Analysis III

·Laplace Analysis:

·Laplace Transformation:

→ sie überführt eine Funktion $F(t)$ vom reellen Zeitbereich in eine Funktion $F(s)$ im komplexen Bereich (Frequenzbereich)

→ Definition:

$$\boxed{\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt}$$

$F: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Zeitdomäne Laplace Domäne

→ Inverse:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$$

$$\begin{tikzcd} F(t) \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}\{\}"] & \mathcal{L}(f(t)) = F(s) \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}\{\}"] \end{tikzcd}$$

- PBZ verwenden
- $(s+a)^2+w^2$, quadratisch ergänzen

·Eigenschaften:

→ Linearität:

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{L}(f(t)) + \beta\mathcal{L}(g(t))$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F(s) + \beta G(s)) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(F(s)) + \beta\mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

→ S-Shifting: (1. Verschiebungssatz)

$$\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a),\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s-a)) = e^{at}f(t) \quad \to \text{Dämpfung}$$

→ T-Shifting: (2. Verschiebungssatz)

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)\,u(t-a)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\cdot f(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}(f(t))$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s);\quad \mathcal{L}\{\tfrac{1}{a}f(\tfrac{t}{a})\} = F(s\cdot a)$$

→ Ableitungssatz: ↳ Ähnlichkeit

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0)$$

$\boxed{n=1}$ $\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0)$

$\boxed{n=2}$ $\mathcal{L}(f''(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

→ Integralsatz:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\,dx\right) = \frac{1}{s}F(s),\quad t>0, s>0$$

→ Differential des Transforms:

$$\mathcal{L}(tf(t)) = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}((-1)^n t^n f(t)) = F^{(n)}(s)$$

→ Integration des Transforms:

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(\tilde{s})\,d\tilde{s}$$

·Existenz der Transformation:

f ist auf $(0,\infty)$ lokal integrierbar und es gilt $\forall t\geq 0$, dass $|f(t)|\leq Me^{ct}$ mit geeigneten Konstanten M und c, dann existiert die LT-Transformation

- Einzigartigkeit:

Wenn 2 stetige Funktionen, den gleichen LT-Transform haben, dann sind sie identisch

- Grenzwerte:

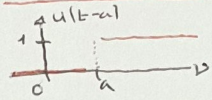
→ Anfangswert: $\lim_{t\to 0_+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\cdot F(s)$; → Endwert: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0_+} s\cdot F(s)$

·Wichtige Laplace Transformationen:

$F(t)$, Zeitdomäne	$F(s)$, Laplace-Domäne
$1,\ e^{at}$	$1/s,\ 1/s-a$
$t,\ t^2,\ t^3$	$1/s^2,\ 2/s^3,\ 6/s^4$
$t^n,\ n=1,2,3,\ldots$	$n!/s^{n+1}$
$t^p,\ p>-1$	$\Gamma(p+1)/s^{p+1}$ *
$\sqrt{t}$	$\sqrt{\pi}/2s^{3/2}$
$t^{n-1/2},\ n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+1/2}}$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$t\sin(at)$	$\dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos(at)$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at+b)$	$\dfrac{s\sin(b)+a\cos(b)}{s^2+a^2}$
$\cos(at+b)$	$\dfrac{s\cos(b)-a\sin(b)}{s^2+a^2}$
$\sin(at)-at\cos(at)$	$\dfrac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$
$\sin(at)+at\cos(at)$	$\dfrac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos(at)-at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
$\cos(at)+at\sin(at)$	$\dfrac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sin^2(at)$	$\dfrac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
$\cos^2(at)$	$\dfrac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$
$\dfrac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}$
$\dfrac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}$	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}$
$\sin(at)/t$	$\arctan(a/s)$
$e^{-a^2/4t}/\sqrt{\pi t}$	$e^{-a\sqrt{s}}/\sqrt{s}$
$e^{-a^2/4t}\cdot a/2\sqrt{\pi t^3}$	$e^{-a\sqrt{s}}$
$1/t(e^{bt}-e^{at})$	$\ln\left(\dfrac{s-a}{s-b}\right)$
$2/t(1-\cos(wt))$	$\ln\left(\dfrac{s^2+w^2}{s^2}\right)$
$2/t(1-\cosh(wt))$	$\ln\left(\dfrac{s^2-w^2}{s^2}\right)$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ → T-shifting anwenden $u(t-a)f(t-a)$

·Heavyside (step) Funktion:

$$\boxed{u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{Falls } t<a \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}}$$



·Bsp.: $f(t) = \begin{cases} 3e^t, & 0<t<2 \\ 0, & t>2 \end{cases}$

→ $f(t) = 3e^t - 3e^t u(t-2)$

·Lösen von AWP:

1.) $\mathcal{L}$ auf beiden Seiten der DGL anwenden
   → setze $\mathcal{L}(y(t)) = F(s)$

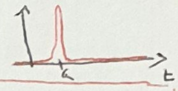
2.) Gleichung auf die Form $F(s) = \ldots$ bringen

3.) $\mathcal{L}^{-1}$ berechnen

·Dirac Delta Funktion:

→ Distribution → stellt einen Impuls dar

$$\boxed{\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t=a \\ 0, & t\neq a \end{cases}}$$



$$\boxed{\int_0^\infty \delta(t-a)\,dt = 1} \quad \boxed{\int_0^\infty g(t)\,\delta(t-a)\,dt = g(a)}$$

·Faltungssatz (Convolution):

$$\mathcal{L}(f\cdot g) \neq \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$$

$$\boxed{(f*g)(t) = \int_0^t f(x)\,g(t-x)\,dx}$$

→ Eigenschaften:

→ $\boxed{\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)}$ $\quad \mathcal{L}(f\cdot g) = \mathcal{L}(f)*\mathcal{L}(g)$

→ $f*g = g*f$ → $f*0 = 0*f = 0$

→ $f*(g+h) = f*g + f*h$ → $f*1 \neq f$

→ $f*(g*h) = (f*g)*h$ → $f*f \cancel{\geq} 0$

·Lineare DGL mit variablen Koeff.:

$$\mathcal{L}(ty') = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y') = -\frac{d}{ds}(sF(s) - y(0))$$

$$= -sF'(s) - F(s)$$

$$\mathcal{L}(ty'') = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'') = -\frac{d}{ds}(s^2F(s) - sy(0) - y'(0))$$

$$= -s^2F'(s) - 2sF(s) + y(0)$$

→ anschliessend klassisch mit Analysis II lösen

·Weitere Laplace Transformationen:

$F(t)$, Zeitdomäne	$F(s)$, Laplace-Domäne
$\delta(t-a),\ \delta(t)$	$e^{-as},\ 1$
$t^n e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$
$f(at)$	$1/a\,F(s/a)$
$f(t+T) = f(t)$	$\dfrac{\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}$
$1-\cos(wt)$	$\dfrac{w^2}{s(s^2+w^2)}$
$wt-\sin(wt)$	$\dfrac{w^3}{s^2(s^2+w^2)}$

*Gamma Funktion:

→ Erweiterung der Fakultät auf ganz $\mathbb{R}$

$$\boxed{\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx} \quad \boxed{\Gamma(n+1) = n!;\ n\in\mathbb{N}^+}$$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ $\quad \Gamma(p+n)/\Gamma(p) =$

$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ $\quad p(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)$

Fourier Analysis:

→ Fourier-Reihe:

Werkzeug zur Zerlegung komplizierter periodischer Funktionen in eine lineare Kombination von Basisfunktionen wie Sinus und Cosinus (vgl.: Taylor-Reihen)

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L, & n = m \neq 0 \\ 2L, & n = m = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ L, & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx = 0 \quad \forall\, n, m$$

$n, m \geq 0$

Periodizität:

$\boxed{f(x) = f(x+p)}$ $\forall x, p \in \mathbb{R}^+$, $D(f) = $ "ca." $\mathbb{R}$

→ Fundamentalperiode: kleinste Periode

f ist periodisch und stetig ⇒ f ist beschränkt

f ist diff'bar und periodisch mit Periode P ⇒ f' ist periodisch mit der gleichen Periode

f ist periodisch und glatt ⇒ f ist beschränkt und alle Ableitungen sind beschränkt

→ Linearität:

f, g sind periodisch mit P

⇒ $\alpha f + \beta g$ sind periodisch mit P, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

→ wichtige Fundamentalperioden:

$\sin(mx), \cos(mx)$ $\quad P = \frac{2\pi}{m}$

$\sin^r(mx), \cos^r(mx)$ $\quad P = \frac{\pi}{m}$; r = gerade

→ Summe von verschiedenen periodischen Funktionen mit unterschiedlichen Perioden

→ kgV

Glatte Funktion (smooth):

- unendlich oft stetig diff'bar
- Graph hat keine „Ecken"

Trigonometrisches System:

$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}\right\}$ bilden ein trigonometrisches System

Fourier-Reihe: (2L-periodisch)

$$\boxed{f(x) = a_0 \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)\right]}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx, \quad m > 0$$

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)dx, \quad m > 0$$

Falls f eine stückweise stetige Funktion ist, muss sie in allen Unstetigkeitsstellen gegen $\frac{1}{2}\left[f(x_0^-) + f(x_0^+)\right]$ konvergieren, wobei $f(x_0^{\pm}) = \lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_0 \pm \varepsilon)$

→ trigonometrisches Polynom: Summe bis n

Linearität der Fourier-Reihe:

Die Fourierkoeffizienten von $f_1 + f_2$ sind die Summe der entsprechenden Koeffizienten von f_1 und f_2

Die Fourierkoeffizienten von αf sind α mal die Koeffizienten von f

Fourier-Reihe für gerade Funktionen:

$$\boxed{f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$ $f(-x) = f(x)$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad n > 0$$

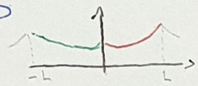
Fourier-Reihe für ungerade Funktionen:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$$ $f(-x) = -f(x)$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad n > 0}$$

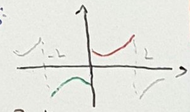
Gerade Fortsetzung:

- man definiert $f(x) = f(-x)$ auf $-L < x < 0$



Ungerade Fortsetzung:

- man definiert $f(x) = -f(-x)$ auf $-L < x < 0$



→ Komplexe Fourier-Reihe:

Reihen-Darstellung:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{-\frac{in\pi}{L}x}}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) \cdot e^{\frac{-in\pi}{L}x}\,dx}$$

Übergang komplex → reell:

$\boxed{a_0 = c_0 \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad b_n = i \cdot (c_n - c_{-n})}$

Übergang reell → komplex:

$\boxed{c_0 = a_0 \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)}$

Zusammenhänge:

$\boxed{e^{\pm in\pi} = \cos(\pm n\pi) + i\sin(\pm n\pi) = (-1)^n}$

→ Approximation durch Trigo. Polynome:

Trigonometrisches Polynom: (Grad N)

$$A_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right)$$

Quadratischer Fehler:

$$E = \int_{-\pi}^{\pi}(f - F)^2\,dx$$

original Fkt.; approximierende Funktion

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2\,dx - \pi\left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^{N}(a_n^2 + b_n^2)\right]$$

→ das trigo. Polynom vom Grad N, welches f am Besten approximiert ist die entsprechende Teilsumme der Fourier-Reihe

Nützliches:

- cosh(x) und co. in exponentieller Form
- Additionstheoreme verwenden

→ Fourier Integrale:

Erweiterung der Fourier-Reihe auf nicht periodische Funktionen

→ Funktion, deren Periode gegen ∞ geht

Fourier-Integral:

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty}\left[A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx)\right]dw}$$

→ w repräsentiert die Frequenz

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(wv)\,dv$$

Fourier-Integral für gerade Funktionen:

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} A(w)\cos(wx)\,dw}$$ Fourier cosine integral

$$\boxed{A(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\cos(wv)\,dv \; ; \; B(w) = 0}$$

Fourier-Integral für ungerade Funktionen:

$$\boxed{f(x) = \int_0^{\infty} B(w)\sin(wx)\,dw}$$ Fourier sine Integral

$$\boxed{B(w) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(v)\sin(wv)\,dv \; ; \; A(w) = 0}$$

Bemerkungen:

Das Fourier-Integral existiert, wenn

- f stückweise stetig ist
- f linke und rechte Ableitungen an unstetigen Punkten hat
- f absolut integrierbar ist

→ $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx < \infty \Leftrightarrow \lim_{a \to -\infty}\int_a^0 |f(x)|\,dx + \lim_{\beta \to \infty}\int_0^{\beta}|f(x)|\,dx < \infty$

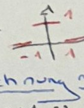
→ bei Unstetigkeitspunkten nimmt das Fourier-Integral den Mittelwert an, sonst nimmt es exakt den selben Wert wie f an

→ die Teilsumme einer Fourier-Reihe entspricht dem Integral in einem finiten Intervall $\int_0^a$

Dirichlet's discontinous Factor:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(wx)\sin(w)}{w}\,dw = \begin{cases} \pi/2, & |x| < 1 \\ \pi/4, & |x| = 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

→ Herleitung über



Grenzwertberechnung mit Fourier:

$$f(x) = x \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2L}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = ? \quad \to n = 2k+1$$

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \xrightarrow{x_0 = \frac{L}{2}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \longrightarrow \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = (-1)^k$$

$$x_0 = \frac{L}{2} \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k+2}\frac{2L}{\pi(2k+1)}(-1)^k$$

$$= \frac{2L}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \to \; ? = \pi/4$$

Nützliches:

→ Fallunterscheidung gerade/ungerade:

gerade: $n = 2k$, ungerade: $n = 2k+1$

→ Vielfache:

$\boxed{\cos(n\pi) = (-1)^n}$

→ Fourier Transformation:

→ Integraltransformation einer Zeitfunktion in den Frequenzbereich
→ entspricht der Laplace-Transformation mit $s = iw$

· Definition:

$$\boxed{\mathcal{F}(f(x)) = \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-iwv} \, dv}$$

· Inverse:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} \, dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f(x)) e^{iwx} \, dw \end{aligned}}$$

· Bemerkung:

→ $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(x))) = f(x)$
→ die Transformation existiert, wenn
- f absolut integrierbar ist und
- stückweise stetig ist

· Eigenschaften:

→ Linearität:
$\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \mathcal{F}(f(x)) + \beta \mathcal{F}(g(x))$

→ x-Shift:
$\mathcal{F}(f(x-a)) = e^{-iaw} \mathcal{F}(f(x)) = e^{-iaw} \mathcal{F}(w)$

→ w-Shift:
$\mathcal{F}(w-a) = \mathcal{F}(e^{iax} f(x))$

→ Ableitungsregeln:
$\mathcal{F}(f'(x)) = iw \, \mathcal{F}(f(x))$
$\mathcal{F}(f''(x)) = -w^2 \mathcal{F}(f(x))$

→ Faltungssatz:
$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$
$\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(f \cdot g)$

· Nützliche Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ak^2+bk+c)} dk = e^{\frac{b^2}{4a}-c} \sqrt{\pi/a}$$

· Zusammenhänge:

$(\mathcal{F}(f(x)))' = -i \mathcal{F}(x f(x))$

$\mathcal{F}(x^k f(x)) = i^k \frac{d^k}{dw^k} \mathcal{F}(f(x))$

· Uneigentliche Integrale mit Fourier berechnen:

gegeben: $\sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f)(w) = \frac{3}{5+iw}$

gesucht: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$

→ wähle $w = 0$

$\sqrt{2\pi} \; \mathcal{F}(f)(w=0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \, dv = \frac{3}{5}$

· Faltung:

$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$

· Partielle Differentialgleichungen:

· Nomenklatur:

→ Linearität:
die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen haben höchstens Grad 1
linear: $u_{xy} + u_z + u_{tt} = g(x,y,t)$
nicht linear: $u_{xy} \cdot u_z + u_{tt} = 0$

→ Ordnung:
Grad der höchsten Ableitung

· Klassifizierung

→ lineare PDE 2. Ordnung

$$\boxed{A u_{xx} + 2B u_{xy} + C u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)}$$

→ Typ:
hyperbolisch: $AC - B^2 < 0$
elliptisch: $AC - B^2 > 0$
parabolisch: $AC - B^2 = 0$
gemischter Typ: variiert den Typ

· Wichtige PDEs:

Wärmeleitungsgleichung:
$\boxed{u_t = c^2 \Delta u}$, parabolisch

Wellengleichung:
$\boxed{u_{tt} = c^2 \Delta u}$, hyperbolisch

Laplacegleichung:
$\boxed{\Delta u = 0}$, elliptisch

Poissongleichung:
$\boxed{\Delta u = f(x,y,z)}$, elliptisch

→ $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$

· Superpositionsprinzip:

Die Summe von 2 Lösungen einer homogenen linearen PDG ist ebenfalls eine Lösung

→ einfache Lösungswege:

· Substitution:

$u_{xy} = -u_x$ → setze $u_x = p$

· Wie eine gewöhnliche DGL:

$u_{xx} - u = 0$

· Separation der Variablen:

$v_y = axv \rightarrow \frac{v_y}{v} = ax \quad | \int dy$
→ $\ln(v) = axy \boxed{+ f(x)}$
→ $v = e^{axy} f(x)$

→ Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \; t \geq 0 & \text{(Randbedingungen)} \\ u(x,0) = f(x), \; 0 \leq x \leq L & \text{(Anfangswerte)} \\ u_t(x,0) = g(x), \; 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

· Wellengeschwindigkeit: $c^2 = \frac{T}{\mu}$

· Lösungsweg:

1) Separation der Variablen
2) Fallunterscheidung der Lösungen
3) Lösungen durch Fourier-Reihen zusammensetzen

1.) Separation der Variablen:

→ Definition: $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$; $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$

→ Ansatz: $\boxed{u(x,t) = F(x) G(t)}$

$u_{tt} = F\ddot{G}$; $u_{xx} = F''G$

$$\boxed{\frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = k = const}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F'' = kF \\ \ddot{G} = c^2 k G \end{cases}$$

→ Randbedingungen:
$u(0,t) = F(0) G(t) = 0 \Rightarrow F(0) = 0$
$u(L,t) = F(L) G(t) = 0 \Rightarrow F(L) = 0$

2.) Fallunterscheidung

Lösung der DGL als AWP:
$F'' = kF$, $F(0) = F(L) = 0$

→ $k = 0$:
$F'' = 0 \rightarrow F(x) = Ax + B \xrightarrow{RB} F(x) = 0$

→ $k < 0$:
- definiere $k = -p^2 \rightarrow F''(x) + p^2 F(x) = 0$
- charakteristische Polynom: $\alpha^2 + p^2 = 0$
→ $\alpha = \pm \, pi$ → einfach, komplex → $a = 0$ → $b = p$
→ $F(x) = C_1 \cos(px) + C_2 \sin(px)$
→ Randbedingungen:
$F(0) = C_1 \cos(px) = 0 \rightarrow C_1 = 0$
$F(L) = C_2 \sin(pL) = 0 \rightarrow C_2 = 0$ oder
$pL = n\pi \rightarrow p = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{N}$
→ $F(x) = C_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \rightarrow k = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

→ $k > 0$:
$F''(x) - kF(x) = 0$
→ charakteristische Polynom: $\alpha^2 - k = 0$
→ $\alpha = \pm\sqrt{k}$ → einfach, reell
→ $F(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}$
→ Randbedingungen:
$F(0) = C_1 + C_2 = 0$; $F(L) = C_1 e^{\sqrt{k}L} - C_1 e^{-\sqrt{k}L} = 0$
→ $C_1 = C_2 = 0$ → $F(x) = 0$

→ Einsetzen in die 2. Gleichung:
$\ddot{G} = c^2 k G = c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 G \, (-1)$
→ $\ddot{G} + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 G = 0 \rightarrow \ddot{G} + \lambda G = 0$
→ charakteristische Polynom: $\alpha^2 + \lambda = 0$
→ $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$; → einfach, komplex → $a = 0$ → $b = \sqrt{\lambda}$
$G(t) = C_I \cos\left(c\frac{n\pi}{L} t\right) + C_{II} \sin\left(c\frac{n\pi}{L} t\right)$

→ $F(x)$ und $G(t)$ zusammensetzen:
$u_n(x,t) = \left(C_{I_n} \cos\left(c\frac{n\pi}{L} t\right) + C_{II_n} \sin\left(c\frac{n\pi}{L} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

→ Superpositionsprinzip:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(c\frac{n\pi}{L} t\right) + B_n \sin\left(c\frac{n\pi}{L} t\right)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}$$

3.) Zusammensetzen mit Fourier:

→ Verschiebungsbedingung:
$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

$$\boxed{A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx}$$

→ Geschwindigkeitsbedingung:
$g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\lambda_n A_n \sin(\lambda_n t) + \lambda_n B_n \cos(\lambda_n t)\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \Big|_{t=0}$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ $\qquad \lambda = c\frac{n\pi}{L}$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{L\lambda_n} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx}$$

-> Methode der Charakteristiken:

- Idee:

Koordinatentransformation der PDE in ein System von ODEs

- Methode:

-> Allgemeine Form:

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y)$$

-> charakteristische Gleichung:

$$\boxed{A(y')^2-2By'+C=0 \qquad y'=\frac{B\pm\sqrt{B^2-AC}}{A}=\lambda_{1,2}} \qquad y=y(x)$$

-> A, B, C müssen konstant sein

$y_1=\lambda_1\cdot x+c_1$

$y_2=\lambda_2\cdot x+c_2$

-> Charakteristiken:

$\Phi(x,y)=c_1=y-\lambda_1\cdot x$

$\Psi(x,y)=c_2=y-\lambda_2\cdot x$

- hyperbolisch: $v=\Phi(x,y)$ $w=\Psi(x,y)$
- parabolisch: $v=x$ $w=\Phi(x,y)=\Psi(x,y)$
- elliptisch: $v=\frac{1}{2}(\Psi(x,y)+\Phi(x,y))$ $w=\frac{1}{2i}(\Phi(x,y)-\Psi(x,y))$

-> Normalform:

- hyperbolisch: $u_{vw}=F(x,y,u,u_x,u_y)$
- parabolisch: $u_{vv}=F(x,y,u,u_x,u_y)$
- elliptisch: $u_{vv}+u_{ww}=F(x,y,u,u_x,u_y)$

-> Lösung von D'Alembert:

- Koordinatentransformation:

$v=x+ct \qquad w=x-ct$

$u_t=u_v\cdot v_t+u_w\cdot w_t=u_v\cdot c-u_w\cdot c$

$u_{tt}=u_{vv}\cdot v_t\cdot c+u_{vw}w_t\,c-u_{wv}v_t\,c-u_{ww}w_t\,c$

$=u_{vv}c^2-u_{vw}c^2-u_{wv}c^2+u_{ww}c^2$

$=u_{vv}c^2-2u_{vw}c^2+u_{ww}c^2$

$u_x=u_v\cdot v_x+u_w\cdot w_x=u_v+u_w$

$u_{xx}=u_{vv}+2u_{vw}+u_{ww}$

- PDE in neuen Koordinaten:

$c^2(u_{vv}-2u_{vw}+u_{ww})=c^2(u_{vv}+2u_{vw}+u_{ww})$

$\boxed{u_{vw}=0}$ ⤷ 2x Integration

$$\boxed{u(x,t)=\varphi(v)+\psi(w)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct)}$$

- Cauchy Problem: (AWP)

$$\begin{cases} u(x,t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct) \\ u(x,0)=f(x) & ,x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x) & ,t\geq 0\end{cases}$$

$u(x,0)=\varphi(x)+\psi(x)=f(x)$

$u_t(x,0)=c\varphi'(x)-c\psi'(x)=g(x)$

$\varphi(x)-\psi(x)=1/c\int_0^x g(s)ds+\underbrace{\varphi(0)+\psi(0)}_{k_0}$

$\varphi(x)=1/2f(x)+1/2c\int_0^x g(s)ds+1/2k_0$

$\psi(x)=1/2f(x)-1/2c\int_0^x g(s)ds-1/2k_0$

$\Rightarrow x=x\pm ct$

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds}$$

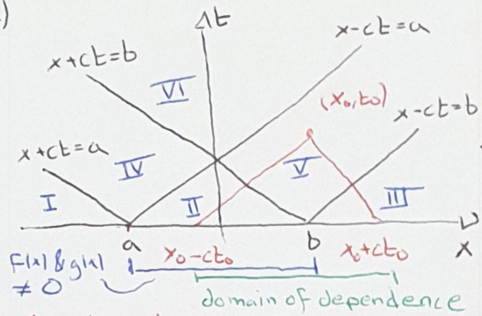
-> ohne Randbedingungen, unbeschränkt in x

Grenzwert Cauchy Problem:

$$\begin{cases}\exists \lim_{x\to\pm\infty} f(x)=:f(\pm\infty) \\ g(x) \text{ is integrierbar über ganz } \mathbb{R}\end{cases}$$

$$\lim_{t\to+\infty}u(x,t)=\frac{1}{2}[f(+\infty)+f(-\infty)]+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{+\infty}g(s)ds$$

-> Graphische Darstellung:



Δ: characteristic triangle

1.) Berechne $f(x_0-ct_0)$ und $f(x_0+ct_0)$

2.) Integriere $g(x)$ über domain of dependence

-> nur Werte im domain of dependence beeinflussen (x_0,t_0)

↗ Wellen gehen nach rechts

↖ Wellen gehen nach links

-> Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases}u_t=c^2u_{xx} \\ u(0,t)=u(L,t)=0, \; t\geq 0 & \text{(Randbedingung)} \\ u(x,0)=f(x), \; 0\leq x\leq L & \text{(Anfangsbedingung)}\end{cases}$$

· Physikalische Grössen:

K: thermische Leitfähigkeit

σ: spezifische Wärme

ρ: Dichte des Stabes

c: Wärmediffusivität

$$\boxed{c^2=\frac{K}{\sigma\rho}}$$

· Annahmen:

- Wärme fliesst nur in x-Richtung
- Temperatur an den Enden ist 0
- Stab ist isoliert
- homogenes Material

· Lösungsweg:

1.) Separation der Variablen:

-> Ansatz: $\boxed{u(x,t)=F(x)G(t)}$

$$\frac{\dot G}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k \Rightarrow \begin{cases}F''=kF \\ \dot G=c^2kG\end{cases}$$

-> Randbedingungen:

$u(0,t)=F(0)G(t)=0 \Rightarrow F(0)=0$

$u(L,t)=F(L)G(t)=0 \Rightarrow F(L)=0$

2.) Fallunterscheidung:

-> Lösung der DGL als AWP $F''=kF$

-> $k=0, k>0$: $F(x)=0$

-> $k<0$:

$F(x)=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad k=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$

-> Einsetzen in die 2. Gleichung:

$\dot G=-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2G$

-> charakteristische Polynom: $\alpha+\lambda=0$

-> $\alpha=-\lambda$ -> reell

$G_n(t)=B_n\cdot e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}$

-> F(x) und G(t) zusammensetzen:

$u_n(x,t)=B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}$

-> Superpositionsprinzip:

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2t}}$$

3.) Zusammensetzen mit Fourier:

$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

-> ungerade Fortsetzung von f

$$\boxed{B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}$$

-> 2D Wärmeleitungsgleichung / Laplace-Gleichung:

· statisch / zeitunabhängig

$\frac{\partial u}{\partial t}=0 \Rightarrow \Delta u=0$ -> elliptisch

· Arten von Problemen:

-> G: Gebiet in $\mathbb{R}^n$

-> δG: Rand des Gebietes

-> Dirichlet-Problem:

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{auf } G \\ u=f(x) & \text{auf } \delta G\end{cases}$$

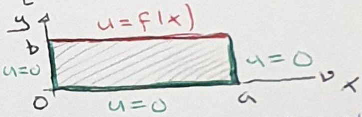
-> Neumann-Problem:

$$\begin{cases}\Delta u=0 & \text{auf } G \\ \frac{\partial u}{\partial \vec n}=\vec g(x) & \text{auf } \delta G\end{cases}$$

-> Robin-Problem: Mischung von beiden

· Dirichlet-Problem auf einem Rechteck:

$$\begin{cases}\Delta u=0, \; 0\leq x\leq a, \; 0\leq y\leq b \\ u(0,y)=u(a,y)=u(x,0)=0 \\ u(x,b)=f(x)\end{cases}$$



1.) Separation der Variablen:

-> Ansatz: $\boxed{u(x,y)=F(x)G(y)}$

-> Definition: $\ddot\Delta=\frac{\partial^2\Delta}{\partial y^2}$; $\Delta''=\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}$

$$\frac{F''}{F}=-\frac{\ddot G}{G}=-k \begin{cases}F''=-kF \\ \ddot G=kG\end{cases}$$

-> Randbedingungen: $F(0)=F(a)=0$

2.) Fallunterscheidung:

-> $k=0, k<0$: $F(x)=0$

-> $k>0$: $F(x)=A\cos(\sqrt{k}x)+B\sin(\sqrt{k}x)$

-> Randbedingungen:

$F_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n\in\mathbb{N}$

-> Einsetzen in die 2. Gleichung:

$\ddot G-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2G=0$

-> $G_n(y)=A_n^*e^{\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}+B_n^*e^{\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)}$

-> Randbedingungen:

$G_n(y)=A_n^*\left(e^{\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}-e^{\left(-\frac{n\pi}{a}y\right)}\right)=2A_n^*\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$

-> F(x) und G(y) zusammensetzen mit Superpositionsprinzip:

$$\boxed{u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

3.) Zusammensetzen mit Fourier:

$$\boxed{A_n=\frac{2}{a\sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx}$$

$\to$ Wärmeleitungsgleichung auf einem unendlich langem Stab:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \le x < \infty \end{cases}$$ (Anfangsbedingung)

· Lösung mit Fourier-Integral:

1.) Separation der Variablen:

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$\begin{cases} F(x) = A\cos(px) + B\sin(px) \\ G(t) = \exp(-c^2p^2t) \end{cases}$$

2.) Superpositionsprinzip:

$$u(x,t) = [A\cos(px) + B\sin(px)]\, e^{-c^2p^2t}$$

3) Fourier Integral:

$$u(x,t) = \int_0^\infty [A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)]\, e^{-c^2p^2t}\, dp$$

$$u(x,0) = f(x) = \int_0^\infty A(p)\cos(px) + B(p)\sin(px)\, dp$$

$$\boxed{A(p) = 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(pv)\, dv \qquad B(p) = 1/\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin(pv)\, dv}$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, e^{-\left(\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}\right)^2} dv}$$

$\to$ ⚠ Überlegen, ob gerade/ungerade

· Lösung mit Fourier-Transformation:

$u_t = c^2 u_{xx} \to$ beide Seiten mit Fourier transformieren

$$\mathcal{F}(u_{xx}) = -w^2 \mathcal{F}(u) = -w^2 \hat{u}$$

$$\mathcal{F}(u_t) = \hat{f}(w) = 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)\, e^{-iwx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-iwx}\, dx = \frac{d\hat{u}}{dx}(w,t)$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{u}}{dx}(w,t) = -c^2 w^2 \hat{u}(w,t)$$

$\to$ Lösung der ODE: $\hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)\, e^{-w^2c^2t}$

$\to$ weil $u(x,0) = f(x)$ und $\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w)$

$\to$ Umwandeln in Zeitdomäne

$$u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{U}(w,t)) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}(w)\, e^{-w^2c^2t})$$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left(\int_0^\infty e^{-c^2w^2t} \cos(wx - wv)\, dw \right) dv}$$

$\to$ Dirichlet auf einem Kreis:

· Problem in Polar Koordinaten:

$$\begin{cases} \Delta u = \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0;\ \{(x,y): x^2+y^2 < R^2\} \\ u = f,\ \{(x,y): x^2+y^2 = R^2\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{rr} + 1/r^2\, u_{\varphi\varphi} + u_r\, 1/r = 0,\ \{(r,\varphi): 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\} \\ u(R,\varphi) = F(\varphi),\ \{(R,\varphi): 0 \le \varphi \le 2\pi\} \end{cases}$$

1.) Separation der Variablen:

$\to$ Definition: $\ddot{A} = \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}$; $A'' = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}$

$\to$ Ansatz: $\boxed{u(r,\varphi) = F(r)G(\varphi)}$

$$F''G + \frac{1}{r^2} F\ddot{G} + 1/r\, F'G = 0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2F'' + rF'}{F} = -\frac{\ddot{G}}{G} = k = \text{konst}$$

$$\begin{cases} r^2F'' + rF' - kF = 0 \\ \ddot{G} + kG = 0 \end{cases}$$

$\to$ Randbedingungen: (Stetigkeit)

$u(r,0) = u(r,2\pi) \to G(0) = G(2\pi)$

$u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,2\pi) \to \dot{G}(0) = \dot{G}(2\pi)$

2.) Fallunterscheidung:

Lösung der DGL als AWP

$\ddot{G} + kG = 0,\ G(0) = G(2\pi),\ \dot{G}(0) = \dot{G}(2\pi)$

$\to k = 0$

$\ddot{G} = 0 \to G(\varphi) = A\varphi + B$; $A, B \in \mathbb{R}$

$\to$ Randbedingungen:

$G(0) = B = 2\pi A + B = G(2\pi) \to A = 0$

$\to k < 0$:

$$G(\varphi) = Ce^{\sqrt{-k}\varphi} + De^{-\sqrt{-k}\varphi}$$

$\to$ Randbedingungen:

$$C + D = C\exp(\sqrt{-k}\,2\pi) + D\exp(-\sqrt{-k}\,2\pi)$$

$$\sqrt{-k}(C - D) = \sqrt{-k}\left(C\exp(\sqrt{-k}\,2\pi) - D\exp(-\sqrt{-k}\,2\pi)\right)$$

$\to C = 0,\ D = 0 \to$ keine Lösung $\neq 0$

$\to k > 0$:

$$G(\varphi) = E\cos(\sqrt{k}\varphi) + H\sin(\sqrt{k}\varphi)$$

$\to$ Randbedingungen:

$$E = E\cos(\sqrt{k}\,2\pi) + H\sin(\sqrt{k}\,2\pi)$$

$$H = -E\sin(\sqrt{k}\,2\pi) + H\cos(\sqrt{k}\,2\pi)$$

$\to H^2\sin(\sqrt{k}\,2\pi) = -E^2\sin(\sqrt{k}\,2\pi)$

$\to \sin(\sqrt{k}\,2\pi) = 0 \to \sqrt{k} \in \mathbb{N}$

$\to G_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)$

$\to$ Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$r^2F'' + rF' - n^2F = 0$$

$\to$ eulersche DGL $\to$ Index Polynom

$\to F_n(r) = P_n r^n + Q_n r^{-n}$

$\to$ Lösung soll beschränkt bleiben für $r \to 0$: setze $Q_n = 0$

$\to$ Lösung soll ausserhalb der Scheibe beschränkt bleiben: $P_n = 0$

$\to F(r)$ und $G(\varphi)$ zusammensetzen:

$$u_n(r,\varphi) = r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$$

$\to$ Superpositionsprinzip:

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))$$

$$\boxed{u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi))}$$

3.) Zusammensetzen mit Fourier:

$\to$ Randbedingung:

$$u(R,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} R^n(A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)) = f(\varphi)$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= 1/2\pi \int_0^{2\pi} F(\phi)\, d\phi \\ A_n &= \frac{1}{R^n\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi)\cos(n\phi)\, d\phi \\ B_n &= \frac{1}{R^n\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi)\sin(n\phi)\, d\phi \end{aligned}}$$

4.) Poisson Integral Kernel:

$$K(r,\varphi,R,\phi) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\varphi - \phi) + r^2}$$

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r,\varphi,R,\phi)\, F(\phi)\, d\phi$$

· Harmonische Funktionen:

· Definition einer harmonischen Fkt.:

Funktionen, die die Poisson Gleichung $\Delta u = 0$ erfüllen $\to$ Dirichlet-Problem

· Maximumsprinzip:

harmonische Funktion ist konstant
$\Rightarrow$ hat ihr Minimum und Maximum im Gebiet S drinnen

harmonische Funktion ist nicht konstant
$\Rightarrow$ hat ihr Minimum und Maximum auf dem Rand ∂S

· Mittelwertsatz:

u: harmonische Fkt. auf dem Gebiet S

(x_0, y_0): beliebiger Punkt in S

K: Kreis mit Mittelpunkt (x_0, y_0) und Radius $\alpha \in \mathbb{R}$ der vollständig in S liegt

· Mittelwertsatz (Fortsetzung):

$\to$ eine harmonische Fkt. ist an jedem beliebigen Pkt (x_0, y_0) gleich dem Mittelwert auf jedem beliebigen Kreis um diesen Pkt.

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + \alpha\cos(\phi),\ y_0 + \alpha\sin(\phi))\, d\phi$$

$\to$ Rand:

$$u(0,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

· weitere Eigenschaften:

$\to$ Lösung des Dirichlet-Problems / Poisson Gleichung mit RB ist einzigartig (unique)

$\to$ falls eine Fkt. die Lösung auf dem Rand ∂S ist und ebenfalls auf ganz S definiert ist, dann ist sie die Lösung der Poisson Gleichung für ganz S

· Beweis Minimumprinzip:

$$\min_{D_1} u = -\max_{D_1}(-u) = -\max_{\partial D_1}(-u) = \min_{\partial D_1} u$$

· Koffizienten Wärmeleitungsgleichung mit 1. Ableitung:

$$u_x(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \cos(nx)\, e^{-c^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

$$h(x) = u_x(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$\to$ gerade Fortsetzung von $h(x)$

$$\boxed{B_n = \frac{2L}{n\pi^2} \int_0^L h(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}$$