline{R} \ln \left(X_i \frac{p}{p_{ref}} \right) \right] \end{split}$$

CHEMISCHE EXERGIE

Die Exergie teilt sich auf in die thermomechanische Exergie und die chemische Exergie. Letztere ist den Exegieformeln aus der Td 1. welche nur die thermomechanische Exergie beinhalten, hinzuzufügen:

$$E_x = E_x^{thermomechanisch} + E_x^{chemisch}$$

• gschlossenes System

$$E_x = U - U_0 + p_0(V - V_0) - T_0(S - S_0) + KE + PE + E_x^{ch}$$

$$e_x = u - u_0 + p_0(v - v_0) - T_0(S - S_0) + ke + pe + e_x^{ch}$$

offenes System

$$\begin{split} \dot{E}_{x,str} &= \dot{m}[(h-h_0) - T_0(s-s_0) + ke + pe] + \dot{E}_x^{\ ch} \\ e_{x,str} &= (h-h_0) - T_0(s-s_0) + ke + pe + e_x^{\ ch} \end{split}$$

• für ideale Gase

$$\bar{s}(T,p) - \bar{s}(T_0,p_0) = \bar{s}^0(T) - \bar{s}^0(T_0) - \bar{R} \cdot \ln(\frac{p}{n_0})$$

CHEMISCHE EXERGIE VON REAKTANDEN

- $\begin{array}{ll} \bullet & \text{Energiebilanz:} & \frac{\dot{W}_S}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_R n_i \bar{h}_i \sum_P n_e \bar{h}_e + \frac{\dot{Q}}{\dot{n}_{fuel}} \\ \bullet & \text{Entropiebilanz } (T_i = T_0 \ \forall \ i) : & \sum_{n_{fuel}} \frac{\dot{Q}/T_0}{\dot{n}_{fuel}} = \sum_P n_e \bar{s}_e \sum_R n_i \bar{s}_i \frac{\dot{s}_{erz}}{\dot{n}_{fuel}} \\ \end{array}$
- Entorpiebilanz $\cdot T_0$ in Energiebilanz einsetzen:

$$\Rightarrow \frac{W_s}{n_{fuel}} = \sum_R n_i \bar{h}_i - \sum_P n_e \bar{h}_e - T_0(\sum_R n_i \bar{s}_i - \sum_P n_e \bar{s}_e) - T_0 \frac{s_{erz}}{n_{fuel}}$$

Die chemische Exergie pro Mol Brennstoff ist gleich der maximal möglichen Arbeit, also obiger Term mit $\dot{S}_{arz} = 0$:

$$\bar{e}_x^{ch} = \sum_{P} n_i \bar{h}_i - \sum_{P} n_e \bar{h}_e - T_0 \left(\sum_{P} n_i \bar{s}_i - \sum_{P} n_e \bar{s}_e \right)$$

Da gegenüber der Umgebung (T_0,p_0) gilt: $\begin{cases} \bar{h}_i = \bar{h}_i(T_0,p_0) \\ \overline{s}_i = \bar{s}_i^{\ 0}(T_0) - \bar{R} \ln X_i^e \end{cases}$ Mit $\bar{q} = \bar{h} - T\bar{s}$ folgt nun

$$\overline{e}_{x}^{ch} = \sum n\overline{g} (T_{0}, p_{0}) - \sum n\overline{g} (T_{0}, p_{0}) + \overline{R}T_{0} \ln T_{0}$$

 $\overline{e}_{x}^{ch} = \underbrace{\sum_{R} n\overline{g} \left(T_{0}, p_{0}\right) - \sum_{P} n\overline{g} \left(T_{0}, p_{0}\right)}_{P} + \overline{R}T_{0} \ln \left(\frac{\prod_{R} (X_{i}^{e})^{n}}{\prod_{P} (X_{i}^{e})^{n}}\right)$

$$- \ \bar{g} = \underbrace{\bar{g}_{f}^{0}}_{A-30} + \underbrace{\bar{g}(T_{0}, p_{0}) - \bar{g}(T_{ref}, p_{ref})}_{=0 \ @ \ \{T_{0}, p_{0}\} = \{T_{ref}, p_{ref}\}} \bullet \ \bar{g}_{f}^{0} \ \textcircled{3} A-30$$

Die $\bar{g}(T, p)$ sind nicht tabelliert, falls $\{T_0, p_0\} \neq \{T_{ref}, p_{ref}\}$ muss die andere Gleichung verwendet werden.

- ΔG = Reaktionsdifferenz der freien Enthalpie
- In den Druckkorrekturterm fliessen die Partialdrücke verglichen mit dem Umgebungsdruck ein, wie zuvor nur die der Gase.

CHEMISCHE EXERGIE AUS ANDEREN $ar{e}_{v}^{ch}$ berechnen

• Exergiebilanz für chemische Systeme mit $T_C = T_0$: $0 = \underbrace{\sum \left(1 - \frac{T_o}{T_i}\right) \dot{Q}_i}_{T_i} - \dot{W}_s + \sum_R \dot{n} \bar{e}_x^{\ ch} - \sum_P \dot{n} \bar{e}_x^{\ ch} - \dot{E}_{x,v}$

• pro Mol Brennstoff bei intern reversiblem Prozess:

$$\left(\bar{e}_{x}^{ch}\right)_{fuel} = \left(\frac{w_{s}}{n_{fuel}}\right)_{rev} + \sum_{P} n\bar{e}_{x}^{ch} - \sum_{R \ni fuel} n\bar{e}_{x}^{ch}$$

$$\left(\bar{e}_{x}^{ch}\right)_{fuel} = \underbrace{\sum_{R} n\bar{g} \left(T_{0}, p_{0}\right) - \sum_{P} n\bar{g} \left(T_{0}, p_{0}\right)}_{:=-\Delta G} + \sum_{P} n\bar{e}_{x}^{ch} - \sum_{R\bar{p}fuel} n\bar{e}_{x}^{ch}$$

•
$$\bar{g}_f^0$$
 (→ A-30

•
$$\bar{e}_x^{ch}$$
 \longrightarrow A-31

CHEMISCHE EXERGIE VON OCTAN

Reaktionsgleichung: $C_8H_{18}(l) + 12.5O_2 \rightarrow 8CO_2 + 9H_2O$ Gegeben: $\{T_0, p_0\} = \{T_{raf}, p_{raf}\}$

Variante Standard-Exergien:

$$(\bar{e}_{x}^{ch})_{C_{8}H_{18}} = (\bar{g}_{f}^{0})_{C_{8}H_{18}} + \underbrace{12.5(\bar{g}_{f}^{0})_{O_{2}}}_{=0} - 8(\bar{g}_{f}^{0})_{CO_{2}} - 9(\bar{g}_{f}^{0})_{H_{2}O}$$

$$+ 8(\bar{e}_{x}^{ch})_{CO_{2}} + 9(\bar{e}_{x}^{ch})_{H_{2}O} - 12.5(\bar{e}_{x}^{ch})_{O_{2}}$$

CHEMISCHE EXERGIE VON METHAN

Reaktionsgleichung: $CH_4 + 2O_2 + 7.52N_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 7.52N_2$ Gegeben: $\{T_0, p_0\} = \{T_{ref}, p_{ref}\}, T_e = 2300K$ Luft: $\{X_{N_2}^e = 0.7567, X_{O_2}^e = 0.2035,$ $X_{H_20}^e = 0.0132, X_{CO_2}^e = 0.0003$

Variante Standard-Exergien

$$\begin{split} \left(\bar{e}_{x}^{\ ch}\right)_{CH_{4}} &= \left(\bar{g}_{f}^{\ 0}\right)_{CH_{4}} - \left(\bar{g}_{f}^{\ 0}\right)_{CO_{2}} - 2\left(\bar{g}_{f}^{\ 0}\right)_{H_{2}O} \\ &+ \left(\bar{e}_{x}^{\ ch}\right)_{CO_{2}} + 2\left(\bar{e}_{x}^{\ ch}\right)_{H_{2}O} - 2\left(\bar{e}_{x}^{\ ch}\right)_{O_{2}} \end{split}$$

Variante Partialdrücke:

$$(\bar{e}_x^{ch})_{CH_4} = (\bar{g}_f^0)_{CH_4} - (\bar{g}_f^0)_{CO_2} - 2(\bar{g}_f^0)_{H_2O} + \bar{R}T_0 \ln \frac{(X_{O_2}^e)^2}{(X_{CO_2}^e)(X_{H_2O}^e)^2}$$

Die Inertgase könnte man schon in der Reaktionsgleichung weglassen, wie im Beispiel von Octan.

CHEMISCHE EXERGIE VON PRODUKTEN

Im Gegensatz zu den vorigen Überlegungen fliesst die Reaktion hier nicht mehr ein, und die Produkte bilden ein ideales Gasgemisch:

• Chemische Exergie bei 1 Produkt pro Mol Brennstoff (bei (T_0, p_0) als Gas):

$$\bar{e}_{x}^{ch} = \bar{R}T_{0} \ln \left(\frac{1}{X_{i}^{e}}\right)$$

wobei n so gewählt wird, dass der Brennstoff den Koeffizient 1 erhält.

• Chemische Exergie H_2O pro Mol Brennstoff (bei (T_0, p_0) als Flüssigkeit):

$$\bar{e}_x^{ch} = \left[\bar{g}_{H_2O(l)} - \bar{g}_{H_2O(g)}\right](T_0, p_0) + \bar{R}T_0 \ln \left(\frac{1}{X_i^e}\right)$$

wobei der erste Summand die Verdampfungsexergie hinzufügt und wiederum nur Wasser als Produkt vorliegen darf.

• Chemische Exergie von Produkten, die alle elementare Gase sind:

$$\overline{e}_{x}^{ch} = \overline{R}T_{0} \sum_{i} n_{i} \ln \left(\frac{X_{i}}{X_{i}^{e}} \right)$$

wobei n so gewählt wird, dass der Brennstoff den Koeffizient 1 erhält, damit der Wert pro Mol des Brennstoffes zählt.

EXERGIE VON VERBRENNUNGSPRODUKTEN

• Adiabat, $\lambda = 1$, $T_{fad} = 2300K$, $T_0 = T_{ref}$, $p = p_0 = p_{ref}$ $CH_4 + 2O_2 + 7.52 N_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 7.52N_2$

$$\sum_{P} \overline{e}_{x,str} = \sum_{P} \overline{h}(T_{f,ad}) - \overline{h}(T_{0})$$
$$- T_{0} \left(\overline{s}^{0}(T) - \overline{s}^{0}(T_{0}) - \overline{R} \cdot \ln \left(\frac{p}{p_{0}} \right) \right) + \overline{e}_{x}^{ch}$$

$$\begin{split} \left(\sum_{P} \bar{e}_{x,str} \right)^{th.mech.} &= \left[\bar{h} \left(T_{f,ad} \right) - \bar{h} (T_0) - T_0 \left(\bar{s}^0 (T) - \bar{s}^0 (T_0) \right) \right]_{CO_2} \\ &+ 2 \left[\bar{h} \left(T_{f,ad} \right) - \bar{h} (T_0) - T_0 \left(\bar{s}^0 (T) - \bar{s}^0 (T_0) \right) \right]_{H_2O} \\ &+ 7.52 \left[\bar{h} \left(T_{f,ad} \right) - \bar{h} (T_0) - T_0 \left(\bar{s}^0 (T) - \bar{s}^0 (T_0) \right) \right]_{N_2} \\ \left(\sum_{P} \bar{e}_{x,str} \right)^{ch} &= \bar{R} T_0 \left(1 \ln \left(\frac{X_{CO_2}}{Y_{e,-}^c} \right) + 2 \ln \left(\frac{X_{H_2O}}{Y_{e,-}^c} \right) + 7.52 \ln \left(\frac{X_{N_2}}{Y_{e,-}^c} \right) \right) \end{split}$$

Wenn man die Exergiewerte bei $\lambda = 1.2$ evaluiert, bemerkt man, dass iener von $\lambda = 1$ grösser ist, da ia dort weniger Entropie produziert – weniger Exergie vernichtet wird.

EXERGETISCHE EFFIZIENZ EINES BRENNERS

 $\begin{array}{ll} \bullet \ \ \text{allgemein:} & \varepsilon = \frac{E_{x,products}}{E_{x,fuel}} = 1 - \frac{E_{x,v}}{E_{x,fuel}} = 1 - T_0 \frac{S_{erz}}{E_{x,fuel}} \\ \bullet \ \ \text{falls Turbine ohne Abgasnutzung:} & \varepsilon = \frac{E_{x,products}}{E_{x,fuel}} = \frac{\dot{W}_s}{E_{x,fuel}} \\ \end{array}$

ENERGIE- VS. EXERGIEVERLUSTE

Aus einer Verbrennung wird mittels eines Motors Arbeit geleistet. Die energetische Effizienz bezeichnet den Anteil der Arbeit vom zugeführten Wärmestrom. Könnte man die Abwärme aus energetischer Sicht noch nutzen (T > 0K), muss die daraus möglich zu gewinnende Arbeit = Exergie $(T > T_0 > 0K)$ aber nicht so hoch sein, da die Umgebung auch

- Wärme hat einen exergetischen Anteil von $Q \to (1 \frac{T_0}{\pi})Q$
- Arbeit hat einen exergetischen Anteil von 100%.

DAS CHEMISCHE GLEICHGEWICHT

GLEICH GEWICHTSBEDINGUNG

Ein System ist dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die Entropie maximal, bzw. die Gibbs'sche freie Enthalpie minimal ist. Ist das der Fall, also der Gleichgewichtszustand erreicht, so gilt $dG|_{Tn} = 0$.

DAS CHEMISCHE POTENTIAL

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T,p,n_j} = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)_{S,V,n_j} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{S,p,r}$$

wobei j alle Kompomenten ausser i bezeichnet.

• 1 Substanz - 1 Phase:

$$\mu = \frac{G}{n} = \bar{g}$$

mehrere Komponenten, ideales Gasgemisch:

$$G = \sum_{i}^{j} n_i \mu_i(T, p_i) \qquad \qquad \mu_i = \bar{g}_i(T, p_i) = g_i^0 + \bar{R}T \ln \left(X_i \frac{p_{net}}{p_{ref}} \right)$$

GLEICHGEWICHTS"KONSTANTE" FÜR PARTIALDRÜCKE

$$v_A A + v_B B \rightleftharpoons v_C C + v_D D \stackrel{GGW}{\Longrightarrow} v_A \mu_A + v_B \mu_B = v_C \mu_C + v_D \mu_D$$

$$- \frac{v_C \bar{g}_C^0 + v_D \bar{g}_D^0 - v_A \bar{g}_A^0 - v_B \bar{g}_B^0}{\bar{R} T} = \ln \left[\frac{X_C^{v_C} X_D^{v_D}}{X_A^{v_A} X_B^{v_B}} \left(\frac{p_{net}}{p_{ref}} \right)^{v_C + v_D - v_A - v_B} \right]$$

$$-\frac{\Delta G^0}{\overline{R}T} = \ln[K_p(T)]$$

wobei ΔG^0 : = $\nu_C \bar{g}_C^0 + \nu_D \bar{g}_D^0 - \nu_A \bar{g}_A^0 - \nu_B \bar{g}_B^0$ und $K_n(T)$:

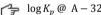
• die Gleichgewichts"konstante":

$$K_{p}(T) = \frac{X_{c}^{\nu_{c}} X_{D}^{\nu_{D}}}{X_{A}^{\nu_{A}} X_{B}^{\nu_{B}}} \left(\frac{p_{net}}{p_{ref}}\right)^{\nu_{c} + \nu_{D} - \nu_{A} - \nu_{B}}$$

durch $X_i = n_i/n_{net}$

$$K_p(T) = \frac{n_C^{\nu_C} n_D^{\nu_D}}{n_A^{\nu_A} n_B^{\nu_B}} \left(\frac{p_{net}/p_{ref}}{n_{net}} \right)^{\nu_C + \nu_D - \nu_A - \nu_B}$$

- Einige Rechenregeln:
- Inverse Reaktion $\rightarrow K_{neu} = 1/K$ $\rightarrow \log K_{neu} = -\log K$ Mehrere Reaktionen $\begin{cases} CO + H_2O \rightleftharpoons H_2 + CO_2 \\ 2CO_2 \rightleftharpoons 2CO + O_2 \\ 2H_2O \rightleftharpoons 2H_2 + O_2 \end{cases} \Longrightarrow K_1 = \sqrt{\frac{K_3}{K_2}}$



GLEICHGEWICHTS"KONSTANTE" FÜR KONZENTRATIONEN

• aus
$$\xrightarrow[n_{net}]{p_{net}} \xrightarrow[p_{ref}]{p_{net}} \xrightarrow[p_{ref}]{p_{net}} \xrightarrow[p_{ref}]{n_i} \xrightarrow[p_{ref}]{RT} \xrightarrow[p_{ref}]{c_i = n_i/V_{net}} c_i \xrightarrow[p_{ref}]{RT}$$

$$K_C(T) = \frac{c_C^{\nu_C} c_D^{\nu_D}}{c_A^{\nu_A} c_B^{\nu_B}}$$

$$K_p = \prod \left(\frac{p_i}{p_{ref}}\right)^{\nu_P - \nu_R} = K_C \cdot \prod \left(\frac{\bar{R}T}{p_{ref}}\right)^{\nu_P - \nu_R}$$

BERECHNEN VON $K_n(T)$

ohne Tabelle

i.
$$\Delta G^0 = \nu_P \bar{g}_P^0 - \nu_R \bar{g}_R^0 = \nu_P \bar{h}_P - \nu_R \bar{h}_R - T(\bar{s}_P^0(T) - \bar{s}_R^0(T))$$

mit $\bar{h} = \bar{h}_I^0 + \bar{h}(T) - \bar{h}(T_{ref})$

ii.
$$-\frac{\Delta G^0}{\overline{p}_T}$$
 berechnen $= \ln[K_p(T)]$

iii.
$$K_n(T) = e^{-\Delta G^0/\bar{R}T}$$

• mit Tabelle A-32: nachschauen, interpolieren, ausrechnen

$$K_n(T) = 10^{\text{Tabellenwert}}$$

GLEICHGEWICHTSANTEILE BEI VERBRENNUNGSREAKTION

i. Gegeben: T = 2500K . p = 1atm

ii. Reaktionsgleichung: $CO + 0.5O_2 + 1.88N_2 \rightarrow CO_2 + 1.88N_2$

iii. Dissoziationsreaktion: $CO_2 \rightleftharpoons CO + 0.5O_2$

iv. $CO + 0.5O_2 + 1.88N_2 \rightarrow zCO + \frac{z}{2}O_2 + (1-z)CO_2 + 1.88N_2$

= Anteil dissipierter CO₂-Moleküle

vi. (1-z) = Anteil nicht wegreagierten CO_2 -Moleküle

 $\begin{array}{ll} \text{vii.} & n_{net} = z + \frac{z}{2} + (1-z) + 1.88 = \frac{5.76 + z}{2} \\ \\ \text{viii.} & K_p(T) = \frac{n_V^{VC} n_D^{VD}}{n_A^{VA} n_B^{VB}} \Big(\frac{p_{net}/p_{ref}}{n_{net}} \Big)^{\nu_C + \nu_D - \nu_A - \nu_B} \\ \text{von } CO_2 \rightleftharpoons CO + 0.5O_2 \\ \end{array}$

ix. $K_p(T) = \frac{n_{CO}^{\nu_{CO}} n_{O_2}^{\nu_{O_2}}}{n_{CO}^{\nu_{CO}}} \left(\frac{p/p_{ref}}{n_{not}}\right)^{\nu_{CO} + \nu_{O_2} - \nu_{CO_2}}$

 $\begin{array}{ll} \text{x.} & = \frac{z^{1}.z^{0.5}}{2} \Big(\frac{2}{5.76+z}\Big)^{1+0.5-1} = \frac{z}{1-z} \Big(\frac{z}{5.76+z}\Big)^{0.5} \\ \text{xi.} & K_p(T) = 10^{\text{Tabellenwert}} = 10^{-1.44} = 0.0363 \end{array}$

 $TR :: solve(...,z) \quad oder \quad nsolve(...,z)$ $\rightarrow n_{net} = 2.9675$

xii. $\rightarrow z = 0.175$

xiii. $X_{CO} = \frac{z}{n_net} = 0.059$ $X_{O_2} = \frac{z/2}{n_net} = 0.029$ xiv. $X_{CO_2} = \frac{1-z}{n_net} = 0.278$ $X_{N_2} = \frac{1.88}{n_net} = 0.634$

xv. **Diskussion:** Man kann zeigen, dass bei mehr Inertgas weniger CO_2 gebildet wird, bei gleicher Temperatur. Je mehr Inertgas, desto grösser ist n_{net} und bei $K_n(T) = const.$ desto grösser wird z.

ADIABATISCHE FLAMMTEMPERATUR IM GLEICHGEWICHT

Zusätzlich zu den alten Vorgaben muss man jetzt zusätzlich die Dissoziationsreaktionen betrachten.

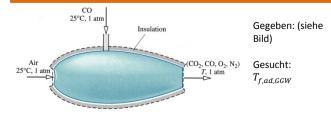
· Vorgehen:

- i. Berechnen der adiabaten Flammtemperatur, ohne die Dissoziation zu berücksichtigen. $\rightarrow T_{f,ad}$ ⁽¹⁾
- ii. Das Gleichgewichtsproblem lösen mit $K_v(T_{f,ad}) \rightarrow \mathbf{z}^{(k)} \ \mathbf{k} = \mathbf{2}, \mathbf{3}, ...$
- iii. Mit der neuen Reaktion wiederum die adiabate Flammtemperatur berechnen. $\rightarrow T_{f,ad}^{(k)} k = 2, 3, ...$
- iv. Falls $\left|T_{f,ad}^{(k)} T_{f,ad}^{(k-1)}\right| > TOL$, wieder zu Schritt ii.

Werte von adiabaten Flammtemperaturen

Fuel	Oxidant	p [bar]	$T_{f,ad}[K]$	Fuel	Oxidant	p [bar]	$T_{f,ad}[K]$
C_2H_2	Air	1	2600	H_2	Air	1	2400
C_2H_2	02	1	3410	H_2	02	1	3080
СО	Air	1	2400	CH ₄	Air	1	2210
CO	02	1	3220	CH ₄	Air	20	2270
C_7H_{16}	Air	1	2290	CH ₄	02	1	3030
C ₇ H ₁₆	02	1	3100	CH ₄	02	20	3460

ADIABATISCHE FLAMMTEMPERATUR IM GLEICHGEWICHT



· Reaktionsgleichung:

$$CO + 0.5O_2 + 1.88N_2 \rightarrow zCO + \frac{z}{2}O_2 + (1-z)CO_2 + 1.88N_2$$

• Gleichgewichtsproblem:

$$K_p(T) = \frac{z}{1-z} \left(\frac{z}{5.76+z}\right)^{0.5}$$

- i. $CO + 0.50_2 + 1.88N_2 \rightarrow CO_2 + 1.88N_2$ interpolieren zwischen 2500K und $2800K \rightarrow T_{fad}^{(1)} = 2663K$ Gleichgewichtsproblem lösen $\rightarrow z^{(1)} = 0.276$
- ii. $CO + 0.50_2 + 1.88N_2 \rightarrow 0.276CO + 0.138O_2 + 0.724CO_2 + 1.88N_2$ interpolieren zwischen 2000K und 2300K $\rightarrow T_{fad}^{(2)} = 2073K$ Gleichgewichtsproblem lösen
- iii. $CO + 0.5O_2 + 1.88N_2 \rightarrow 0.031CO + 0.015O_2 + 0.969CO_2 + 1.88N_2$ interpolieren zwischen 2500K und 2700K $\rightarrow T_{f,ad}$ ⁽³⁾ = **2598K** Gleichgewichtsproblem lösen
- iv. $CO + 0.5O_2 + 1.88N_2 \rightarrow 0.233CO + 0.117O_2 + 0.767CO_2 + 1.88N_2$ interpolieren zwischen 2000K und 2300K $\rightarrow T_{fad}^{(2)} = 2167K$



 Diskussion In der Graphik kann man erkennen, dass sich der Wert auf ca. $T_{f,ad}^{(k\to\infty)} = 2400K$ einpendeln würde, was auch dem

Tabellenwert entspräche. Das "Schwingen" ist damit zu erklären, dass

wenn die Temperatur zu hoch ist, auch die Dissoziation zu hoch ist und sich die Reaktion zu stark nach links verschiebt, was die Temperatur zu stark sinken lässt. Man könne so auch immer den Mittelwert den beiden letzten Temperaturen als neue Temperatur wählen.

DAS PRINZIP VON LE CHATELIER

Vereinfacht lässt sich sagen, dass das System auf äussere Zwänge entgegenwirkt.

	$T \uparrow$	verstärkte endotherme Reaktion	
	$T\downarrow$	∨erstärkte exotherme Reaktion	
	<i>p</i> ↑	Bildung der Stoffe, die ein kleineres Volumen einnehmen	
_	p 1	(nur bei Gasreaktionen, nur Gase zählen)	
_	m 1	Bildung der Stoffe, die ein grösseres Volumen einnehmen	
	$p\downarrow$	(nur bei Gasreaktionen, nur Gase zählen)	
Seite	- 1	Konzentrationssenkung dieses Stoffes, GGW auf die andere	
	Seite		
	c_l Seite Konzentrationserhöhung dieses Stoffes, GGW auf die diese Seite	Seite Konzentrationserhöhung dieses Stoffes, GGW auf die diese	

VAN'T HOFF GLEICHUNG

$$\frac{d \ln K_p}{dT} = \frac{\Delta H_R}{\overline{R}T^2} \xrightarrow{\Delta H_R := const.} \ln \frac{K_2}{K_1} = -\frac{\Delta H_R}{\overline{R}} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

Die van't Hoff Gleichung zeigt den Zusammenhang von Temperatur und der Gleichgewichtskonstante. $K_p \propto \pm 1/T$

- Ist die Reaktion exotherm ($\Delta H_R < 0$), dann $K_n \propto + 1/T$ und das GGW verschiebt sich mit zunehmender Temperatur nach links.
- Ist die Reaktion endotherm ($\Delta H_R > 0$), dann $K_n \propto -1/T$ und das GGW verschiebt sich mit zunehmender Temperatur nach rechts.

BRENNSTOFFZELLEN

In Brennstoffzellen wird der Brennstoff über elektrochemische Vorgänge direkt in Elektrizität umgewandelt. Das hat den Vorteil des geringeren Exergieverlustes, da nicht zuerst Wärme freigesetzt wird, wie beim Verbrennungsprozess.

MAXIMALER UMWANDLUNGSWIRKUNGSGRAD

$$\eta_{Zelle,max} = \frac{\Delta G_R}{\Delta H_R} = \frac{\Delta H_R - T\Delta S_R}{\Delta H_R} = 1 - \frac{T\Delta S_R}{\Delta H_R}$$

• Normalerweise ist $\Delta H_R < 0$ (exotherm), was bei Entropiezunahme einen Umwandlungswirkungsgrad von mehr als 100% zur Folge hat. In diesem Fall nimmt die Brennstoffzelle Wärme aus der Umgebung auf und generiert damit Arbeit. alternative Definition (nie > 1): $\eta = \frac{W}{\Lambda G n}$

MAXIMALER UMWANDLUNGSWIRKUNGSGRAD

• H_2 -Brennstoffzelle: $H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O(g)$

$$\begin{split} \eta_{Zelle,max} &= 1 - \frac{\tau_{\Delta S_R}}{\Delta H_R} \underbrace{\stackrel{@T_{ref}}{\Longrightarrow}}_{\Delta H_R} \\ &= 1 - \frac{\tau_{ref} \left(\left[\bar{s}^0(T_{ref}) \right]_{H_2O(g)} - \left[\bar{s}^0(T_{ref}) \right]_{H_2} - 0.5 \left[\bar{s}^0(T_{ref}) \right]_{O_2} \right)}{\left[\bar{h}_f^0 \right]_{H_2O(g)} - \left[\bar{h}_f^0 \right]_{H_2} - 0.5 \left[\bar{h}_f^0 \right]_{O_2}} = 0.95 \end{split}$$

• Methanol-Brennstoffzelle: $CH_2COH(l) + 1.5O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O(g)$

$$\begin{split} & \eta_{Zelle,max} = 1 - \frac{T\Delta S_R}{\Delta H_R} \stackrel{@Tref}{\Longrightarrow} \\ & = 1 - \frac{T_{ref} \left(\left[S^0 (T_{ref}) \right]_{cO_2} + 2 \left[S^0 (T_{ref}) \right]_{H_2O(g)} - \left[S^0 (T_{ref}) \right]_{CH_3COH(l)} - 1.5 \left[S^0 (T_{ref}) \right]_{O_2} \right)}{\left[\overline{R}_p^0 \right]_{CO_2} + 2 \left[\overline{R}_p^0 \right]_{H_2O(g)} - \left[\overline{R}_p^0 \right]_{CH_3COH(l)} - 1.5 \left[\overline{R}_p^0 \right]_{O_2} } = 1.07 \end{split}$$

ÜBERSICHT BRENNSTOFFZELLEN

AFC Alkaline Fuel Cell

@ 60-80°C / KOH-Lösung

$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Rightarrow \begin{cases} A:: H_2 + 20H^- \rightarrow 2H_2O + 2e^- \\ K:: 0.5O_2 + H_2O + 2e^- \rightarrow 20H^- \end{cases}$$

v.a. in der Raumfahrt, wegen tiefer Betriebstemperatur, Akkus..

• PEMFC Proton Exchange Membrane Fuel Cell

@ 80-90°C / Kunststoffmembran

$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Longrightarrow \begin{cases} A :: & H_2 \rightarrow 2H^+ + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + 2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2O \end{cases}$$

v.a. in der Autoindustrie, wegen tiefer Betriebstemperatur, Akkus...

• PAFC Phosphoric Acid Fuel Cell

@ 160-220°C / konzentrierte Phosphorsäure

$$H_2 + 0.5O_2 \to H_2O \Longrightarrow \begin{cases} A :: & H_2 \to 2H^+ + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + 2H^+ + 2e^- \to H_2O \end{cases}$$

Autoindustrie (grosse Fahrzeuge), Kraftwerke, WKK, BHKW

• MCFC Molten Carbonate Fuel Cell

@ 600-650°C / Kalium- und Lithiumcarbonat

$$H_2 + 0.5O_2 \to H_2O \Longrightarrow \begin{cases} A :: H_2 + CO_3^{2-} \to H_2O + CO_2 + 2e^- \\ K :: 0.5O_2 + CO_2 + 2e^- \to CO_3^{2-} \end{cases}$$

Hochtemperaturandwendungen: Kraftwerke, WKK, BHKW

• SOFC Solid Oxid Fuel Cell

@ 950-1000°C / Zirkonoxid

$$H_2 + 0.5O_2 \rightarrow H_2O \Longrightarrow \begin{cases} A :: H_2 + 0^{2-} \rightarrow H_2O + 2e^- \lor CO + O^{2-} \rightarrow CO_2 + 2e^- \cr K :: 0.5O_2 + 2e^- + O^{2-} \end{cases}$$

Hochtemperaturandwendungen: Kraftwerke, WKK, BHKW

BERECHNUNGEN AN EINER BRENNSTOFFZELLE

•	Strom	$I = \dot{n}_e \cdot e \cdot N_A = \dot{n}_e \cdot f = \dot{n}_{fuel} \cdot z \cdot f$
		$z=\#e^-$, $\dot{n}_{fuel}=rac{\dot{m}_{fuel}}{M_{fuel}}$

• Leistung
$$P_{FC} = -U \cdot I$$

• char. Spannungen
$$U_H(T) = \frac{\overline{H}_U}{z \cdot f} = \frac{-\Delta \overline{h}_R}{z \cdot f}$$

$$U_{rev}(T) = \frac{-P_{FC,rev}}{z \cdot f} = \frac{-\Delta \overline{g}_R}{z \cdot f}$$

$$U_{rev}(T) = \frac{\frac{1}{P_{FC,rev}}}{\frac{1}{z \cdot f}} = \frac{-\Delta \bar{g}_R}{\frac{1}{z \cdot f}}$$

• 1HS
$$\dot{Q} + P_{FC} = -\dot{n}_{fuel} \overline{H}_U$$

$$\begin{split} \bullet \text{ W\"{a}rmestr\"{o}me} \qquad & \dot{Q} = \frac{\Delta \bar{h}_R}{z \cdot f} I - P_{FC} = \dot{n}_{fuel} \Delta \bar{h}_R - P_{FC} \\ & = \dot{Q}_{rev} + \dot{Q}_{irr} = -[U_H - U(I)]I \\ & \dot{Q}_{rev} = -[U_H - U_{rev}]I = \dot{Q} - \dot{Q}_{irr} \end{split}$$

$$\dot{Q}_{rev} - -[U_H - U_{rev}]I - Q - Q_{irr}$$

 $\dot{Q}_{irr} = -[U_{rev} - U(I)]I = \dot{Q} - \dot{Q}_{rev} = -T\dot{S}_{erz}$

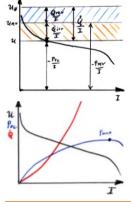
• Fuel Cell Stack
$$P_{stack} = \#FC \cdot P_{FC}$$
 $U_{stack} = \#FC \cdot U_{FC}$
• Effizienz $\eta_{FC} = \eta_1 \cdot \eta_{U,H} = \eta_1 \cdot \frac{P_{FC}}{P_{FC} + Q}$

• Effizienz
$$\eta_{FC} = \eta_I \cdot \eta_{U,H} = \eta_I \cdot \frac{P_{FC}}{P_{FC} + \dot{Q}}$$
 $\eta_I = \text{Umsetzungswirkungsgrad}$

Bei Berechnung von $\Delta \bar{h}_{P}$ bzw $\Delta \bar{q}_{P}$:

Normalerweise wird H₂O immer gasförmig abgegeben, auch wenn die Brennstoffzelle bei Standardbedingungen arbeitet

U-I DIAGRAMM



← Der orange Bereich steht für den irreversiblen Wärmeverlust, der blaue für den reversiblen. Gäbe es keine Irreversibilitäten, so wäre die Leistung höher, nämlich bis \dot{P}_{rev} . Trotzdem könnte der blaue Teil nicht direkt genutzt werden; doch würde diese Wärme, wegen ihrer hohen Temperatur, wieder von der Umgebung aufgenommen werden. weshalb ihr Verlust reversibel ist.

← Um die maximale Leistung zu erreichen, muss man grosse Wärmeverluste in Kauf nehmen.

METHANOL BRENNSTOFFZELLE

- Gegeben: $CH_3COH(l) + 1.5O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O(g)$ @ $\{T_{ref}, p_{ref}\}$ $U = 0.2\tilde{I}^2 - 0.9\tilde{I} + 1$, $\tilde{I} = \frac{I}{I}$, \dot{m}_{fuel}
- Berechnungen:

$$\begin{split} \dot{Q} &= \frac{m_{fuel}}{M_{fuel}} \Delta \bar{h}_R - P_{FC} \ , \ \Delta \bar{h}_R = \left[\bar{h}_f^0 \right]_{CO_2} + 2 \left[\bar{h}_f^0 \right]_{H_2O(g)} - \left[\bar{h}_f^0 \right]_{CH_3COH(l)} \\ P_{max} &= ? \quad \frac{\partial (-UI)}{\partial I} = \frac{\partial (-UI)}{\partial I} = \frac{\partial (-0.2I^3 + 0.9I^2 - I)}{\partial I} = -0.6\tilde{I}^2 + 1.8\tilde{I} - 1 = 0 \\ \Rightarrow TR :: solve(...,\tilde{I}) \end{split}$$

 Λ Wie schon erwähnt, kann $\Delta S_R > 0$ sein, was hier der Fall ist. Berechnet man U_H und U_{rev} , so sieht man, dass $U_{rev} > U_H$ ist und deshalb Wärme von der Umgebung aufgenommen wird, $\dot{Q}_{ran} > 0$, gerade umgekehrt wie im Diagramm oben gezeichnet. Daraus folgt auch, dass $|\dot{Q}_{irr}| > |\dot{Q}|$.

KOMPRESSIBLE STRÖMUNGEN DURCH DÜSEN

• Schallgeschwindigkeit c, mit $\kappa = 1.4$ für 2-atomige Gase

$$c = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\kappa p/\rho}$$

- Bsp. 1:
$$c_{air}=\sqrt{\kappa RT}=\sqrt{1.4\cdot \frac{1000\cdot R}{M_{air}}T} \stackrel{@T=293K}{=\!=\!=\!=} c_{air}=343\frac{m}{s}$$

- Bsp. 2:
$$c_{He} = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\frac{5}{3} \cdot \frac{1000 \cdot \bar{R}}{M_{He}}} T \xrightarrow{@T = 293K} c_{He} = 1007 \frac{m}{s}$$

Machzahl Ma (oder einfach nur M):

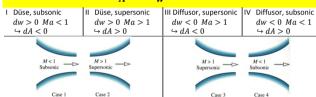
$$Ma = \frac{w}{c}$$

- $Ma > 1 \Rightarrow Überschall / supersonic$
- $Ma < 1 \Rightarrow$ Unterschall / subsonic

ALLGEMEINES VERHALTEN IN DÜSEN UND DIFFUSOREN

- Eine Düse/nozzle hat die Eigenschaft, die Geschwindigkeit eines Fluids, und damit seine kinetische Energie, zu erhöhen. dw > 0.
- Ein **Diffusor/diffuser** hat die Eigenschaft, die Geschwindigkeit eines Fluids, und damit seine kinetische Energie, zu verringern. dw < 0.
- Beziehung zwischen Mach-Zahl, Fläche und Geschwindigkeit:

$$\frac{dA}{A} = -\frac{dw}{w}(1 - Ma^2)$$



VENTOURI DÜSE – KONVERGENTE DÜSE

Valve to adjust

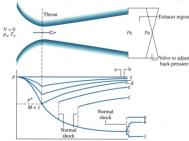
p_R wird sukzessive reduziert:

a,b,c: Beschleunigen der Strömung immer weiter in Düse hinein.

d:
$$M = 1 @ E p_E = p^*$$

e: Trotz der Druckverringerung kann die Strömung nicht mehr weiter beschleunigt werden, in der Düse ändert sich nichts, die Düse ist "abgeriegelt" (engl. choked).

LAVAL DÜSE – KONVERGENT/DIVERGENTE DÜSE



 p_R wird sukzessive reduziert: a,b,c: Beschleunigen und darauffolgendes Abbremsen **d**: M = 1 @ Throat danach Valve to adjust back pressure Abbremsen im Diffusor. e,f: Laval-Düse beschleunigt die Strömung weiter, Verdichtungsstoss bringt sie zurück in den Unterschallbereich, jetzt Diffusor.

ISENTROPE STRÖMUNGSFUNKTIONEN

• verlustfreie Bernoulli - Gleichung

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} + gz = const.$$

• Stagnationsenthalpie. -druck und -temperatur:

$$a_0 = h + \frac{w^2}{2}$$

$$p_0 = p + \frac{pw}{2}$$

$$T_0 = T + \frac{w^2}{2c_p}$$

• Isentropenbeziehungen für ein ideales Gas:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\kappa} \qquad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\kappa-1}$$

• Strömungsgeschwindigkeit (aus Stagnationsenthalpie folgend):

$$w = \sqrt{2(h_o - h)} = \sqrt{2c_p(T_o - T)} \xrightarrow{c_p = R\kappa/(\kappa - 1)} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} RT_0 (1 - \frac{T}{T_0})$$
$$= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} p_0 v_0 \left(1 - \frac{T}{T_0} \right) = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} p_0 v_0 \left(1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right)$$

• Massenfluss $\dot{m} = \dot{V} \cdot \rho = A \cdot w \cdot \rho = A \cdot w \cdot v^{-1}$

$$\dot{m} = A \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{v_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}} \right]} \qquad = A \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa}} \right]}$$

 $\downarrow TR :: mdotv(A, p, p_0, v_0, \kappa, R) \downarrow TR :: mdott(A, p, p_0, T_0, \kappa, R)$

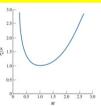
• Schalldruck, -temperatur, -dichte und -geschwindigkeit

$$\begin{split} \frac{p}{p_0} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M a^2\right)^{\frac{\kappa}{1 - \kappa}} \implies p^* = p_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \\ &\frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M a^2\right)^{-1} \implies T^* = T_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right) \\ &\frac{\rho}{\rho_0} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M a^2\right)^{\frac{1}{1 - \kappa}} \implies \rho^* = \rho_0 \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \\ w &= \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} R T_0 (1 - \frac{T}{T_0})} \implies w^* = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} R T_0} = \sqrt{\kappa R T} = c \end{split}$$

Schalldruckguerschnitt:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{Ma} \left[\left(\frac{2}{\kappa + 1} \right) \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2 \right) \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}$$
Es existieren jeweils 2 Werte, der

grössere im Überschallbereich und der kleinere im Unterschallbereich (nachdem ein Verdichtungsstoss stattgefunden hat oder der Überschallberech gar nie erreicht war)



VENTOURI DÜSE

• Fall "offen" $p > p^*$ $\Rightarrow \dot{m} = f(p, p_0, \dots)$

 Fall "abgeriegelt" p < p* $\Rightarrow \dot{m} = f(p^*, p_0, ...)$



 \Rightarrow in diesem Fall ist der Ausgangsdruck p^* , und nicht p. Also fliesst auch p^* in den Massenstrom ein, der durch Senken von p nicht weiter erhöht werden kann, man müsste schon p_0 erhöhen oder T_0 senken. $\dot{m}^* \propto A^* \cdot p_0 \cdot \sqrt{1/T_0}$

Zuerst immer überprüfen, ob die Düse "abgeriegelt" ist.

THERMODYNAMIK 2:: LTNT

DEFINITIONEN

KONSTANTEN

- Boltzmann-Konstante $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \, rac{W}{m^2 \cdot K^4}$

EINHEITEN

- Wärmestrom ġ: [W] $\dot{q}': \left[\frac{w}{m}\right]$ - Wärmestrom pro Länge - Wärmestrom pro Fläche - Wärmestrom pro Volumen - Wärmeleitfähigkeit - Wärmeübergangskoeffizient $a: \left[\frac{m^2}{a}\right]$ - Temperaturleitfähigkeit - Wärmeleitwiderstand $R_{leit}, R_{conv}: \left[\frac{\kappa}{w}\right]$ $k: \left[\frac{W}{m^2 \cdot K}\right]$ - Wärmedurchgangskoeffizient $k_L: \left[\frac{vv}{m \cdot K}\right]$ - Linearer Wärmedurchgangskoeffizient

m: [1]

 $\nu: \lceil \frac{m^2}{2} \rceil$

 μ : $[Pa \cdot s] = \left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right] = \left[\frac{N \cdot s}{m^2}\right]$

DIMENSIONSLOSE KONSTANTEN

- Rippenparameter

- Kinematische Viskosität

- Dynamische Viskosität

- Bi	Biot-Zahl	$Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_{festk\"{o}rper}}$
- Nu	Nusselt-Zahl	$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_{fluid}}$
- Re	Reynolds-Zahl	$Re_{x} = \frac{u_{\infty} \cdot x}{v} = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot x}{\mu}$
		$Re_D = \frac{u_{\infty} \cdot D}{v} = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot D}{\mu}$
		$Re_L = \frac{u_{\infty} \cdot L}{v} = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot L}{\mu}$
- Pr	Prandtl-Zahl	$Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda_{fluid}} = \frac{\dot{\nu}}{a_{fluid}}$ mit $a = \frac{\lambda}{\rho c}$
- Pe	Peclet-Zahl	$Pe_r = Re_r \cdot Pr$

ÜBERSICHT

Wärme kann durch 3 verschiedene Mechanismen übertragen werden; durch Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung.

WÄRMELEITUNG

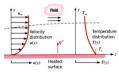
$$\dot{q}_{leit}^{"} = -\lambda \frac{dT}{dx}$$

$$\dot{q}_{leit} = -A \cdot \lambda \frac{dT}{dx}$$



KONVEKTION

$$\dot{q}_{conv}^{\prime\prime} = \alpha (T_W - T_{\infty})$$
 $\dot{q}_{conv} = A \cdot \alpha (T_W - T_{\infty})$



STRAHLUNG

$$\dot{q}_{rad}^{"} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^{4}$$

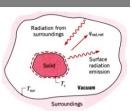
$$\dot{q}_{rad} = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^{4}$$

wobei ε ein Materialparameter ist $\varepsilon_{perfekt,schwarzer,K\"{o}rper} = 1$

Abstahlung – Anstahlung:

$$\dot{q}_{rad,net}^{"} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s^4 - T_{sur}^4)$$

$$\dot{q}_{rad,net}^{"} = A \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T_s^4 - T_{sur}^4)$$



DIE WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG

allgemein:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot (\lambda \cdot \vec{\nabla} T) + \dot{q}_{Quellen}^{""}$$

• kartesisch: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}$ • zylindrisch: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}$ • sphärisch: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \sin \phi \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}$

VEREINFACHUNGEN

• $\lambda = const.$ $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T + \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}$ $\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + \frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\lambda} \quad \text{mit } a = \frac{\lambda}{\rho c}$ • & ohne Quellen: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \cdot \Delta T \iff \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T$ • & stationär $\frac{\partial}{\partial t} = 0$: $\Delta T + \frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\lambda} = 0$

• & stationär und ohne Quellen: $\Delta T = 0$

TEMPERATURVERTEILUNGEN EINDIMENSIONAL

Soll die Temperaturverteilung angegeben werden, muss die Wärmeleitungsgleichung integriert werden.

• $\lambda = const.$ & stätionär & ohne Quellen:

- kartesisch: $\frac{\partial^{-1} c}{\partial x^{2}} = 0$ $\frac{\partial T}{\partial x} = C_{1}$ $T = C_{1}x + C_{2}$ - zylindrisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_{1}}{r}$ $T = C_{1}\ln r + C_{2}$ - sphärisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^{2} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$ $\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{C_{1}}{r^{2}}$ $T = -\frac{C_{1}}{r} + C_{2}$

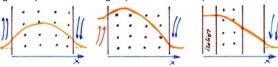
• $\lambda = const.$ & stätionär & mit konstanten Quellen:

- kartesisch: $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\lambda} \xrightarrow{\int \partial x} \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\lambda} x + C_1$ $T = -\frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2$

- zylindrisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{q_{uuellen}^{\prime\prime\prime\prime}}{\lambda} r \xrightarrow{\int \partial r} \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{q_{uuellen}^{\prime\prime\prime\prime}}{2\lambda} r + \frac{c_1}{r}$ $T = -\frac{q_{uuellen}^{\prime\prime\prime\prime}}{4\lambda} r^2 + C_1 \ln r + C_2$

- sphärisch: $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = - \frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{2} r^2 \xrightarrow{\int \partial r} \frac{\partial T}{\partial r} = - \frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{3\lambda} r + \frac{c_1}{r^2}$ $T = - \frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{6\lambda} r^2 - \frac{c_1}{r} + C_2$

- λ = const. & stätionär & mit inkonstanten Quellen:
 Quellterm einsetzen und integrieren
- Einige Temperaturverteilungen (Punkte » Quellen):



RANDBEDINGUNGEN

• Randbedingungen 1. Art: $T(x_0, t) = T_0$

• Randbedingungen 2. Art: $\dot{q}''(x_0,t) = -\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=x_0} \xrightarrow{isoliert} = 0$

• Randbedingungen 3. Art: $\dot{q}'' = -\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=x_0} = \alpha (T(x_0,t)-T_\infty)$

⚠ Bei verschiedenen Materialien braucht es auch verschiedene Gleichungen, welche mittels den Randbedingungen - gleiche Temperatur an der Schnittstelle (1) und gleicher Wärmefluss (2) an der Schnittstelle - verbunden werden können.

⚠ Bei Konvektion gilt (3) nur, wenn die Koordinatenrichtung in Normalenrichtung zeigt. Sonst = $+\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=x_0} = \alpha(T(x_0,t) - T_\infty)$

KONKRETE PROBLEMSTELLUNGEN

• ebene Wand, keine Quellen:

 $\begin{array}{ll} \text{gegeben:} T_1, T_2, L \\ \text{Ansatz:} \ T = C_1 x + C_2 \\ \text{RB1:} \quad T(x=0) = T_1 = C_2 \\ \text{RB2:} \quad T(x=L) = T_2 = C_1 L + T_1 \\ \text{L\"osung:} \ T = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1 \end{array} \Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$

• ebene Wand, keine Quellen, auf beiden Seiten Konvektion:

gegeben: λ , $T_{\infty,1}$, α_1 , $T_{\infty,2}$, α_2 , LAnsatz: $T = C_1 x + C_2$

RB1: $+\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=0} = \alpha_1 \left(T(0) - T_{\infty,1}\right)$ $+\lambda C_1 = \alpha_1 \left(C_2 - T_{\infty,1}\right) \qquad \Rightarrow C_1 = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} \frac{\lambda}{\alpha_2} + L}$

RB2: $-\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{x=L} = \alpha_2 (T(L) - T_{\infty,2})$ $-\lambda C_1 = \alpha_2 (C_1 L + C_2 - T_{\infty,2}) \Rightarrow C_2 = T_{\infty,1} + \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}}$

Lösung: $T = \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2} + L} x + T_{\infty,1} + \frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{L\alpha_1}{\lambda}}$

Rohrisolation, keine Quellen:

gegeben:
$$r_1, T_1, r_2, T_2$$

Ansatz:
$$T = C_1 \ln r + C_2$$

RB1:
$$T(r = r_1) = T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2 \implies C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\ln^{\frac{r_2}{2}}}$$

RB2:
$$T(r = r_2) = T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2 \implies C_2 = T_1 - \frac{(T_2 - T_1) \ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

Lösung:
$$T = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \ln \frac{r}{r_1} + T_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \ln \frac{r}{r_2} + T_2$$

• Ebene Wand mit konstanten Wärmequellen:

gegeben:
$$T_1, T_2, L, \dot{q}_{Quellen}^{""}$$

Ansatz:
$$T=-\frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{2\lambda}x^2+C_1x+C_2$$

RB1: $T(x=0)=T_1=C_2$ $\Rightarrow C_2=T_1$

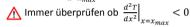
RB1:
$$T(x = 0) = T_1 = C_2$$
 $\Rightarrow C_2 = T$

RB2:
$$T(x = L) = T_2 = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{""}}{2\lambda}L^2 + C_1L + T_1$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}_{Quellen}^{""}}{2\lambda} L$$

$$\text{L\"osung: } T = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{2\lambda} x^2 + \left(\frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{2\lambda} L\right) x + T_1$$

Maximum:
$$\frac{dT}{dx}\Big|_{x=x_{max}} = 0$$
 $\Rightarrow x_{max} = \frac{L}{2} + \frac{r_2 - r_1}{L} \frac{\lambda}{q_{Quellen}'''}$



• Zylinder mit Wärmequellen:

gegeben:
$$r_0$$
, T_0 , $\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}$

Ansatz:
$$T = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{4^2}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

RB1:
$$\dot{q}''(0) = 0 = \lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{1} = C_1 \cdot \frac{1}{r} \Big|_{1} \Rightarrow C_1 = 0$$

RB2:
$$T(r_0) = T_0 = -\frac{d_{Quellen}^{''''}}{d_2} r_0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = T_0 + \frac{d_{Quellen}^{''''}}{d_2} r_0^2$$

Lösung:
$$T = \frac{\dot{q}_{Quellen}^{""}}{4\lambda} \cdot (r_0^2 - r^2) + T_0$$



- gegeben: $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, T_{\infty}, L, d, \dot{q}_{Ouellen}^{""}$

• geschen:
$$x_1, x_2, x_1, x_3, x_4, q_{Quellen}$$

• gesucht: $T(x)$
• Ansätze: $T_1 = -\frac{q_{Quellen}'''}{2\lambda_1}x^2 + C_1x + C_2$
• $T_2 = C_3x + C_4$

RB1:
$$\dot{q}_{1}^{"}|_{x=0} = 0 = \lambda \frac{dT_{1}}{dx}|_{x=0} = C_{1} \implies C_{1} = 0$$

RB2:
$$\begin{aligned} \dot{q}_1''|_{x=L} &= -\lambda_1 \left(-\frac{\dot{q}_{Quellen}^{''''-1}}{\lambda_1} L \right) = -\lambda_2 C_3 = \dot{q}_2''|_{X=L} \\ &\Rightarrow C_3 = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{''''-1}}{\lambda_2} L \end{aligned}$$

RB3:
$$T_1(L) = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{""}}{2\lambda_1}L^2 + C_2 = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{""}}{\lambda_2}L^2 + C_4 = T_2(L)$$

RB4:
$$\dot{q}_2^{"}|_{x=L+d} = -\lambda_2 \left(-\frac{\dot{q}_{Quellen}^{"}}{\lambda_2} L \right) = \alpha (T_2(L+d) - T_\infty) = \dot{q}_{conv}^{"}$$

$$\frac{a_{Quellen}^{\prime\prime\prime} L}{\alpha} + T_{\infty} = -\frac{a_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\lambda_{2}} \cdot L(L+d) + C_{4}$$

$$\Rightarrow C_{4} = \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime} \cdot L\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L+d}{2}\right) + T_{\infty}$$

33:
$$-\frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{2\lambda_{1}}L^{2} + C_{2} = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\lambda_{2}}L^{2} + \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime} \cdot L\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L+d}{\lambda_{2}}\right) + T_{\infty}$$

$$\Rightarrow C_2 = \dot{q}_{Quellen}^{""} \cdot L\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L}{2\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_2}\right) + T_{\infty}$$

$$\text{L\"osung:} \quad T(x) = \begin{cases} T_1 = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{2\lambda_1} x^2 + \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime} \cdot L\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L}{2\lambda_1} + \frac{d}{\lambda_2}\right) + T_{\infty} \\ T_2 = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime} L}{\lambda_2} x + \dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime} \cdot L\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{L+d}{\lambda_2}\right) + T_{\infty} \end{cases}$$

SPEZIELLE OUELLTERME

- $\dot{q}_{Ouellen} = I^2 R_{el} = I^2 \frac{\rho_{el} \cdot L}{L}$ elektrischer Widerstand:
- $\dot{q}_{Quellen}^{""} = \frac{\dot{q}_{Quellen}}{A^{-L}} = I^{2} \frac{\dot{\rho}_{el}}{A^{2}}$ $\dot{q}_{Quellen}^{""} = -\frac{dI(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} (I_{0} \cdot e^{-ax})$ $\dot{q}_{Quellen}^{""} = a \cdot I_{0} \cdot e^{-ax}$ • Laserabsorption:

LASERABSORPTION



- gegeben: $\lambda_1, T_1, T_2, d, I_0, a$
- gesucht: T(x)

Ansatz:
$$\frac{\partial^{2} T}{\partial x^{2}} = -\frac{\dot{q}_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\lambda} = -\frac{a \cdot l_{0} \cdot e^{-ax}}{\lambda}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{l_{0} \cdot e^{-ax}}{\lambda} + C_{1}$$
$$T(x) = -\frac{l_{0} \cdot e^{-ax}}{\lambda} + C_{1}x + C_{2}$$

$$T(x) = -\frac{l_0 \cdot e^{-ax}}{\lambda \cdot a} + C_1 x + C_2$$
RB1:
$$T(0) = T_1 = -\frac{l_0}{\lambda \cdot a} + C_2 \qquad \Rightarrow C_2 = T_1 + \frac{l_0}{\lambda \cdot a}$$
RB2:
$$T(d) = T_2 = -\frac{l_0 \cdot e^{-ad}}{\lambda \cdot a} + C_1 d + T_1 + \frac{l_0}{\lambda \cdot a}$$

RB2:
$$T(d) = T_2 = -\frac{I_0 \cdot e^{-ad}}{\lambda \cdot a} + C_1 d + T_1 + \frac{I_0}{\lambda \cdot a}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{T_2 - T_1 + \frac{I_0}{\lambda \cdot a} (e^{-ad} - 1)}{d}$$

Lösung:
$$T(x) = -\frac{l_0 \cdot e^{-ax}}{\lambda \cdot a} + \frac{T_2 - T_1 + \frac{l_0}{\lambda \cdot a}(e^{-ad} - 1)}{d}x + T_1 + \frac{l_0}{\lambda \cdot a}$$

STATIONÄRE WÄRMELEITUNG MIT WIDERSTÄNDEN

ANALOGON DES ELEKRTISCHEN STROMES

	Wärmeleitung	Elektrischer Strom
Leitung	$\Delta T = \frac{L}{\lambda \cdot A} \cdot \dot{q}$	$U = R \cdot I$
Konvektion	$\Delta T = \frac{1}{\alpha \cdot A} \cdot \dot{q}$	$U = R \cdot I$

•
$$R_{net,seriell} = \sum_{i} R_{i}$$
 • $R_{net,paralell} = \frac{1}{\sum_{i} \frac{1}{R_{i}}}$

WÄRMELEITWIDERSTÄNDE

$$\dot{q} = \frac{\Delta T}{R_{net}} = \frac{\Delta T}{\sum_{i} R_{i}}$$

$$\dot{q}' = \frac{\Delta T}{L \cdot R_{net}} = \frac{\Delta T}{L \cdot \sum_{i} R_{i}}$$

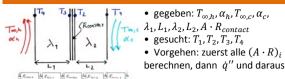
$$\dot{q}'' = \frac{\Delta T}{A \cdot R_{net}} = \frac{\Delta T}{A \cdot \sum_{i} R_{i}}$$

(kartesisch:
$$R_{leit} = \frac{L}{A\lambda}$$
 $A \cdot R_{leit} = \frac{L}{\lambda}$ $\ln(\frac{r_2}{r_1})$ r

• Leitung:
$$\begin{cases} \text{zylindrisch:} \quad R_{leit,cyl} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi L \lambda} & A \cdot R_{leit,cyl} = \frac{r \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda} \\ \text{sphärisch:} \quad R_{leit,sph} = \frac{\frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2}}{4\pi \lambda} & A \cdot R_{leit,sph} = \frac{r^2 \cdot \left(\frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2}\right)}{2\pi L \lambda} \end{cases}$$

- Kovektion:
 - $R_{conv} = \frac{1}{4\pi}$ $A \cdot R_{conv} = \frac{1}{4\pi}$

WÄRMELEITWIDERSTÄNDE



- gegeben: $T_{\infty,h}$, α_h , $T_{\infty,c}$, α_c ,

berechnen, dann \dot{q}'' und daraus $T_{1,2,3,4}$.

$$\begin{split} A \cdot R_{conv,c} &= \frac{1}{\alpha_c} \text{, } A \cdot R_{leit,\lambda_2} = \frac{L_2}{\lambda_2} \text{, } A \cdot R_{leit,\lambda_1} = \frac{L_1}{\lambda_1} \text{, } A \cdot R_{conv,h} = \frac{1}{\alpha_h} \\ \dot{q}'' &= \frac{\Delta T}{A \cdot R_{net}} = \frac{T_{\infty,h} - T_{\infty,c}}{(A \cdot R_{conv,c} + A \cdot R_{leit,\lambda_2} + A \cdot R_{contact} + A \cdot R_{leit,\lambda_1} + A \cdot R_{conv,h})} \\ T_1 &= T_{\infty,c} + \dot{q}'' (A \cdot R_{conv,c}) & T_2 &= T_1 + \dot{q}'' (A \cdot R_{leit,\lambda_2}) \\ T_3 &= T_2 + \dot{q}'' (A \cdot R_{contact}) & T_4 &= T_3 + \dot{q}'' (A \cdot R_{leit,\lambda_1}) \\ \text{(check: } T_{\infty,h} &= T_4 + \dot{q}'' (A \cdot R_{conv,h}) \text{)} \end{split}$$

• falls zylindrisch: $(L \cdot R)_i$ und \dot{q}' statt $(A \cdot R)_i$ und \dot{q}''

WÄRMEDURCHGANGSKOEFFIZIENT

• Wärmedurchgangskoeffizient (von Fläche/Radius abhängig)

$$k = \frac{1}{A \cdot R_{mat}}$$
 $\Rightarrow \dot{q} = k \cdot A \cdot \Delta T$ $\Rightarrow \dot{q}'' = k \cdot \Delta T$

- $k = \frac{1}{A \cdot R_{net}} \qquad \Rightarrow \dot{q} = k \cdot A \cdot \Delta T \qquad \Rightarrow \dot{q}'' = k \cdot \Delta T$ bei der Rohrwand: $k(r) = \frac{1}{2\pi r L \cdot R_{net}} = \frac{1}{\frac{r}{r_1 \alpha_1} + r \sum_{l} \frac{\ln(r_{l+1}/r_l)}{\lambda_l} + \frac{r}{r_2 \alpha_2}}$
- Linearer Wärmedurchgangskoeffizient (vom Radius unabhängig) $k_L = k(r) \cdot 2\pi r = \frac{1}{L \cdot R_{net}} \implies \dot{q} = k_L \cdot L \cdot \Delta T \implies \dot{q}'' = \frac{k_L \cdot \Delta T}{2\pi r}$ - bei der Rohrwand: $k_L = \frac{1}{L \cdot R_{net}} = \frac{2\pi}{\frac{1}{1 - 2 + \sum_{i=1}^{\ln(r_{i+1}/r_i)} + \frac{1}{1 - 2}}}$

KRITISCHER ROHRRADIUS

- Problem: Je dicker die Rohrwand, desto besser die Isolation durch Leitung, aber desto schlechter die Isolation aussen durch Konvektion.
- Lösung: Tradeoff zwischen beiden Argumenten: $\frac{dR_{net}}{dr} = 0$

$$\frac{dR_{net}}{dr_2} = \frac{d}{dr_2} \left(\frac{\ln(\frac{r_2}{r_1^2})}{2\pi L\lambda} + \frac{1}{2\pi r_2 L\alpha} \right) = \frac{1}{2\pi L\lambda} \frac{1}{\frac{r_2}{r_1}} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{2\pi r_2^2 L\alpha} = 0 \quad \Rightarrow r_{crit} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

Der kritische Radius ist das Minimum des R_{net} - r_2 - Diagramms

- $r < r_{crit}$: Je kleiner der Radius desto besser die Isolation.
- r > r_{crit}: Je grösser der Radius, desto besser die Isolation.
- Zahlenbeispiel 1: Heizung (Stahl), $r_{crit} = 12$ m
- \rightarrow perfekt wäre $r = r_{crit}$, sonst so dick wie bezahlbar
- Zahlenbeispiel 2: Korkisolation eines Heizrohres, $r_{crit} = 7.8 \text{mm}$ \rightarrow worst case: $r = r_{crit}$, falls $r > r_{crit}$, so dick wie bezahlbar.

$$Bi = \frac{\alpha L}{\lambda} = \frac{R_{leit}}{R_{conv}} \xrightarrow{\text{radiale Schicht}} \frac{\alpha d}{\lambda} d = \text{Dicke}$$

- $Bi \ll 1$: $R_{conv} \gg R_{leit}$ $R_{leit} \approx 0$. \rightarrow Verbesserung der Wärmeleitung: $\alpha \uparrow$
- $Bi \approx 1$: $R_{conv} \approx R_{leit}$.
- \rightarrow Verbesserung der Wärmeleitung: $\alpha \uparrow$, $\lambda \uparrow$
- $Bi \gg 1$: $R_{conv} \ll R_{leit}$ $R_{conv} \approx 0$.
- \rightarrow Verbesserung der Wärmeleitung: $\lambda \uparrow$





WÄRMELEITUNG IN RIPPEN

ALLGEMEIN

• allgemeine RippenDGL (S = const., u = 0, stationär, keineQuellen/Strahlung):

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{\alpha P}{\lambda S}(T - T_{\infty}) = 0 \text{ mit} \begin{cases} \text{Rippenparameter} & m = \sqrt{\frac{\alpha P}{\lambda S}} \\ \ddot{\text{U}} \text{bertemperatur} & \theta = T - T_{\infty} \end{cases}$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0$$

• allgemeine Lösung:

$$\theta = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

 $\theta_F = \theta(0) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ • 1. Randbedingung:

 $\dot{q}_F = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=0}$ • Wärmestrom:

 $\eta_R = \frac{\dot{q}_F}{\dot{q}_{max}} = \frac{\dot{q}_F}{\alpha \cdot A \cdot \theta_F}$ Rippenwirkungsgrad:

• Geometrisches:

- Ebene Rippe

P = 2(b + t)

 $P = \pi D$

dA = 2(b+t)dx

- Stabrippe:

$$dA = \pi D dx$$

RIPPE MIT ADIABATEM KOPF

 $\theta = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m(L-x))}{\cosh(mL)}$ Lösung:

 Wärmestrom: $\dot{q}_F = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \tanh(mL)$

 $\eta_R = \frac{\tanh(mL)}{mL}$ Rippenwirkungsgrad:

SEHR LANGE RIPPE

 $\theta = \theta_F e^{-mx}$ Lösung: $\dot{q}_F = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m$ Wärmestrom:

 $\eta_R = \frac{1}{}$ Rippenwirkungsgrad:

RIPPE ZWISCHEN 2 FLÄCHEN EINGESPANNT $T_{\nu} = T(L)$

 $\theta_K \sinh(mx) + \theta_F \sinh(m(L-x))$ Lösung: $q_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \frac{\theta_F \cosh(mL) - \theta_K}{\theta_F \cosh(mL)}$ Wärmestrom:

Rippenwirkungsgrad:

KONVEKTION AUCH AM RIPPENENDE

 $\theta = \theta_F \cdot \frac{\cosh(m(L-x)) + \frac{\alpha}{mL} \sinh(m(L-x))}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \sinh(mL)}$ Lösung:

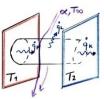
 $\dot{q}_F = \lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot m \cdot \frac{\sinh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \cosh(mL)}{\cosh(mL) + \frac{\alpha}{mL} \sinh(mL)}$ Wärmestrom:

Rippenwirkungsgrad:

RIPPE ZWISCHEN 2 FLÄCHEN EINGESPANNT

• gegeben: $T_1, T_2 = T_{\infty}, T_{\infty}, L, D, \lambda, \alpha$

• gesucht: \dot{q}_L



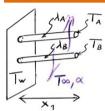
• Vorgehen: 1.HS: $\dot{q}_L = \dot{q}_F - \dot{q}_K$ dabei gilt: $\theta_K = 0$

$$\dot{q}_F = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \frac{\theta_F \cosh(mL)}{\sinh(mL)}$$

$$\dot{q}_K = -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L}$$

$$\begin{split} \dot{q}_K &= -\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\theta_K \sinh(mx) + \theta_F \sinh(m(L-x))}{\sinh(mL)} \right) \Big|_{x=L} \\ &= -\lambda \cdot S \cdot \theta_F \cdot \frac{\cosh(0)}{\sinh(mL)} \cdot (-m) = \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \frac{1}{\sinh(mL)} \\ \dot{q}_L &= \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \frac{(\cosh(mL) - 1)}{\sinh(mL)} \end{split}$$

KORRELATION 2 GLEICHLANGER RIPPEN



• Ausgangslage: 2 gleichlange, lange Rippen mit gleichem Durchmesser aber aus anderem

• gegeben: T_W , T_A , T_B , T_∞ , λ_A

gesucht: λ_P

• Vorgehen: Lösungen für lange Rippen benützen.

$$\theta_{A} = \theta_{F,A}e^{-m_{A}x_{1}} \Longrightarrow (T_{A} - T_{\infty}) = (T_{W} - T_{\infty})e^{-m_{A}x_{1}}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{T_{A} - T_{\infty}}{T_{W} - T_{\infty}}\right) = -m_{A}x_{1}$$

$$\theta_{B} = \theta_{F,B}e^{-m_{B}x_{1}} \Longrightarrow (T_{B} - T_{\infty}) = (T_{W} - T_{\infty})e^{-m_{B}x_{1}}$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{T_{B} - T_{\infty}}{T_{W} - T_{\infty}}\right) = -m_{B}x_{1}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{T_A-T_\infty}{T_W-T_\infty}\right)}{\ln\left(\frac{T_B-T_\infty}{T_W-T_\infty}\right)} = \frac{m_A}{m_B} = \sqrt{\frac{\lambda_B}{\lambda_A}} \qquad \Longrightarrow \lambda_B = \lambda_A \cdot \left(\frac{\ln\left(\frac{T_A-T_\infty}{T_W-T_\infty}\right)}{\ln\left(\frac{T_B-T_\infty}{T_W-T_\infty}\right)}\right)$$

INSTATIONÄRE WÄRMELEITUNG

RAUMUNABHÄNIG AKA 0-DIMENSIONAL

Voraussetzungen:

Annahmen:

T = T(t)

 $\frac{d}{dt}(M \cdot c \cdot T) = -A \cdot \alpha \cdot (T - T_{\infty})$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{\alpha A}{Mc}t} = e^{-t/\tau} \qquad \text{mit } \tau = \frac{Mc}{\alpha A}$$
$$t = -\frac{Mc}{\alpha A} \ln\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}\right) = -\tau \ln\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}\right)$$

wobei die Zeitkonstante $\tau = \frac{Mc}{\alpha A}$ die Zeitspanne bis zur Abkühlung auf $\theta_{neu} = \theta_i/e = 36.8\% \cdot \theta_i$ angibt (Aufheizen bis $\theta_{neu} = e \cdot \theta_i$)

• Geometrisches: $\tau = \frac{Mc}{\alpha A} = \frac{V\rho c}{\alpha A}$ $\tau_{cyl} = \frac{r}{2\alpha(D+2h)}$ - Zylinder: - Kugel:

ABKÜHLEN ZWEIER KUGELN

• Ausgangslage: Eine Aluminium- und eine Stahlkugel werden aus dem Ofen genommen und mit einem Luftstrom gekühlt (α , T_{∞}).

• gegeben: $Bi \ll 1$, ρ_{al} , ρ_{st} , c_{al} , c_{st} , α , T_{∞} , T_i , D

• gesucht: ΔT nach t, $t_{max\Delta T}$

$$T_{al} = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})e^{\frac{-t}{\tau_{al}}}$$

$$T_{st} = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})e^{\frac{-t}{\tau_{al}}}$$

$$T_{st} = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})e^{\frac{-t}{\tau_{st}}}$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial \tau} = 0 = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(e^{\frac{-t}{\tau_{st}}} - e^{\frac{-t}{\tau_{al}}}\right) = \frac{-1}{\tau_{st}} \cdot e^{\frac{-t}{\tau_{st}}} + \frac{1}{\tau_{al}} \cdot e^{\frac{-t}{\tau_{al}}} = 0$$

$$\frac{\tau_{al}}{\tau_{st}} = \frac{e^{\frac{-t}{\tau_{al}}}}{e^{\frac{-t}{\tau_{st}}}} = e^{t\left(\frac{1}{\tau_{st}} - \frac{1}{\tau_{al}}\right)} \implies t_{max\Delta T} = \frac{\ln\left(\frac{\tau_{al}}{\tau_{st}}\right)}{\frac{1}{\tau_{st}}}$$

WÄRMESPEICHER

• Ausgangslage: Ein zvlindrischer Wassertank mit d = h dient als Wärmespeicher. In einem halben Jahr (= 4380h), darf er maximal 20% seiner gegenüber der Umgebung nutzbaren Wärme verlieren. Er ist mit einer Isolationsschicht der Dicke L umgeben.

• Annahmen: $\alpha_{innen} = \infty$ und Zylinderwand \cong linear

• gegeben: ρ_{Wasser} , $c_{p,Wasser}$, $\alpha_{aussen} = \alpha$, λ_{iso}

• gesucht: Durchmesser D des Zylinders ohne Isolation

$$\begin{split} &\frac{T-T_{\infty}}{T_{i}-T_{\infty}}=e^{-\frac{\alpha A}{Mc}t} \stackrel{hier}{\Longrightarrow} 0.8=e^{-\frac{kA}{Mc}t}=e^{-t/\tau_{cyl}} \\ &\tau_{cyl}=\frac{\rho cDh}{2k(D+2h)} \stackrel{h=D}{\Longrightarrow} \frac{\rho cD^{2}}{2k(3D)}=\frac{\rho cD}{6k} \text{ mit } k=\frac{1}{A\cdot R_{net}}=\frac{1}{\frac{L}{\lambda_{lso}}+\frac{1}{\alpha}} \\ &\ln 0.8=-t/\tau_{cyl}=-t/\underline{\rho cD} \qquad \Longrightarrow D=-t/\underline{\rho c} \\ &b = -t/\tau_{cyl} = -t/\underline{\rho c} \\ &b = -t/\tau_{cyl} = -t/\underline{\rho c} \\ &b = -t/\tau_{cyl} = -t/\underline{\rho c} \\ &b = -t/\tau_{cyl} = -t/\tau_{cyl} \\ &c = -t/\tau_{cy$$

HALBUNENDLICHE WAND

 $\bullet~$ Wärmeleitungsgleichung 1-D, $\lambda = const.$, keine Quellen:

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \stackrel{a = \frac{\lambda}{\rho c}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \stackrel{\eta = \frac{x}{\sqrt{4at}}}{\longleftrightarrow} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = -2\eta \frac{\partial T}{\partial \eta}$$

$$\frac{T-T_s}{T_i-T_s} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta \equiv \operatorname{erf}(\eta) \quad \frac{T-T_i}{T_s-T_i} = 1 - \operatorname{erf}(\eta) \equiv \operatorname{erfc}(\eta)$$

• **3 Fälle**: Anfang: $T(x,0) = T_i$ (alle Körper haben überall T_i)

1: Wandtemperatur auf T_s erhöht und gehalten **2**: ab t_0

konstanter Wärmestrom **3**: ab t_0 konvektiver

Wärmeübergang





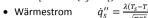




Diffusionslänge / -zeit:

$$x_D = \sqrt{\frac{\lambda/\rho_C \cdot t_D}{a}}$$
 $t_D = x_D^2 \cdot \frac{\rho_C}{1/a}$

@ $\eta = 0.5 \implies \text{erfc}(0.5) = 48\%$ $T - T_i = 0.48(T_s - T_i)$



• Kontakttemperatur zweier halbunendlicher Körper (A und B)

$$T_{s} = \frac{T_{i,A}\sqrt{\lambda_{A}\rho_{A}c_{A}} + T_{i,B}\sqrt{\lambda_{B}\rho_{B}c_{B}}}{\sqrt{\lambda_{A}\rho_{A}c_{A}} + \sqrt{\lambda_{B}\rho_{B}c_{B}}}$$

GRUNDLAGEN DER KONVEKTION

 $\dot{q}_{conv}^{"} = \bar{\alpha}(T_W - T_{\infty})$ Wärmestrom $\dot{q}_{conv} = A \cdot \bar{\alpha} (T_W - T_{\infty})$

• mittlerer Wärmeübergangskoeffizient $\bar{\alpha}$

 $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \int \alpha \, dA$ - allgemein:

- ebene Platte ab Anfang $\bar{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \alpha(x) dx$

 $\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_{0}^{x_0 + L} \alpha(x) dx$ - ebene Platte ab x_0



ALLGEMEINES VORGEHEN

i. Welche Geometrie hat das angeströmte Teil?

ii. Handelt es sich um erzwungene oder natürliche Konvektion?

 \rightarrow erzwungene Konvektion: Re mit Re_{crit} vergleichen

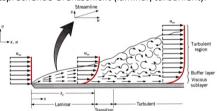
 \rightarrow natürliche Konvektion: Ra mit Ra_{crit} vergleichen

iii. Daraus folgt die entsprechende Grenzschicht (laminar/turbunlent).

iv. Nu mit der entspechenden Formel

berechnen. v. Daraus $\bar{\alpha}$

berechnen.



ERZWUNGENE KONVEKTION :: EBENE WAND

• Kritische Reynoldszahl

$$Re_{crit} = 10^5$$

LAMINARE GRENZSCHICHT $Re < Re_{crit}$

 $\delta = 4.92 \cdot x \cdot Re_x^{-1/2}$ Dicke Geschwindigkeitsgrenzschicht

 $\delta_T = \delta \cdot Pr^{1/3}$ • Dicke Temperaturgrenzschicht

Widerstandsbeiwert

 $c_{f,x} = 0.664 \cdot Re_x^{-1/2}$ $\overline{c_{f,L}} = 1.328 \cdot Re_x^{-1/2}$ - lokal - gemittelt

Nusselt-Zahl

 $Nu_x = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$ - Pr > 0.6 $Nu_{x} = 0.565 \cdot (Re_{x} \cdot Pr)^{1/2}$ $Nu_{x} = \frac{0.3387 \cdot Re_{x}^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}{\left(1 + (0.0468/Pr)^{2/3}\right)^{1/4}}$ - Pr < 0.6

- $Pe_{r} > 100$

TURBULENTE GRENZSCHICHT $Re > Re_{ont}$

 $c_{f,x} = 0.0592 \cdot Re_x^{-1/5}$ • Widerstandsbeiwert ($Re_r \le 10^7$)

 $Nu_{x} = 0.0296 \cdot Re_{x}^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$ Nusselt-Zahl

Fläche ist am Rand der Platte (nur laminar):

Nusselt – Zahl mitteln: $\overline{Nu} = 2 \cdot Nu_{x-1}$

daraus $\bar{\alpha}$ berechnen

• Fläche beginnt erst im Abstand x_0 vom Plattenrand (gilt immer):

 $\alpha(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{fluid}}{}$ - α lokal berechnen:

 $\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_{x_{-}}^{x_{0} + L} \alpha(x) dx$ - mitteln per Integral:

Die Formel $\overline{Nu}=2\cdot Nu_{x=L}$ folgt aus der Integration von der lokalen Formel und gilt nur dann, wenn die Reynoldzahl mit $Re_x^{1/2}$ in Nu_x eingeht. Sonst Variante 2 wählen.

CHIPKÜHLUNG #1

· Ausgangslage: Kühlung eines quadratischen Chips



• gegeben: u_{∞} , T_{∞} , T_{chip} , d, v, Pr (> 0.6), λ_{fluid}

 $Re_L = \frac{u_{\infty} \cdot d}{v} < Re_{crit} \Rightarrow \text{laminar}$ $Nu_x = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$

 $\overline{Nu} = 2 \cdot Nu_{x=L} = 0.664 \cdot Re_L^{1/2} \cdot Pr^{1/3} = 0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty} \cdot d}{v}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$ $\bar{\alpha} = \frac{Nu \cdot \lambda_{fluid}}{v} = \frac{0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty} \cdot d}{v}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{v} = 0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{v}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}$ $\dot{q}_{conv} = \bar{\alpha}A(T_W - T_{\infty}) = \bar{\alpha}d^2(T_{chin} - T_{\infty})$

CHIPKÜHLUNG #2



• alles gleich wie vorher – nur der Chip ist anderst positioniert

 $Re_L = \frac{u_{\infty} \cdot 2d}{v} < Re_{crit} \Rightarrow \text{laminar}$ $Nu_x = 0.332 \cdot Re_x^{1/2} \cdot Pr^{1/3}$

 $\alpha(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{fluid}}{x} = 0.332 \cdot \left(\frac{u_{\infty} \cdot x}{v}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid} \cdot \frac{1}{x}$ $=0.332\cdot\left(\frac{u_{\infty}}{u_{\infty}}\right)^{1/2}\cdot Pr^{1/3}\cdot\lambda_{fluid}\cdot\chi^{-1/2}$

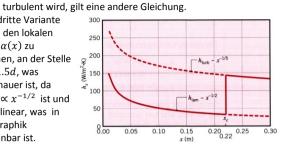
 $\bar{\alpha} = \frac{1}{d} \int_{d}^{2d} \alpha(x) dx = \frac{1}{d} \cdot 0.332 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{v}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid} \cdot \int_{d}^{2d} x^{-1/2} dx$

 $= 0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{u_{\infty}}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid} \cdot \frac{(2d)^{1/2} - d^{1/2}}{u^{1/2}}$ $\dot{q}_{conv} = \bar{\alpha}A(T_W - T_{\infty}) = \bar{\alpha}d^2(T_{chip} - T_{\infty})$

• andere Variante: $\bar{\alpha} = 2 \cdot \bar{\alpha}_{von \, 0 \, bis \, 2d} - \bar{\alpha}_{von \, 0 \, bis \, d}$ $\bar{\alpha} = 2 \left[\frac{0.664 \cdot \left(\frac{u_0 \cdot 2d}{v}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{2d} \right] - \left[\frac{0.664 \cdot \left(\frac{u_0 \cdot d}{v}\right)^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{d} \right]$ $= \left((2d)^{1/2} - d^{1/2} \right) \left[\frac{0.664 \cdot \left(\frac{u_{\infty} \cdot 2d}{v} \right)^{1/2} \cdot pr^{1/3} \cdot \lambda_{fluid}}{d} \right]$

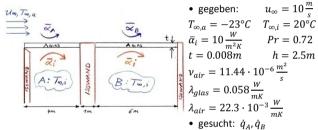
• Diskussion: Allgemein lässt sich sagen, je weiter weg der Chip vom Rand platziert ist, desto kleiner ist die Kühlung, da $\frac{(2d)^{1/2}-d^{1/2}}{d} < \frac{1}{d^{1/2}}$ Dies glit nur, solange man im laminaren Bereich ist, sobald es

Eine dritte Variante wäre, den lokalen Wert $\alpha(x)$ zu nehmen, an der Stelle x = 1.5d. was ungenauer ist, da $\alpha(x) \propto x^{-1/2}$ ist und nicht linear, was in der Graphik



erkennbar ist. RAUMISOLATION

• Ausgangslage: Es soll die Isolation von 2 Zimmern verglichen werden.



• $Re_{crit} = 10^5 = \frac{u_{\infty} \cdot x_{crit}}{v_{air}}$ $\Rightarrow x_{crit} = 0.1m$ ⇒ die ganze Strömung wird als turbulent betrachtet

 $Nu_{x} = 0.0296 \cdot Re_{x}^{4/5} \cdot Pr^{1/3}$ • Zimmer A: $\dot{q}_{A} = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,a}}{R_{net,A}} = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,a}}{\frac{1}{A} \left(\frac{1}{a_{i}} + \frac{t}{\lambda_{nlos}} + \frac{1}{a_{A}}\right)}$

 $\alpha_A(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{air}}{x} = 0.0296 \cdot \left(\frac{u_\infty}{x}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot x^{-0.2}$ $\bar{\alpha}_A = \frac{1}{4} \int_0^4 \alpha(x) dx = \frac{1}{4} \cdot 0.0296 \cdot \left(\frac{u_{\infty}}{v_{\text{cor}}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \int_0^4 x^{-0.2} dx$
$$\begin{split} \overline{\alpha}_A &= \frac{1}{4} \cdot 0.0296 \cdot \left(\frac{u_\infty}{v_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \frac{1}{0.8} \cdot \left[4^{0.8}\right] = 31.8 \frac{W}{m^2 K} \\ \dot{q}_A &= \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,a}}{R_{net,A}} = \frac{43}{\frac{1}{4-2.5 \cdot \ln^3 \cdot 0.088 + \frac{1}{31.8})}} = 1596W \\ \bullet \quad \text{Zimmer B: } \dot{q}_B &= \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,a}}{R_{net,B}} = \frac{T_{\infty,i} - T_{\infty,a}}{\frac{1}{4 \cdot \left[\frac{1}{4i} + \frac{1}{4 \cdot nlas} + \frac{1}{4a_B}\right)}} \end{split}$$

 $\alpha_B(x) = \frac{Nu_x \cdot \lambda_{air}}{x} = 0.0296 \cdot \left(\frac{u_\infty}{v_{ni}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot x^{-0.2}$ $\bar{\alpha}_B = \frac{1}{6} \int_5^{11} \alpha(x) dx = \frac{1}{6} \cdot 0.0296 \cdot \left(\frac{u_\infty}{v_{cd}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \int_5^{11} x^{-0.2} dx$ $\bar{\alpha}_B = \frac{0.0296}{6} \cdot \left(\frac{u_\infty}{v_{air}}\right)^{4/5} \cdot Pr^{1/3} \cdot \lambda_{air} \cdot \frac{1}{0.8} \cdot [11^{0.8} - 5^{0.8}] = 22.2 \frac{W}{m^2 K}$

• Diskussion: Trotz des kleineren $\bar{\alpha}$ ist die verlorene Wärme in B viel grösser, was daraus folgt, dass die äussere Konvektion relativ wenig zur Isolation beiträgt und so die grössere Fläche des Fensters B viel stärker ins Gewicht fällt.

ERZWUNGENE KONVEKTION :: ZYL. KÖRPER & KUGEL

$$T_{Film} = \frac{1}{2} \cdot (T_w + T_\infty)$$

• Dimensionslose Konstanten mit der Filmtemperatur berechnen:

$$Re_D = \frac{u_{\infty} \cdot D}{v(T_{Film})} = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot D}{\mu(T_{Film})} \quad \text{ und } \quad Pr = \frac{c_p \cdot \mu}{\lambda_{fluid}(T_{Film})} = \frac{v(T_{Film})}{a_{fluid}(T_{Film})}$$

gemittelte Nusselt-Zahl

$$\overline{Nu}_D = C \cdot Re_D^m \cdot Pr^{1/3}$$

→ mit den Konstanten aus folgenden Tabellen:

y für Kreiszvlinder:

□ für Kreiszvli

Re_D	\boldsymbol{c}	m
0.4-4	0.989	0.330
4-40	0.911	0.385
40-4000	0.683	0.466
4000-40,000	0.193	0.618
40,000-400,000	0.027	0.805

y für andere Geometrien:

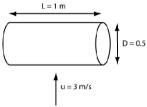
Geometry		Re_D	C	m
Square V→	T D	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.246	0.588
v→ [${}^{\textcolor{red}{\bullet}}_{\textcolor{blue}{\bullet}}D$	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.102	0.675
Hexagon $V \longrightarrow$	D D	$\begin{array}{c} 5 \times 10^{3} 1.95 \times 10^{4} \\ 1.95 \times 10^{4} 10^{5} \end{array}$	0.160 0.0385	0.638 0.782
$v \rightarrow \bigcirc$	₽	$5 \times 10^3 - 10^5$	0.153	0.638
Vertical plate	T D T	$4 \times 10^3 1.5 \times 10^4$	0.228	0.731

$$\begin{array}{l} \text{- Kugel} \quad \overline{Nu}_D = 2 + \left(0.4 \cdot Re_D^{-1/2} + 0.06 \cdot Re_D^{-2/3}\right) \cdot Pr^{0.4} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_W}\right)^{1/4} \\ \text{im Bereich} \ \left\{0.71 < Pr < 380 \ ; \ 3.5 < Re_p < 7.6 \cdot 10^4 \ ; \ 1.0 < \frac{\mu}{m_e} < 3.2 \right\} \end{array}$$

• Gemittelter Wärmeübergangskoeffizient

$$\bar{\alpha} = \frac{\bar{N}\bar{u}_D \cdot \lambda_{fluid}}{D}$$

DIE ÖLBOMBE



· Ausgangslage: Ein Fass mit heissem Öl aus einem Flugzeug mit Höhe h abgeworfen, wobei die Zylinderachse quer zur Fallrichtung steht.

Annahmen:

- $u_{\infty} = const.$

- T nur von t abhängig

• gegeben: u_{∞} , h, T_{∞} , T_i , D, L, $d_{stahlwand}$, $\rho_{\"{o}l}$, $c_{p,\"{o}l}$, ρ_{st} , $c_{p,st}$ $\lambda_{air}, \rho_{air}, c_{p,air}, \mu_{air}, \alpha_S = \alpha_{Stirnfläche}$

• gesucht: T wenn die Bombe am Boden auftrifft

• Vorgehen: instationäre Wärmeleitung, wobei $\bar{\alpha}_M = \alpha_{Mantelfläche}$ zuerst gefunden werden muss mit der erzwungenen Konvektion.

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-\frac{\alpha A}{Mc}t} \stackrel{hier}{\Longrightarrow} e^{-\frac{2\alpha_S \cdot S + \overline{\alpha_M} \cdot A_M}{M_0 \cdot c_{p, 0i} + M_{St} \cdot c_{p, St}} t}$$

• Berechnen von $\bar{\alpha}_M$

$$Re_D = \frac{u_{\infty}D}{v} = \frac{\rho \cdot u_{\infty} \cdot D}{u}$$
 \Rightarrow liegt zwischen 40'000 und 400'000

$$\begin{split} \overline{Nu}_D &= C \cdot Re_D^{\ m} \cdot Pr^{1/3} = 0.027 \cdot \left(\frac{\rho \cdot u_\infty \cdot D}{\mu}\right)^{0.805} \cdot \left(\frac{c_p \cdot \mu}{\lambda}\right)^{1/3} \\ \bar{\alpha}_M &= \frac{\overline{Nu}_D \cdot \lambda_{air}}{D} \end{split}$$

• Restliche benötigte Grössen berechnen:

$$S = \frac{D^2 \pi}{4} \qquad A_M = D\pi L$$

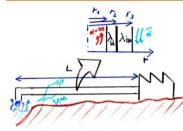
$$M_{\delta l} = \rho_{\delta l} V_{\delta l} = \rho_{\delta l} \cdot \frac{D^2 \pi L}{4}$$

$$M_{st} = \rho_{st} V_{st} = \rho_{st} \cdot O_{st} \cdot d_{st} = \rho_{st} \cdot \left(\pi D \left(\frac{D}{2} + L\right)\right) \cdot d_{st}$$

$$t = \frac{h}{L}$$

• Schliesslich alle Grössen einsetzen und nach T auflösen $\Rightarrow T = T_{\infty} + (T_i - T_{\infty})e^{\frac{2\alpha_{S} \cdot S + \bar{\alpha}_M \cdot A_M}{M_{\bar{0}}! \cdot C_{p,\bar{0}}! + M_{S}t \cdot C_{p,S}t}t}$

GEOTHERMISCHER DAMPE



· Ausgangslage: Der Dampf einer Transportleitung für geothermischen Wasserdampf, welche mit Isolation umgeben ist und vom Wind quer angeströmt wird, darf sich nur bis 5°C über die Sättigungstemperatur abkühlen.

Annahmen:

 $\alpha_{innen} = \infty$ und p = const. = 7bar

 $T_i = 180^{\circ}C$ $\begin{array}{lll} u_{\infty} = 8 \frac{m}{s} & \rho_{air} = 1.1941 \frac{kg}{m^3} & \mu_{air} = 181.1 \cdot 10^{-7} \frac{N \cdot s}{m^2} \\ L_{iso} = 5 cm & c_{p,air} = 1.007 \frac{kJ}{kg \cdot K} & \lambda_{air} = 25.7 \cdot 10^{-3} \frac{W}{m \cdot K} \\ \lambda_{iso} 0.046 \frac{W}{m \cdot K} m & L_{st} = 3 mm & \lambda_{st} = 64 \frac{W}{m \cdot K} \end{array}$ $d_i = 15cm$ $\dot{m} = 0.35 \frac{kg}{}$

• gesucht: L

• Vorgehen: über Wärmeleitwiderstände L finden, wobei $\bar{\alpha}$ zuerst berechnet werden muss mit der erzwungenen Konvektion.

$$\begin{split} Re_D &= \frac{u_\infty \cdot d_a}{v} = \frac{\rho \cdot u_\infty \cdot d_a}{\mu} = 135037 \\ \overline{Nu}_D &= 0.027 \cdot \left(\frac{\rho \cdot u_\infty \cdot d_a}{\mu}\right)^{0.805} \cdot \left(\frac{c_p \cdot \mu}{\lambda}\right)^{1/3} = 324.815 \\ \bar{\alpha} &= \frac{\overline{Nu}_D \cdot \lambda_{air}}{d_a} = 32.6 \frac{W}{m^2 \cdot K} \end{split}$$

Mittlerer Temperaturunterschied gegenüber T_∞ berechnen:

$$T_{2} = T_{sat} + 5^{\circ}C = 169.97^{\circ}C \qquad \text{$\stackrel{\triangle}{\text{\mathcal{T}}}$ A-4}$$

$$\Delta T_{lin} = \frac{\Delta T_{1} + \Delta T_{2}}{2} = 154.985^{\circ}C$$

$$\Delta T_{log} = \frac{\Delta T_{1} - \Delta T_{2}}{\ln(\Delta T_{1}/\Delta T_{2})} = 154.931^{\circ}C$$

• Verlorene Wärme per 1HS berechnen:

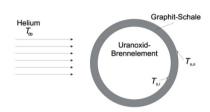
 $\dot{q}_{lost} = \dot{m} \cdot (h_1 - h_2)$ = 8314.96W

h₁ 👉 A-4 @ 180°C h₂ (♣ A-4 @ 169.97°C Wärmeverlust pro Meter Rohr berechnen:

$$\dot{q}' = \frac{\Delta T}{L \cdot R_{net}} = \frac{\Delta T}{\frac{\ln(\frac{T_2}{r_1}) + \ln(\frac{T_2}{r_2})}{2\pi A_{2t} + 2\pi A_{150}} + \frac{1}{2\pi r_3 \bar{q}}} = \frac{\frac{154.931}{\ln(\frac{0.078}{0.078}) + \ln(\frac{0.128}{0.078}) + \frac{1}{2\pi \cdot 0.128 \cdot 32.6}}}{\frac{\ln(\frac{0.078}{0.078}) + \ln(\frac{0.128}{0.078}) + \frac{1}{2\pi \cdot 0.128 \cdot 32.6}}{\frac{1}{2\pi \cdot 0.128 \cdot 32.6}} = 88.43 \frac{V}{n}$$

• Daraus die gesuchte Länge bererchnen:

$$L = \frac{\dot{q}_{lost}}{\dot{q}'} = \frac{8314.96W}{88.43 \frac{W}{m}} = 94m$$



 Ausgangslage: Ein Hochtemperatur-Gas-Reaktor (HTGR) besteht aus kugelförmigen Uranoxid-Elementen, die eine uniforme volumetrische Wärmequelle $\dot{q}_{Ouellen}^{\prime\prime\prime}$ enthalten. Jedes Brennelement ist in eine

Schale aus Graphit eingebettet, die durch einen Heliumgasstrom gekühlt wird. Betrachten Sie ein Brennelement im stationären Zustand unter Vernachlässigung von Wärmestrahlung.

$$\begin{array}{lll} \bullet & \text{gegeben:} & d_i = 10mm & d_a = 12mm \\ u_\infty = 20\frac{m}{s} & T_\infty = 500K & v_{He} = 290 \cdot 10^{-6}\frac{m^2}{s} \\ \lambda_{He} = 0.22\frac{w}{m \cdot K} & \mu_\infty = 283 \cdot 10^{-7} Pa \cdot s \\ Pr = 0.67 & \mu_W = 592 \cdot 10^{-7} Pa \cdot s \\ T_{s,o} = 1300K & \lambda_U = \lambda_G = 2\frac{w}{m \cdot K} \\ \end{array}$$

• gesucht: a) den Wärmestrom pro Brennelement an das Gas (in W).

b) $\dot{q}_{Ouellen}^{\prime\prime\prime}$ und $T_{s,i}$

c) T(r) im Brennelement und T(0)

• Vorgehen: stationäre Wärmeleitung, wobei $\bar{\alpha}$ zuerst gefunden werden muss mit der erzwungenen Konvektion an einer Sphäre.

• Berechnen von $\bar{\alpha}$: (eigentlich dürfte man die Formel nicht verwenden)

$$\begin{split} \overline{Nu}_D &= 2 + \left(0.4 \cdot Re_D^{-1/2} + 0.06 \cdot Re_D^{-2/3}\right) \cdot Pr^{0.4} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu_W}\right)^{1/4} \\ &= 13.899 \qquad \text{(mit} \quad Re_D = \frac{u_\infty \cdot d_a}{\nu} = 827.586\text{)} \\ \bar{\alpha} &= \frac{\overline{Nu}_D \cdot \lambda_{He}}{d_a} = 254.81 \frac{W}{m \cdot K} \end{split}$$

• Daraus Wärmestrom ausrechnen:

$$\dot{q} = \bar{\alpha} \cdot O_{kugel} \cdot (T_{s,0} - T_{\infty}) = \bar{\alpha} \cdot d_a^2 \cdot \pi \cdot (T_{s,0} - T_{\infty}) = 92.22W$$

Quellenterm durch Teilen durch inneres Volumen berechnen:

$$\dot{q}_{Quellen}^{"'} = \dot{q}/V = \dot{q}/\left(\frac{d_a^3 \cdot \pi}{6}\right) = 176.125 \frac{MW}{m^3}$$

• $T_{s,i}$ mittels Wärmeleitwiderstand berechnen

$$T_{s,i} = T_{s,o} + \dot{q} \cdot R_{leit,sph} = T_{s,o} + \dot{q} \cdot \frac{\frac{1}{r_i} \frac{1}{r_a}}{\frac{1}{4\pi\lambda_c}} = 1422.31$$
°C

• Ansatz für
$$T(r)=-\frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{\frac{6\lambda}{6\lambda}}r^2-\frac{c_1}{r}+C_2$$
 mit $C_1=0$ (Symmetrie)
• 2.RB: $T(r_i)=T_{s,i}=-\frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{6\lambda}r_i^2+C_2$ $\Rightarrow C_2=T_{s,i}+\frac{q_{Quellen}^{\prime\prime\prime}}{6\lambda}r_i^2$

•
$$C_2$$
 ist auch gleich $T(0) = -\frac{d_{Quellen}^{mod}}{c_2} 0^2 - \frac{0}{r} + C_2 = C_2$
 $C_2 = T(0) = T_{max} = T_{s,i} + \frac{d_{Quellen}^{mod}}{c_2} r_i^2 = 1789.24^{\circ}C$