

Mechanik II - Theorie 6

Schwerpunkt

→ kann man sich als Gleichgewichtspunkt vorstellen

• Integrale Formulierung

$$x_s = \frac{\iint x \, dA}{\iint dA} = \frac{\iint x \, dA}{A}$$

x_s : Schwerpunkt in x-Richtung

• Diskrete Formulierung

$$x_s = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{\sum A_i} = \frac{\sum x_i \cdot A_i}{A}$$

x_i : Schwerpunkt der Teilfläche i
 A_i : Teilfläche i

⚠ Koordinaten inklusive Vorzeichen

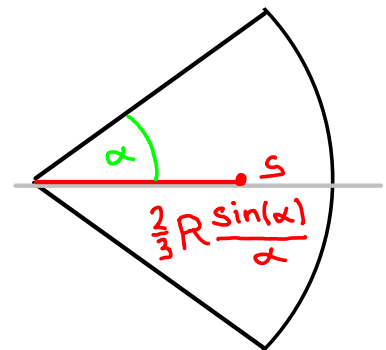
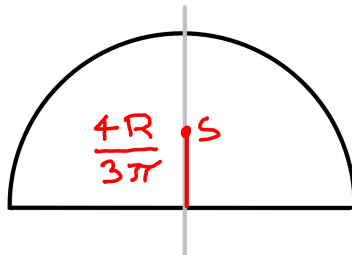
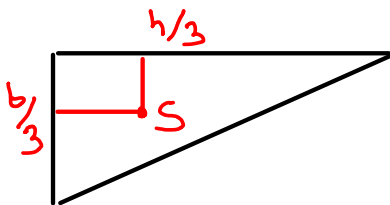
• Tipps:

→ Symmetrien ausnutzen
↳ Schwerpunkt liegt auf Symmetrieachsen

→ Fläche in einfachere Geometrien aufteilen
↳ diskrete Formel verwenden

→ passendes, einfaches Koordinatensystem wählen

• Wichtige Schwerpunkte:



Flächenträgheitsmoment

⚠ immer bzgl. einer Achse

→ Maß für die Verbiege- & Verdrehbarkeit einer Fläche

$$I_z = \iint_A y^2 \, dA \quad I_y = \iint_A z^2 \, dA \quad C_{yz} = - \iint_A yz \, dA$$

↳ C_{yz} : gemischtes Flächenträgheitsmoment

→ Einheit: $[I] = m^4$ → Tensordarstellung: $C = \begin{bmatrix} I_y & C_{yz} \\ C_{yz} & I_z \end{bmatrix}$

Querschnittshauptachsen

→ Symmetrieachsen = Hauptachsen

→ y und z sind Hauptachsen, wenn:

1.) Schwerpunkt liegt bei $y=0$ & $z=0$

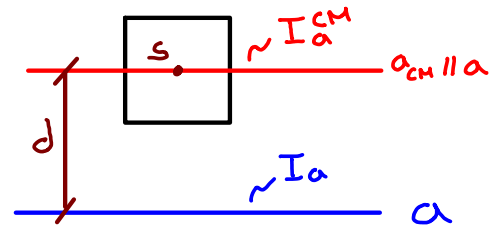
2.) $C_{yz} = 0$

$$C = \begin{bmatrix} I_y & 0 \\ 0 & I_z \end{bmatrix}$$

Satz von Steiner

$$I_a = I_a^{CM} + A \cdot d^2$$

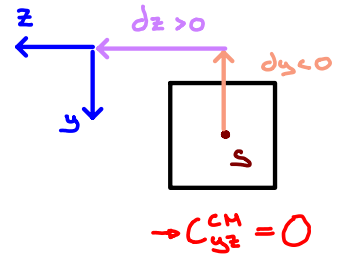
$$C_{xy} = C_{xy}^{CM} - d_x d_y A$$



I_a : Trägheitsmoment um die Achse a

I_a^{CM} : Trägheitsmoment um die Achse parallel zu a durch den Schwerpunkt der Fläche

d : Abstand der beiden Achsen



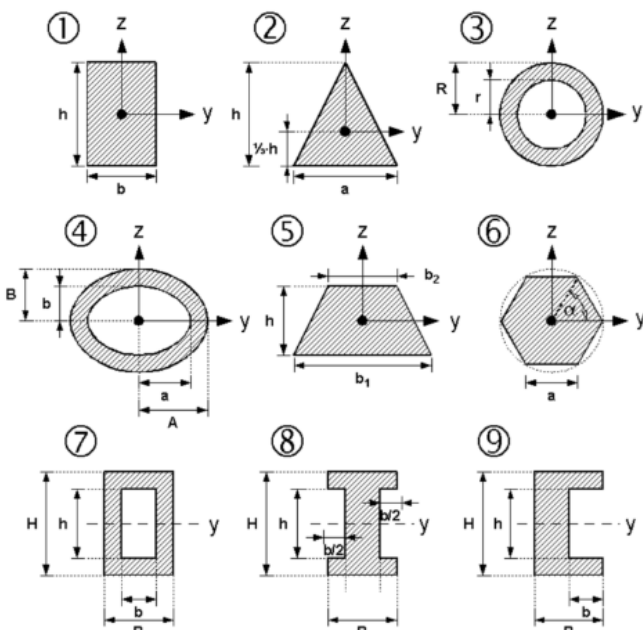
Zusammengesetzte Querschnitte

→ Fläche in bekannte, einfache Geometrien aufteilen

$$I_a^{\text{Gesamt}} = I_a^{(1)} + I_a^{(2)} + \dots$$

→ alle Teilflächenträgheitsm. müssen bezüglich der gleichen Achse / Punkt sein

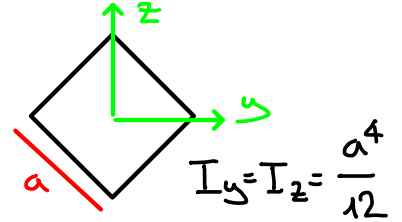
Wichtige Flächenträgheitsmomente



	I_y	I_z
1	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$
2	$\frac{a \cdot h^3}{36}$	$\frac{h \cdot a^3}{36}$
3	$\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$	$= I_y$
4	$\frac{\pi}{4} \cdot (AB^3 - ab^3)$	$\frac{\pi}{4} \cdot (BA^3 - ba^3)$
5	$\frac{h^3 (b_1 + b_2)^2 + 2b_1 b_2}{36 \cdot (b_1 + b_2)}$	$\frac{h}{48} (b_1 + b_2) (b_1^2 + b_2^2)$
6	$\frac{na^4}{96} \cdot \frac{2 + \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} \cdot \sin \alpha$	$= I_y$
7	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	$\frac{1}{12} \cdot (HB^3 - hb^3)$
8	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	$\frac{1}{12} [(H - h)B^3 + h(B - h)^3]$
9	$\frac{1}{12} \cdot (BH^3 - bh^3)$	

Nützliches zu FTM

- Hauptwerte, Koordinatentransformationen, Mohr'sche Kreise
- Berechnungen sind analog zu den Spannungen / Dehnungen
- Formeln sind identisch



Spezielle Biegung / Balkentheorie

→ Annahmen:

- (1) Querschnitte bleiben eben
- (2) Querschnitte bleiben senkrecht zur Balkenmittellinie

⚠ x-Achse immer in Balkenrichtung

→ Vertikalverschiebung der Mittellinie / Biegelinie:

$$v_y(x) = \int \theta(x) dx = \frac{1}{E} \iint \frac{M_z(x)}{I_z(x)} dx$$

⚠ Integrationskonstanten nicht vergessen

$\theta(x) = v_y'(x)$: Neigung der Mittellinie

→ DGL der Mittellinie:

$$M_z = EI_z v_y''$$

v_y'' : Krümmung der Mittellinie

→ Bedingung für spezielle Biegung:

- keine Normalkräfte
- resultierendes Biegemoment wirkt um eine Hauptachse

→ axiale Verschiebung eines beliebigen Punktes:

$$u(x, y) = -y v_y'(x)$$

→ radiale Verschiebung eines beliebigen Punktes:

$$v(x, y) \equiv v_y(x)$$

→ Position eines Punktes im belasteten Balken:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Randbedingungen

→ Lagerbedingungen:

- Vertikale Verschiebung wird verhindert
↳ $v_y(x_0) = 0$ (z.B.: Einspannung, Auflager)
- Verdrehung wird verhindert
↳ $v_y'(x_0) = 0$ (z.B.: Einspannung, Längslager)

→ Stetigkeitsbedingungen:

- Schnittübergang, aufgeteilte Biegelinie des selben Balkens
↳ $v_1(x) = v_2(x)$ & $v_1'(x) = v_2'(x)$ → { }
- Punkt der maximalen Durchbiegung
↳ $v_y'(x) = 0$



Vorgehen beim Berechnen der Biegelinie

- 1.) Lagerkräfte berechnen
- 2.) Beanspruchung berechnen → Biegemoment
- 3.) I bestimmen
- 4.) DGL → Biegelinie
- 5.) Integrationskonstanten durch RB