Simon Miescher, 2012

Analysis I

Komplexe Zahlen

$\Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2} \quad \Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2}$

$\cos(\phi)=\frac{\Re(z)}{|z|} \quad \sin(\phi)=\frac{\Im(z)}{|z|}$

Wurzelrechnung: $z=|w|^{1/n} e^{i\frac{\phi_w}{n}+i\frac{2k\pi}{n}}, k=0,1,\ldots,n-1$

Folgen

Abstandfunktion muss f. Bedingungen erfüllen:

i) $d(x,y)\geq 0, \forall\ x,y\in X,\ d(x,y)=0\rightarrow x=y$

ii) $d(x,y)=d(y,x)$

iii) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$

Def. Konvergenz (x Grenzwert):

$\forall\ \epsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\forall\ n\in\mathbb{N}, n\geq n_0: d(x_n,x)<\epsilon$

Rechenregeln:

i) $\lim_{n\to\infty} x_n=x,\ \lim_{n\to\infty} y_n=y\rightarrow\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=x+y$

ii) $falls\ x\neq 0\rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x} \quad \lim_{n\to\infty}|x_n|=|x| \quad x_n\leq y_n\rightarrow x\leq y$

iii) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=x\ \ und\ \ a_n\leq c_n\leq b_n$

iv) $f\ stetig\rightarrow\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$

$(x_n)\ konv.\ \rightarrow\ (x_n) beschränkt,\quad (x_n) unbeschränkt\ \rightarrow\ (x_n)\ konv.\ nicht$

Satz: (x_n) monoton & beschränkt $\rightarrow(x_n)$ konvergiert

Def. Teilfolge: //gleiche Reihenfolge & unendlich viele Elemente

Satz: $\lim_{n\to\infty}(x_n)=x\rightarrow\lim_{n\to\infty}(x_{n_k})=x\ \forall\ Teilfolgen$

Def. Häufungspunkt: $\forall\ \epsilon>0, B_\epsilon(x)\cap(x_n)\#\infty$ // ∞ Elemente

Def CF: $\forall\ \epsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ s.d.\ \forall\ n,m\in\mathbb{N}, n\geq n_0, m\geq n_0\ gilt: d(x_n,x_m)<\epsilon$

Für vollst. Räume($\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}^n, nicht\ \mathbb{Q}$) konvergieren alle Cauchyfolgen

Reihen

Def. Abs. Konvergenz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ konv.\ absolut\ \ falls \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\ konvergiert$

Rechenregeln und wichtige Reihen:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ konv.\rightarrow\lim_{k\to\infty} a_k=0(a_k: Nullfolge)$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} b_k\ konv.\rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

iii) Harmonische Reihe: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ konv. Für $s>1$ / div. Für $s\leq 1$

iv) geometrische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}, z\in\mathbb{C}, |z|<1$

Konvergenzkriterien:

i) Majorantenkriterium:

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\ Konvergent,\ falls\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ s.d. |a_n|<b_n\forall\ n>n_0\rightarrow\sum_{k=1}^{\infty} a_k\ konv.\ absolut$

ii) Minorantenkriterium:
$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \, divergent\,,\, falls\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, s.d.\, a_n > b_n \,\forall\, n > n_0 \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, divergiert$$

iii) Leibnitzkriterium: (a_n) pos. monotone NF
$$\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \, konvergiert$$

iv) Cauchykriterium: $s_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. $\Leftrightarrow$ (s_n) Cauchyfolge

v) Quotientenkriterium: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} := q \begin{cases} |q| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, konv.\, absolut \\ |q| > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \, divergiert \\ |q| = 1 \Rightarrow \quad keine\ Aussage \end{cases}$

vi) Wurzelkriterium $\limsup_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|} := g$ gleiche Kriterien wie bei Quotientekriterium

In Riemannsche Summe umschreiben fèr stetige Fkt. Gilt bsp:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Potenzreihen

Def. Potenzreihe: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

Def. Konvergenzradius: $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \exists \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

Satz: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^k \begin{cases} |z| < R \rightarrow konvergiert \\ |z| > R \rightarrow divergiert \\ |z| = R \rightarrow beides\ möglich \end{cases}$

Stetige Funktionen

Def: $f : X \rightarrow Y$

i) f heisst injektiv, falls $\forall\, x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) = \rightarrow x_1 = x_2$

ii) f heisst surjektiv, falls $\forall\, y \in Y \,\exists x \in X : f(x) = y$

iii) f heisst bijektiv, falls f surjektiv und injektiv

iv) f heisst stetig in x_0 falls
$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists \delta > 0\, s.d.\, \forall\, x \in X : d_x(x, x_0) < \delta \rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

v) f heisst stetig, falls f stetig in $x_0 \,\forall\, x_0 \in X$

vi) f heisst gleichmässig stetig, falls
$\forall\, \epsilon > 0 \,\exists \delta > 0\, s.d.\, \forall\, x_0, x \in X : d_x(x, x_0) < \delta \rightarrow d_y(f(x), f(x_0)) < \epsilon$

vii) f heisst libschitz-stetig, falls
$\exists L > 0 : d_y(f(x), f(x_0)) < L \cdot d_x(x, x_0)$

viii) libschitz-stetig $\rightarrow$ gleichmässig stetig $\rightarrow$ stetig

Eine Summe, Produkt oder Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.

st. funkt. $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}^+$ $\exp(x) \in \mathbb{R}$ $\log(x) \in \mathbb{R}_0^+$ $\sin(x), \cos(x) \in \mathbb{R}$

Satz: f stetig in $x_{0c} \Leftrightarrow \forall\, (x_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 : \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

nützlich: Gegenbeispiel zeigen

Def. Konkav: $\rightarrow f''(x) > 0$

Simon Miescher, 2012

Zwischenwertsatz

$$a,b\in\mathbb{R}, a\leq b, f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}\ stetig \Rightarrow \exists c\in[a,b]: f(c)\in[f(a),f(b)]$$

Exp, Log, Trig

Def. $\exp(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=e^z=\lim_{n\rightarrow\infty}(1+\frac{x}{n})^n$

Def. $\ln=\exp^{-1}$

Def. $\cos(x)=\Re(e^{ix})=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{2k!}$

$\sin(x)=\Im(e^{ix})=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

Wichtige Eigenschaften:

i) $\lim_{z\rightarrow 0}\frac{e^z-1}{z}=1 \qquad \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$

ii) $\log(x\cdot y)=\log(x)+\log(y) \qquad \log(a^b)=b\cdot\log(a)$
$\frac{d\log(x)}{dx}=\frac{1}{x}$

iii) $\cos^2+\sin^2=1$
$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\rightarrow\cos(2x)=?...$
$\sin(x+y)=\cos(x)\sin(y)+\sin(x)\cos(y)\rightarrow\sin(2x)=?...$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Grad	0°	30°	45°	60°	90°

sin(x)	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$
cos(x)	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$

Matrizen und Vektorrechnung

$$d\,det(A)\cdot B=det(A)\cdot spur(A^{-1}B)$$

$$spur\ A=\sum_{i=0}^{n}a_{ii}$$

Kern: Alle Vektoren, die in den Nullvektor Abgebildet werden

Kreuzprodukt: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\phi=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ Koalabär

Differentialrechnung

Rechenregeln :

i) $(f+g)'=f'+g'$

ii) $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

iv) $(g\circ f)(x)'=g'(f(x))\cdot f'(x)$

Simon Miescher, 2012

l'Hôpital:

$f,g:(a,b)\to\mathbb{C} \quad f,g\in C^1 \quad g(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Taylor-Reihe:

$$T_a^n f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

Bsp: Taylor (2ter Ordnung, Entwicklungsstelle (a.b))

$$\begin{matrix} & & f(a,b) & & \\ & f_x(a,b) & & f_y(a,b) & \\ f_{xx}(a,b) & & f_{xy}(a,b) & & f_{yy}(a,b) \\ f_{xxx}(\tilde a,\tilde b) & f_{xxy}(\tilde a,\tilde b) & & f_{xyy}(\tilde a,\tilde b) & f_{yyy}(\tilde a,\tilde b) \end{matrix}$$

$$(\tilde a,\tilde b)=(a+\xi h_1, b+\xi h_2)$$

$$\begin{matrix} & & 1 & & \\ & h_1 & & h_2 & \\ h_1^2 & & 2h_1h_2 & & h_2^2 \\ h_1^3 & 3h_1^2h_2 & & 3h_1h_2^2 & h_2^3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1/2! \\ 1/3! \end{matrix}$$

$$Pascalsches\ Dreieck\,(h_1+h_2)^k$$

$$\Rightarrow T_2(a,b)=f(a,b)\cdot 1\cdot 1$$

$1.\,Zeile \quad +f_x(a,b)\cdot h_1\cdot 1+f_y(a,b)\cdot h_2\cdot 1$

$2.\,Zeile \quad +f_{xx}(a,b)\cdot h_1^2\cdot\frac{1}{2}+f_{xy}(a,b)\cdot 2h_1h_2\cdot\frac{1}{2}+f_{yy}(a,b)\cdot h_2^2\cdot\frac{1}{2}$

$3.\,Zeile \quad +f_{xxx}(a+\xi h_1, b+\xi h_2)\cdot h_1^3\cdot\frac{1}{6}+f_{xxy}(a+\xi h_1, b+\xi h_2)\cdot 3h_1^2h_2\cdot\frac{1}{6}$

$\quad +f_{xyy}(a+\xi h_1, b+\xi h_2)\cdot 3h_1h_2^2\cdot\frac{1}{6}+f_{yyy}(a+\xi h_1, b+\xi h_2)\cdot h_2^3\cdot\frac{1}{6}$

Topologie

Def. Offen, falls $\forall\ \epsilon>0\ \exists c>0: B_\epsilon(x)\subset U$

Def. $A\subset X$ Abg. , falls $\forall\ x\in X\setminus A\ \exists\epsilon>0: B_\epsilon(X)\cap A=\emptyset$

Def. K Kompakt, falls $\forall\ (x_n), \forall\ x_n\in K\ \exists\, TF\to x\in K$

Integralrechnung

Riemann-integrierbar: Obersumme = Untersumme für genügend kleine Partitionen

Rechenregeln:

i) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$

ii) $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx,\ \forall\ \lambda\in\mathbb{C}$

iii) $f(x)\le g(x)\ \forall\ x\in[a,b]\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$

iv) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx$

v) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

vi) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$

Regeln zum berechnen der Integrale

i) $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$

ii) $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$

iii) substitution: $g(x) = u, dx = \frac{du}{g'(x)}$, *x durch auflösen von $g(x)$ nach x ersetzen*
Grenzen gurch $g(a), g(b)$ ersetzen

iv) falls sin oder cos, substitution mit $\tan(\frac{x}{2})$ versuchen

v) falls $\int \frac{f(x)}{f'(x)} dx \rightarrow$ substitution mit $g(x) = u = f(x)$ //okee das tönt komisch w/e

vi) PBZ trick bsp: $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

Differentialgleichungen

Def. Lineare Homogene DGL: $\sum_{k=0}^{n-1}(a_k x^{(k)}(t)) + x^{(n)} = 0$

Def. Lineare Inhomogene DGL: $\sum_{k=0}^{n-1}(a_k x^{(k)}(t)) + x^{(n)} = K(t)$

Schritt 1:

i) setze Ansatz $x_h(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$ in (H) ein

ii) $\rightarrow \sum_{k=0}^{n-1}(a_k \lambda^k e^{\lambda t}) + \lambda^n e^{\lambda t} = 0$

iii) $\rightarrow P(\lambda) := \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1}(a_k \lambda^k)$

iv) NS $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von $P(\lambda)$ mit vielfachheiten k finden

v) $\Rightarrow x_h(t) = \sum_{q=0}^{NS} \sum_{i=0}^{k_q} c_{qi} t^i e^{\lambda_q t}$

Schritt 2:

i) Falls $K(t) = (\sum_{i=0}^{m} b_1 \cdot t^i) \cdot e^{\mu t}$

ii) μ k-fache Nullstelle von $P(\lambda) \rightarrow k_\mu$

iii) $\rightarrow x_p(t) = (\sum_{i=0}^{m} c_i t^i) t^k e^{\mu t}$ bestimme c_i durch Einsetzen in (I)

$\Rightarrow x_I = x_h + x_p$

//Variation der Konstaten fehlt. Was muss in dieses Kapitel noch rein?
//Komplexifizierung fehlt noch ($K(t) = \cos(t) = \Re(e^{it})$)

Analysis II

Normierte Vektorräume

Def. Norm. Vektorraum $(X, \|.\|)$

Def. Norm: $\|x\| = 0 \rightarrow x = 0, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Def. $\|.\|, \|.\|' \in \mathbb{R}^n$ äquivalent, falls $\exists c_1, c_2 > 0 : c_1\|x\|' \leq \|x\| \leq c_2\|x\|'$

Satz: Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent zueinander

Def. Operatornorm $\|A\| = \sup_{\|x\|_{\mathbb{R}^n}=1} \|Ax\|_{\mathbb{R}^m}$

Lineare DGL: $x'(t)=Ax(t)\Rightarrow x(t)=\exp(A(t-t_0))x(t_0)$

Exp: $\exp(A)=T\exp(D)T^{-1}=T\,diag(e^{\lambda_i})_{i=1}^{n}T^{-1}$

//Diagonalisierunsverfahren hier?

Mehrdimensionale Differentialrechnung

Jacobi-Matrix: $D\vec{f}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}grad(f_1)\\ grad(f_2)\\ \vdots\\ grad(f_n)\end{bmatrix}$

Überprüfung stetig diffbar: ableitung stetig

Hessesche Matrix, für Extrema (positiv/negativ (semi-) definit)

$$H(f)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1\ldots n}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix}$$

positiv/negativ definit: $\forall\ \lambda>0/\lambda<0,\lambda_i=EW$

EW berechnen: $det(A-\lambda I_n)=0$ nach λ auflösen

(positiv definit → Minimum)

Sonderfall (n=2): $D:=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$

i) $D>0$
$f_{xx}>0\rightarrow Max,\ f_{xx}<0\rightarrow Min$

ii) $D=0$
$f_{xx}>0\rightarrow Min\ oder\ SP,\ f_{xx}<0\rightarrow Max\ oder\ SP$

Variationsrechnung

Euler-Lagrange: falls $f:X\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\int_a^b L(x(t),x'(t))dt$ gilt

$$\frac{\partial L}{\partial\xi_i}(x(t),x'(t))=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\eta_i}(x(t),x'(t)),\quad i=1,\ldots,n,\quad t\in(0,1)$$

Diffeomorphismus

Def. Diffeomorphismus

$f:U\rightarrow V,\ U\subset\mathbb{R}^n,\ V\subset\mathbb{R}^m,\ V\ und\ U\ offen$

f heisst C^k-Diffeomorhpismus, falls $f\ biijektiv,\ f\in C^k,\ f^{-1}\in C^k$

Jacobi-Matrix: det =/= 0

Def. Homöomorphismus $f:U\rightarrow V,\ U\subset\mathbb{R}^n,\ V\subset\mathbb{R}^m,\ V\ und\ U\ offen$
f Homöomorphismus, falls $f\ biijektiv,\ stetig$

Koordinatentransformation / implizite Funktionen: Satz der Impliziten Funktionen. Vgl UMF, Regulärer Wert

$$F(x,y)=(F_1(x,y),\dots F_n(x,y))$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

erfüllt (x_0, y_0) die Gleichung $F(x_0, y_0)=0$

und ist $\frac{\partial F}{\partial y}$ im Punkt (x_0, y_0) invertierbar/surjektiv/voller Rang

so existiert $y=f(x): F(x, f(x))=0$ (in einer offenen Umgebung)

Untermannigfaltigkeiten

Def. D-dimensionale $C^k-UMF \in M \subset \mathbb{R}^n$ *falls*
$\forall\ p\in M\ \exists U, V\subset\mathbb{R}^n$ und $\exists C^k-Diffeo\ \ \phi: U\rightarrow V$,
$mit\,\phi(M\cap U)\subset(\mathbb{R}^d\times\{0\})\cap V$

Def. $y\in\mathbb{R}^m$ Regulärer Wert, $df(x)$ $surjektiv\,\forall\ x\in\mathbb{R}^n$ $mit\, f(x)=y$

surjektivität Jacobi-Matrix vollen Rang

Satz: $f\in C^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^{n-d})$ $und\ y\in\mathbb{R}^{n-d}$ $ein\ RW\Rightarrow M=f^{-1}(y)$

$\rightarrow$ M ist eine d-dimensionale C^k -UMF

Def. $v\in\mathbb{R}^n$ Tangentialvektor an M
$\forall\ p\in M\ \exists\gamma:(-\epsilon,\epsilon)\rightarrow M, \gamma(0)=p$ $und\ \gamma'(0)=v$

Def. Tangentialraum von M im Punkt p: Der Raum aller TV im Punkte P

Satz: $M=f^{-1}(\{y\})\Rightarrow T_pM=kern(df(p))$

Extrema auf UMF

Satz: Lagrange Multiplier

Zuerst Rangbedingung überprüfen:

$$rg\begin{pmatrix}grad\ g_1(x_1)\\ grad\ g_2(x_2)\\ \dots\\ grad\ g_k(x_k)\end{pmatrix}<k \text{ und } g_1=0,\dots g_k=0\rightarrow\vec{x} \text{ krit Pkt}$$

$$f(\vec{x})=zu\,optimierende\ Funktion$$
$$g(\vec{x})=c: Nebenbedingung\,(mehrere\ möglich)$$
$$L(\vec{x},\lambda)=f(\vec{x})-\lambda(g(\vec{x})-c)$$
$$Bedingung: dL(\vec{x},\lambda)=0$$
$$\rightarrow\frac{\partial L}{\partial x_1}=0\rightarrow\frac{\partial L}{\partial x_2}=0\dots\rightarrow\frac{\partial L}{\partial\lambda}=0$$

Mehrfache Integrale

Satz von Fubini: $\int_{A\times B} f(x,y)\,d(x,y)=\int_A\left(\int_B f(x,y)\,dy\right)dx$

Berechnung

i) Parametrisierung des Gebietes:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \text{ mit } a\le x\le b, g(x)\le y\le h(x) \text{ und } j(x,y)\le z\le k(x,y)$$

ii)

Hilfsmittel: Koordinatentransformation $\vec{x}=\vec{\Phi}(u,v,w)$

$$\int_G f(x,y,z)\,d(x,y,z)=\int_{G'} f(\vec{\Phi}(u,v,w))|\det\Phi'|\,d(u,v,w)$$

Masse $(\rho$ Dichte$)\rho=1$ falls homogen : $M=\int_K \rho(\vec{r})\,d(x,y,z)$

Schwerpunkt: $\vec{S}=\dfrac{\int_K \vec{r}\rho(\vec{r})\,d(x,y,z)}{\int_K \rho(\vec{r})\,d(x,y,z)}=\dfrac{1}{M}\int_K \vec{r}\rho(\vec{r})\,d(x,y,z)$

Kurvenintegrale

i) Parametrisierung der Kurve: $C=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^n|\,\vec{r}=\vec{\Phi}(t),a\le t\le b\}$

ii) $\int_C \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{r}=\int_a^b \vec{v}(\vec{\Phi}(t))\cdot\dot{\vec{\Phi}}(t)\,dt$

Falls die Kurve von mehreren Teilkurven definiert ist, kann man die Ergebnisse der Kurvenintegrale über die Teilkurven aufsummieren.

Flächenintegrale / Integrale über Mannigfaltigkeiten

Zwei Typen:

i) nicht orientiertes Flächenintegral: $\int_F f(\vec{r})\,do$

ii) orientiertes Flächenintegral: $\int_F \vec{f}(\vec{r})\,d\vec{o}$

Berechnung:

i) Fläche parametrisieren:
   1. Wichtig: Reihenfolge der Parameter
   2. Ziel: $F=\{\vec{r}\in\mathbb{R}^3|\,\vec{r}=\vec{\Phi}(s,t),(s,t)\in G\subseteq\mathbb{R}^2\}$
   3. ?

ii) Für nicht orientierte Flächenintegrale:
   1. $\int_F f(\vec{r})\,do=\iint_G f(\vec{\Phi}(s,t))\left|\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial t}\right|ds\,dt$

iii) Für orientierte Flächenintegrale
   1. $\int_F \vec{v}(\vec{r})\,d\vec{o}=\iint_G \vec{v}(\vec{\Phi}(s,t))\left(\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial t}\right)ds\,dt$

Oberflächenberechnung $f(\vec{r})=1$

Integralsätze (Satz von Gauss)

Def: Normalenvektorfeld $<v(p),v>=0,\|v(p)\|=1$

// Ω offene Teilmenge auf $\mathbb{R}^n\rightarrow\partial\Omega$ Normalenvektorfeld von Ω

Def: $\operatorname{div} f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $\quad\Delta g=g_{xx}+g_{yy}\quad(+g_{zz}+...)$

$\frac{\partial g}{\partial\vec{n}}=grad\ g\cdot\vec{n}$

$\mathbb{R}^2$

Hauptsatz: $\int_C grad\ f(\vec{r})\,d\vec{r}=f(\vec{b})-f(\vec{a})$

Simon Miescher, 2012

Satz von Gauss $(\vec{n}\text{ Normalenvektor})$: $\int_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\, d(x,y) = \int_{\partial\Omega} \vec{v}(\vec{r})\cdot\vec{n}\, ds$

Satz von Gauss II $P, Q \in C^1$: $\int_{\partial G} P\,dx + Q\,dy = \int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x,y)$

$\Delta g = g_{xx} + g_{yy} \quad (+g_{zz}+\ldots) \qquad \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} = grad\, g\cdot\vec{n}$

Satz von Green $g, h \in C^1$: $\int_{\partial G} g\frac{\partial h}{\partial \vec{n}} - h\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_G g\,\Delta h - h\,\Delta g\, d(x,y)$

$\mathbb{R}^3$

$(\vec{n}$ normalenvektor, F Randfläche von G$)$

Hauptsatz: $\int_C grad\, f(\vec{r})\, d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$

Satz von Gauss: : $\int_F \vec{v}(\vec{r})\, d\vec{o} = \int_G \operatorname{div}\vec{v}\, d(x,y,z)$

Satz von Green: $\int_{\partial G} g\frac{\partial h}{\partial \vec{n}} - h\frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \int_G g\,\Delta h - h\,\Delta g\, d(x,y)$

Def: $rot\,\vec{v} = rot\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_y - Q_z\\P_z - R_x\\Q_x - P_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial x\\\partial y\\\partial z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\\partial x & \partial y & \partial z\\P & Q & R\end{vmatrix}$

Satz von Stokes $(C$ orientierte Rand$)$: $\int_F rot\,\vec{v}\, d\vec{o} = \int_C \vec{v}\, d\vec{r}$

Definitionen aus der Vorlesung (für Beweise)

Jordansche Nullmenge (JNM) $\forall\, \epsilon > 0\; und\; Quader\; Q_1, \ldots Q_N$

$A \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i$ und $\sum_{i=1}^N Vol(Q_i) < \epsilon$

Jordan-messbar: B Jordan-messbar, falls ∂B Jordansche Nullmenge

Eigenschaften des Jordan-Masses $(A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar$)$

i) Alle Vereinigungen (oder ähnliches) sind wieder Jordan-messbar

ii) $Vol(A\cup B) + Vol(B\cap A) = Vol(A) + Vol(B)$

$\int_{A\cup B} f(x)\,dx + \int_{A\cap B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx$

iii) $C \subset \mathbb{R}^n$ JNM, falls C Jordan-messbar und $Vol(C) = 0$

Transformationsformel: $\int_A f(\Phi(x))\,|det\, d\,\Phi(x)|\, dx = \int_{\phi(A)} f(y)\,dy$

Länge einer Kurve: $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

//Banachsche Fixpunktsatz