

Mechanik II - Theorie 2

Spannungen

Spannungsvektor:

$$\underline{s} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

→ Einheit: MPa = N/mm²

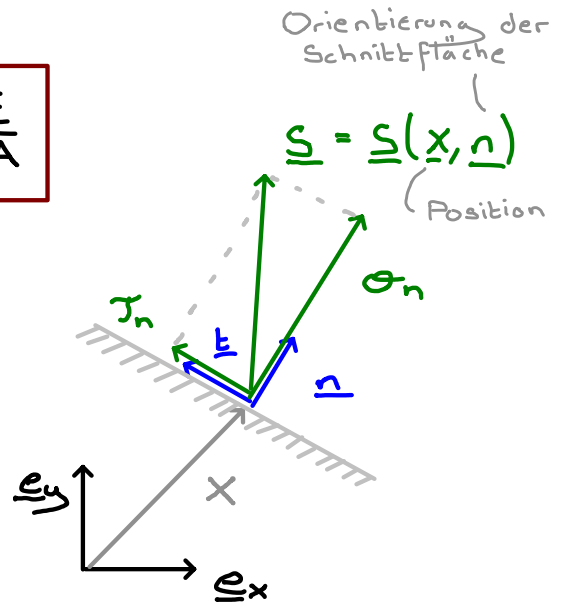
$s > 0 \Leftrightarrow$ Zug

$s < 0 \Leftrightarrow$ Druck

⚠ Spannungen immer bzgl.
einer Schnittfläche

σ_n = Normalspannung: senkrechte Komponente

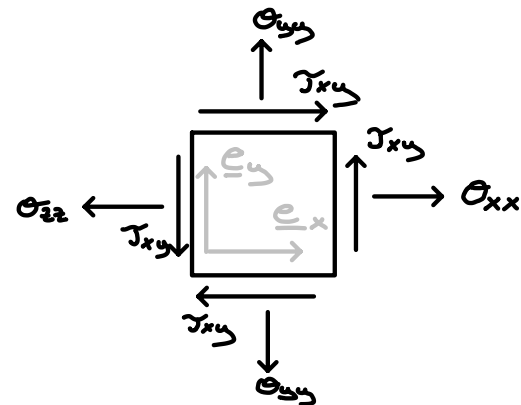
τ_n = Schubspannung: tangentielle Komponente



Spannungstensor

$$(\underline{T})_{xyz} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{xyz}$$

$\rightarrow \underline{s}_x \quad \rightarrow \underline{s}_y \quad \rightarrow \underline{s}_z$
↳ Orientierung der Fläche



→ symmetrisch

→ abhängig von Ort und Orientierung

⚠ Konvention bzgl. positiver Spannungsrichtung

Zusammenhänge

$$\underline{s} = \underline{T} \cdot \underline{n} \quad \sigma_n = \underline{s} \cdot \underline{n}$$

$$\sigma_n = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \quad \tau_n = \underline{s} - \sigma_n$$

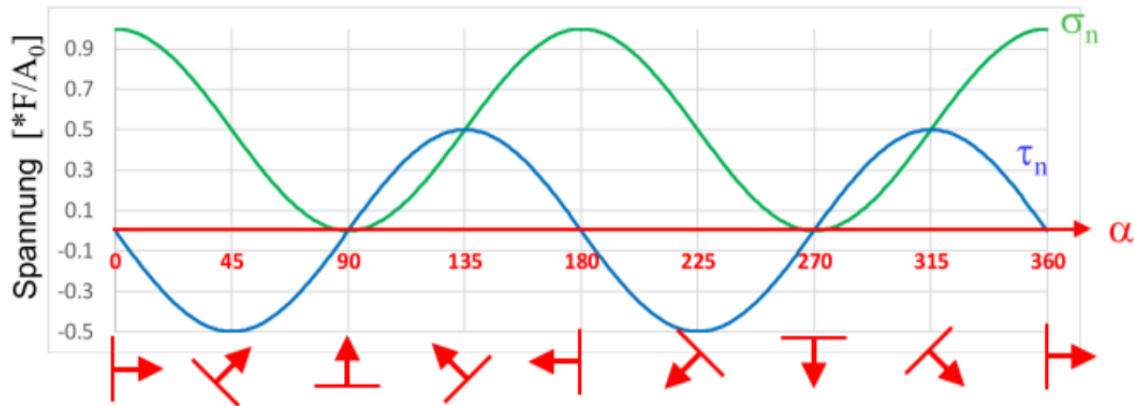
$$\underline{t} = \frac{\tau_n}{|\underline{s}|}$$

$$\begin{aligned} 1'000 \text{ kPa} &= 1 \text{ MPa} \\ 1'000 \text{ MPa} &= 1 \text{ GPa} \end{aligned}$$

⚠ $|\underline{n}| = 1$, Normalenvektor

Koordinatentransformation

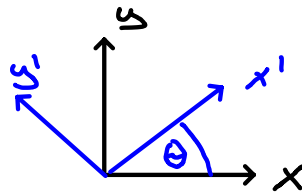
- Drehen des Koordinatensystem um den Winkel θ
- bewirkt eine Änderung der Normal- und Schubspannungen



Quelle: A. Menichelli

$$\begin{aligned}\sigma_x' &= \sigma_x \cos^2(\theta) + \sigma_y \sin^2(\theta) + 2 \tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \sigma_y' &= \sigma_x \sin^2(\theta) + \sigma_y \cos^2(\theta) - 2 \tau_{xy} \sin(\theta) \cos(\theta) \\ \tau_{xy}' &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\theta) \cos(\theta) + \tau_{xy} (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))\end{aligned}$$

→ Winkeländerung mit θ



Hauptspannungen (2D)

maximale und minimale Normalspannung im betrachteten Materialpunkt

→ Hauptachsen: jeweilige Richtung der Hauptspannung

Hauptspannungen $\Leftrightarrow$ Schubspannungen = 0 (alle 90°)

$$\begin{aligned}\sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)\end{aligned}$$

$$0 \leq \alpha_1 \leq 90^\circ$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}_{x'y'}$$

Hauptachsen

Hauptachsen - und spannungen in 3D

→ Eigenwertproblem

Hauptspannungen:

$$\det(\underline{\underline{I}} - \lambda \underline{\underline{II}}) = 0 \rightarrow \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

Hauptvektoren:

$$(\underline{\underline{I}} - \lambda_i \underline{\underline{II}}) \cdot \underline{n}_i = 0 \rightarrow n_1, n_2, n_3$$

Maximale Schubspannungen

$$\alpha_{\tau_{\max}} = \alpha_1 \pm \pi/4 \quad (+n \cdot \pi/2, n \in \mathbb{N})$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{1/4 (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2}$$

(2D)

$$\tau_{\max} \Leftrightarrow \sigma_n \neq 0$$

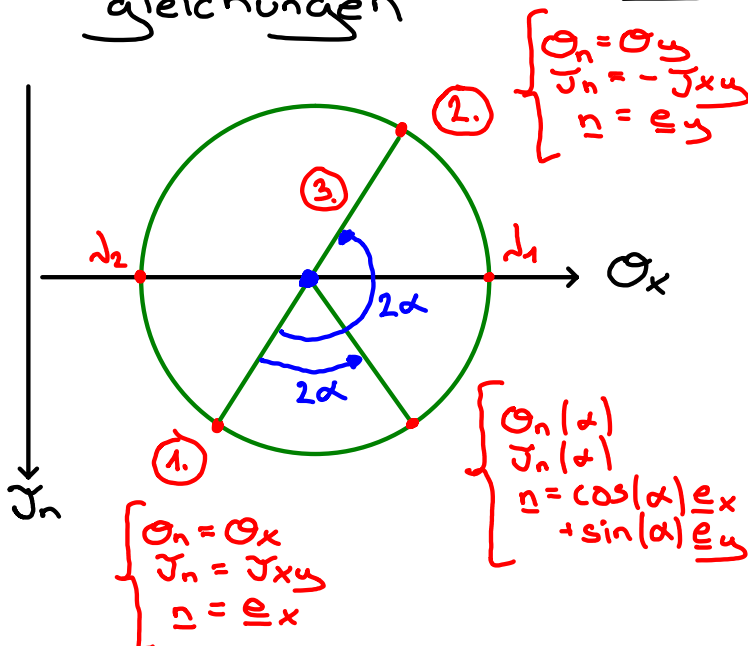
$$\tau_{\max} = 1/2 (\max |\lambda_i| - \min |\lambda_i|)$$

Hauptwerte

(3D)

Mohrscher Kreis 2D

→ Graphische Darstellung der Transformationsgleichungen



- 1.) Zeichne $P(\sigma_x, \tau_{xy})$
- 2.) Zeichne $P(\sigma_y, -\tau_{xy})$
- 3.) Verbinde 1 mit 2

$$M = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

⚠ Achtung: Drehung um 2α