Mechanik II - Theorie 4

Gleichgewichtsbedingungen

$$\boxed{\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0 \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0
\end{aligned}}$$

→ f_i : Raumkraft
- ↳ Kraft/Volumen [N/m³]
- ↳ z.B.: Gravitation: ρg

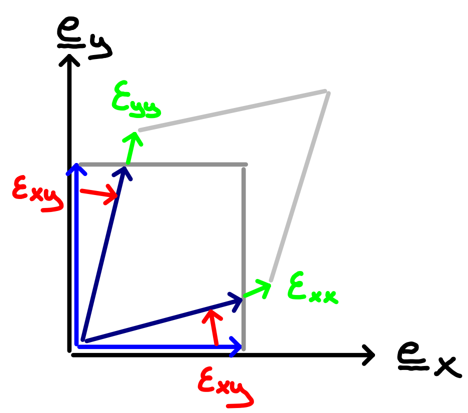
→ Herleitung: Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Würfel
- ↳ "GGB infinitesimal"

Verzerrungen

- → Einheitslos
- → Veränderung / Verschiebung des Bauteils
- → Kraft → bewirkt Spannung → Verzerrung des Bauteils
- → Unterscheidung zwischen Normaldehnung und Schubverzerrung

Verzerrungstensor

$$[\underline{\underline{E}}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{xyz}$$



→ symmetrisch

Zusammenhänge

Dehnung auf der n-Ebene in tangentialer Richtung

$$\boxed{\underline{\varepsilon}(\underline{n}) = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{n} \qquad \varepsilon_n = \underline{\varepsilon} \cdot \underline{n} \qquad \varepsilon_{nt} = |\underline{\varepsilon} - \varepsilon_n \cdot \underline{n}|}$$

$\varepsilon_{xx} > 0$ Dehnung $\quad$ $\varepsilon_{xx} < 0$ Stauchung

Verschiebungsfeld

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{bmatrix}$$

→ Verschiebungskomponente in x-Richtung
→ Verschiebungskomponente in y-Richtung
→ Verschiebungskomponente in z-Richtung

$$\boxed{\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{gathered}}$$

$$[\underline{\underline{E}}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \text{Symmetrie} & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}_{xyz}$$

Schubwinkel

→ beschreibt die Änderung des Winkels im Bogenmass durch die Schubverzerrung

→ doppelte der Schubverzerrung

$$\boxed{\gamma_y = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \gamma_x = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y = 2\,\varepsilon_{xy}}$$

$\varepsilon_{xy} > 0 \iff \gamma_{xy} > 0 \iff$ Winkelverkleinerung

$\varepsilon_{xy} < 0 \iff \gamma_{xy} < 0 \iff$ Winkelvergrösserung

- Maximale Winkeländerung: $\max|\gamma|$

$$\boxed{\max|\gamma| = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}$$

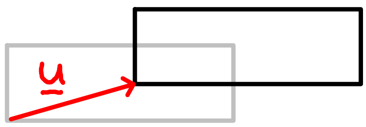
ε_{max}: maximale Hauptdehnung

ε_{min}: minimale Hauptdehnung

Verzerrungsarten

- **Starrkörperbewegung:** $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{xy} = 0$

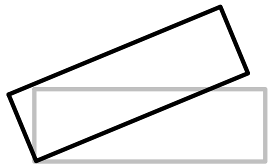
→ Translation:



$\underline{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

↳ $u = v = \text{konst}$

→ Rotation:

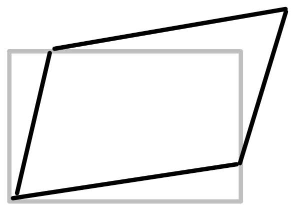


- **Deformation:**

→ Dehnung / Längenänderung

$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 \\ 0 & \varepsilon_y \end{bmatrix}$

→ Schubverzerrung / Winkeländerung



$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & 0 \end{bmatrix}$

Hauptdehnungen/-richtungen, Koordinaten-transformation, Mohr'scher Dehnungskreis

→ Berechnungen und Konstruktion sind analog zu den Spannungen

$\sigma_x \to \varepsilon_x \quad \sigma_y \to \varepsilon_y \quad \tau_{xy} \to \varepsilon_{xy}$

$\sigma_n \to \varepsilon_n \quad \tau_n \to \varepsilon_{nt}$

→ Formeln sind identisch