QM II Serie 7

Sebastian Keller
Richard Küng

---

(1) $$|\psi\rangle = sd(\phi_1, \ldots, \phi_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_N(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_1(x_N) & \cdots & \phi_N(x_N) \end{vmatrix}$$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} U_{1j}\phi_j(x_1) & \cdots & U_{Nj}\phi_j(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{1j}\phi_j(x_N) & \cdots & U_{Nj}\phi_j(x_N) \end{vmatrix} = U_{ik}\phi_k(x_j)$$

$$\det(U_{ik}\phi_k(x_j)) = \det U_{ik} \cdot \det \phi_k(x_j) = \det U \cdot |\psi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\tilde{\psi}| = \det(U)^* \cdot \langle\psi|$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\langle\tilde{\psi}|O|\tilde{\psi}\rangle}} = \underbrace{\det U \cdot \det U^*}_{\substack{=1 \\ (UU^* = \mathbb{1})}} \langle\psi|O|\psi\rangle = \underline{\underline{\langle\psi|O|\psi\rangle}}$$

③ Skalierung von T und V:

- $V_{e^\lambda x} = \dfrac{1}{|e^\lambda x|} = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{1}{|x|} = e^{-\lambda} V_x$

- $T_{e^\lambda x} = -\Delta_{e^\lambda x} = -\sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2}{\partial(e^\lambda x_i)^2} = -e^{-2\lambda} \sum_i \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2} = e^{-2\lambda} T_x$

Virialsatz für 1 Teilchen

Sei φ_* der Grundzustand, dann ist $\dfrac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathcal{E}[\varphi_* + \lambda\,\delta\varphi] = 0$ (1)

mit $\delta\varphi$ beliebige Variation, $\mathcal{E}[\varphi_\lambda] = \langle \varphi_\lambda | H | \varphi_\lambda \rangle$

- Setze $\varphi_\lambda(x) = e^{-3/2\,\lambda}\,\varphi(e^{-\lambda}x)$. Dann gilt (als Spezialfall von (1)):

$\dfrac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \mathcal{E}[\varphi_\lambda] = 0 \qquad (\varphi_{\lambda=0}(x) = \varphi_*(x))$

- $\langle \varphi_\lambda | \varphi_\lambda \rangle = 1 \qquad \langle \varphi_\lambda, \varphi_\lambda \rangle = \int d^3x\, e^{-3\lambda} |\varphi_*(\underbrace{e^{-\lambda}x}_{=y})|^2 \qquad d^3y = e^{-3\lambda} d^3x$

$= \int d^3y\, |\varphi_*(y)|^2 = 1$

- $\langle \varphi_\lambda | H | \varphi_\lambda \rangle = \langle \varphi_\lambda | T_x | \varphi_\lambda \rangle + \langle \varphi_\lambda | V_x | \varphi_\lambda \rangle$

$= \int (e^{-3/2\,\lambda})^2\, \varphi^*(e^{-\lambda}x)\, T_x\, \varphi(e^{-\lambda}x)\, d^3x + \langle \varphi_\lambda | V_x | \varphi_\lambda \rangle$

$\overset{y = e^{-\lambda}x,\ d^3y = e^{-3\lambda}d^3x}{=} \int \varphi^*(y)\, T_{e^\lambda y}\, \varphi(y)\, d^3y + \langle \varphi_\lambda | V_x | \varphi_\lambda \rangle$

$$= e^{-2\lambda} \int \varphi^*(y)\, T_y\, \varphi(y)\, d^3y \; + \langle \varphi_\lambda | V_x | \varphi_\lambda \rangle$$

$$= e^{-2\lambda} \langle \varphi_* | T | \varphi_* \rangle + \underbrace{\langle \varphi_\lambda | V_x | \varphi_\lambda \rangle}$$

$$\underset{\text{Analoge Rechnung}}{=} e^{-\lambda} \langle \varphi_* | V | \varphi_* \rangle$$

$$= \underbrace{e^{-2\lambda} \langle T \rangle + e^{-\lambda} \langle V \rangle}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \left(\quad \right) = 0$$ (siehe vorherige Seite)

$$\Rightarrow \quad -2 \langle T \rangle - \langle V \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\langle T \rangle + \langle V \rangle = 0$$

N-Teilchen

$$\boxed{H = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \frac{\Delta_j}{2m}}_{T_x} \underbrace{- \sum_{j=1}^{N} \frac{Ze^2}{|x_j|} + \sum_{1 \le i < j \le N} \frac{e^2}{|x_i - x_j|}}_{V_x}}$$

$$\Psi(\underline{x}, \underline{s}) = sd(\varphi_i(x_j, s_j))$$

wähle Reskalierung: $\Psi_\lambda(\underline{x}, \underline{s}) = e^{-\frac{3N}{2}\lambda}\, \Psi(e^{-\lambda}\underline{x}, \underline{s})$

$$\langle \Psi_\lambda | H | \Psi_\lambda \rangle = \sum_{\underline{s}} \int_{\mathbb{R}^{3N}} \Psi_\lambda^*(\underline{x}, \underline{s})\, H_x\, \Psi_\lambda(\underline{x}, \underline{s})\, d^{3N}\underline{x}$$

Reskalierung: $\underline{x} \to e^{\lambda}\underline{x}$

$d^{3N}\underline{x} \Rightarrow e^{3N\lambda} d^{3N}\underline{x}$

jetzt gleich wie bei einem Teilchen

$$= e^{-2\lambda}\langle T \rangle + e^{-\lambda}\langle V \rangle$$

$$\Rightarrow \quad 2\langle T \rangle + \langle V \rangle = 0$$