·Folgen:

- **Beschränktheit:**
Bild in endlich breiten waagrechten Streifen
- **Monotonie:**
monoton wachsend: $a_{n+1} \geq a_n$ (strikt $>$)
- **Nullfolge:** ↳ Ableitung $\geq 0, \leq 0$
$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

monoton und beschränkt ⇒ Konvergenz
Konvergenz ⇒ Beschränktheit
nicht beschränkt ⇒ divergenz

·Reihen:

- **arithmetisch:**
$a_{n+1} = a_n + d$
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$d = a_{n+1} - a_n$
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

- **geometrisch:**
$a_{n+1} = a_n \cdot q$
$a_n = a_0 \cdot q^n$
$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$
$S_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$\Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow S_n = a_0 \frac{1}{1-q}$

- **harmonisch:**
$a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$ ⇒ Konvergent genau dann, falls $\alpha > 1$

- **Euler'sche Zahl:**
$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

·Funktionen:

- **gerade:** $f(-x) = f(x)$ → symmetrisch zur y-Achse
- **ungerade:** $f(-x) = -f(x)$ → symmetrisch zum Ursprung

→ ungerade(ungerade(x)) ⇒ ungerade
→ ungerade' ⇒ gerade

- **Exponetial- und Logarithmusfunktionen:**

$\log_x(a \cdot b) = \log_x(a) + \log_x(b)$
$\log_x(a : b) = \log_x(a) - \log_x(b)$
$\log_x(a^b) = b \cdot \log_x(a)$

$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$
$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}$

$a^m b^m = (ab)^m$ $\quad a^m : b^m = (a:b)^m$
$a^m a^n = a^{m+n}$ $\quad a^m : a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$ $\quad a^x = e^{x\ln(a)}$ $\quad (a^x)' = \ln(a)\, a^x$

- **Stetigkeit:** → alle elementaren Funktionen und ihre Umformungen $(+, -, \cdot, :, \circ)$ sind stetig
$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$
↳ linker und rechter Grenzwert gleich

- **Grenzwerte:**
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \quad \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(ax)} = \frac{1}{a}$

→ Bernoulli - l'Hôpital: ⇒ Falls $f(x)$ und $g(x)$ beide gegen 0 oder beide gegen $\pm\infty$ streben
$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

→ Brüche: durch die grösste Potenz teilen
→ Wurzeln: mit 3. binomischen Formel erweitern
→ Betrag: $\lim_{x\to 1^-} |x-1| = \lim_{x\to 1} -(x-1)$
→ Substitution: Limes anpassen
→ Dominante Funktion identifizieren
→ Polynom: Divison durch (x - Nullstelle)
→ Ausklammern, Kürzen, Umformen, Einsetzen

- **Zwischenwertsatz:**
$x \to f(x)$, $[a,b]$ stetig; m zwischen $f(a)$ und $f(b)$ → es gibt min. ein ξ mit $f(\xi) = m$

- **injektiv:**
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
→ Jede horizontale Gerade schneidet den Graph höchstens ein Mal (oder gar nicht)

- **surjektiv:**
$\forall y \in W(f)\ \exists x \in D(f)$
→ Jeder Wert im Zielbereich wird min. 1 Mal angenommen

- **bijektiv:** injektiv + surjektiv

Injektivität ⇔ streng monoton

- **Inverse Funktion:**
1. Bijektivität zeigen → ID falls nötig eingrenzen
2. x und y vertauschen
3. nach y auflösen

⇒ graphisch: Spiegelung an $y = x$

- **Asymptoten:**
g ist eine Asymptote von f falls
$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$

→ lineare Asymptote: $g(x) = ax + b$
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ ; \ \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$

→ waagrechte Asymptote:
Zählergrad < Nennergrad ⇒ $y = 0$
Zählergrad = Nennergrad ⇒ $y = a_n / b_m$

→ schiefe Asymptote:
Zählergrad > Nennergrad ⇒ Polynomdivision

→ "senkrechte Asymptote":
⚠ keine Asymptote, sondern Pol, da keine Funktion → Nenner hat eine Nullstelle

·Differentialrechnung:

→ **Differentialquotient:**
$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
Falls der Grenzwert existiert und links- und rechtsseitig übereinstimmt, ist f ad x_0 differenzierbar

Differenzierbarkeit ⇒ Stetigkeit

→ Linearität:
$\frac{d}{dx}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$

→ Produktregel:
$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$
$\frac{d}{dx} \prod_{i=1}^{N} f_i = \sum_{k=1}^{N} f'_k \prod_{i=1, i\neq k}^{N} f_i$

→ Quotientenregel:
$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

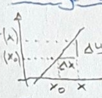
→ Kettenregel:
$\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx}(f\circ g) = f'(g(x))\cdot g'(x) = (f'\circ g)\cdot g'$

→ Ableitung der Inversen:
$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$

$(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1} \quad f^{-1}\circ f = I$
$(a\cdot b)\circ c = (a\circ c)\cdot(b\circ c)$

- **Lineare Ersatzfunktion**
$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

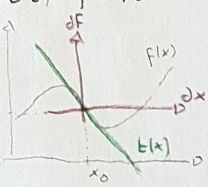
- **Tangentengleichung:**



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow f'(x_0)(x - x_0) = y - y_0$
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

- **Fehlerrechnung:**
→ absoluter Fehler: Δf
$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx df = f'(x)\,dx$
→ relativer Fehler:
$\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f}$

- **Differentiale:**
$f'(x_0) = \frac{df}{dx} \quad df = f'(x_0)\,dx$
$df: dx \longrightarrow f'(x_0)\,dx$
↳ lineare Ersatzfunktion in neuen Koordinaten



$\Delta x = x - x_0$ klein, gilt $\Delta f = f(x) - f(x_0) \approx df$

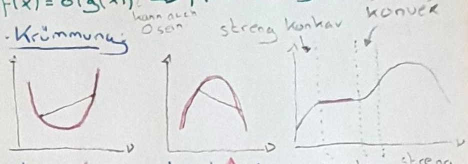
- **Mittelwertsatz**
f diff'bar auf $[a,b]$, es gibt min. ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ → es gibt einen Punkt ξ mit durchschnittlicher Steigung

- **Satz von Rolle**
f' diff'bar auf $[a,b]$; $x_1, x_2 \in (a,b)$ mit $f(x_1) = f(x_2)$
es gibt ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi) = 0$

- **Extremalaufgaben:**
- $f'(x) = 0$
- Randpunkte des Definitionsbereiches
- Punkte, in denen die Ableitung nicht definiert ist

- **Grössenordnung:**
$f(x) = o(g(x))$ → f ist von kleinerer Ordnung, wächst langsamer als g
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ → Landau-Symbol: o
$f(x) = O(g(x))$ → f wächst nicht schneller als g
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a \neq \infty$ $\quad \boxed{\exp > \text{Potenz} > \ln}$ ⚠ Fakultät
$f(x) = o(g(x)) \Rightarrow f(x) = O(g(x))$
kann auch 0 sein

- **Krümmung:**



konVex — linksgekrümmt — Tiefpunkt
konkΛv — rechtsgekrümmt — Hochpunkt
konkav / konvex — streng konkav

konvex ⇔ f' monoton wachsend ⇔ $f'' \geq 0$
konkav ⇔ f' monoton fallend ⇔ $f'' \leq 0$

strikt konvex ⇔ f' strikt mw ⇔ $f'' > 0$
strikt konkav ⇔ f' strikt mf ⇔ $f'' < 0$

- **Wendepunkt:**
$f''(x) = 0$ und f'' ad S x das Vorzeichen ändert
Wendepunkt ⇒ $f''(x) = 0$
⚠ Sattelpunkt ist keine lokale Extremalstelle, obwohl $f'(x) = 0$

·Komplexe Zahlen: $\boxed{i^2 = -1}$

$z = a + bi = r\,\text{cis}(\varphi) = re^{i\varphi}$ ← Argument $\arg(z)$
b: Imaginärteil $\text{Im}(z)$
a: Realteil $\text{Re}(z)$
r: Betrag $|z|$

$a = r\cos(\varphi) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$b = r\sin(\varphi) \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$
⚠ Achtung welcher Quadrant?

→ Euler-Formel: $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

- **Komplexe Konjugation:**
ändert das Vorzeichen des Imaginärteils
Spiegelung an der reellen Achse

$\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
$|z|^2 = z\cdot\bar{z} \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \overline{z_1\cdot z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
$\bar{z}^a = \overline{z^a}$

- **Addition bzw. Subtraktion:**
$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + i(b \pm d)$

- **Multiplikation:**
$z_1\cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc)$
→ Beträge multiplizieren, Argumente addieren

- **Division:**
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id}\cdot\frac{c - id}{c - id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$
→ mit konjugiert komplexen Zahl erweitern (3. Binomische Formel)
→ Beträge dividiert, Argumente subtrahiert

- **Potenzen:**
$z^n = r^n\,\text{cis}(n\varphi)$

- **Euler'sche Identität:**
$e^{\pi i} + 1 = 0$

- **Wurzeln:**
$\sqrt[n]{r}\,\text{cis}\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{360^\circ}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$
→ n Lösungen die gleichmässig auf einem Kreis verteilt sind

- **Allgemeines**
$|z_1 - z_2|$ → Abstand zwischen z_1 und z_2
$|z - z_0| = R$ → Kreis mit Radius R und Zentrum z_0
$|z - z_0| < R$ → beschreibt das Innere dieses Kreises
$|z - z_0| > R$ → beschreibt das Äussere dieses Kreises

- **Quadratische Gleichung**
$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $\boxed{D > 0}$ $\quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-D}\,i}{2a}$ $\boxed{D < 0}$
$D = b^2 - 4ac$

- **Fundamentalsatz der Algebra:**
→ jedes Polynom n-ten Grades hat genau n Nullstellen (mit Vielfachen)
→ sind alle Koeffizienten a_i reell, dann treten die komplexen NS im komplex konjugiert auf
→ jedes Polynom kann als Produkt von n Linearfaktoren geschrieben werden

$f'(x) = 0$ ⇐ lokales Extremum

· Potenzreihen:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$

-> Funktionen, für die eine Potenzreihe existiert, heissen analytisch

-> Potenzreihen sind eindeutig

-> Entwicklungspunkt x_0

· Rechenregeln:

Addieren, Subtrahieren, Ableiten, Integrieren: gliedweise
Multiplikation, Division: Distributivgesetz

· Konvergenzradius:

Konvergenzbereich ist ein offenes, halboffenes, geschlossenes Intervall mit Mittelpunkt x_0

$$r = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\right| \qquad |(ax-x_0)| < r$$

· Taylorpolynom:

$(n \to \infty)$: Taylorreihe

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

-> $f(x)$: gerade -> $a_{ungerade} = 0$

-> $f(x)$: ungerade -> $a_{gerade} = 0$

· Ansätze:

-> evt. Konvergenzradius ändern

-> Taylorreihenentwicklung anwenden (falls leicht diff'bar)

-> Koeffizientenvergleich (nur die ersten paar Koeffizienten)

-> bekannte Reihe umformen (Nenner auf die andere Seite bringen)

· wichtige Potenzreihen

Funktion	Potenzreihe	Konvergenzradius
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos^2(x)$	$1 - \frac{2^1}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \frac{2^7}{8!}x^8 - \dots$	$x \in \mathbb{R}$!
$\sin^2(x)$	$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{-1+2n}}{(2n)!}x^{2n} = \frac{2^1}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \dots$	
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{1+2n}}{(1+2n)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan^{-1}(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$\|x\|<1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$\|x\|<1$
$(1+x)^a$ (a: z.B. $1/2$ -> $\sqrt{\ }$)	$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \dots$	$\|x\|<1$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$	$\|x\|<1$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$	$\|x\|<1$
$\frac{1}{a-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \dots$	$\|x\|<a$
$\frac{a}{a-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n = 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \dots$	$\|x\|<a$
$\frac{1}{(x-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{a^{n+2}} = \frac{1}{a^2} + \frac{2x}{a^3} + \frac{3x^2}{a^4} + \dots$	$\|x\|<a$
$\frac{a^2}{(x-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{a^n} = \frac{1}{1} + \frac{2x}{a} + \frac{3x^2}{a^2} + \frac{4x^3}{a^3} + \dots$	$\|x\|<a$

· Vereinfachungen:

$\ln(3) = \ln(\sqrt{3}^2) = 2\ln(\sqrt{3})$, $= \ln(2) + \ln(1.5)$,

$\ln((3^{-1})^{-1}) = -\ln(1/3)$

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x/2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \dots\right)$$

$$\tan(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) = \sin(x)$$

-> Reihen einsetzen, ausmultiplizieren, Koeffizientenvergleich

· Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{n-k};\ \binom{n}{0} = 1;\ \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$$

n=0 <- 1 -> k=0
n=1 <- 1 1 -> k=1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

· Leibniz-Kriterium:

· a_n ist eine alternierende Folge · $|a_n| > |a_{n+1}|$

· a_n hat immer ein anderes Vorzeichen als a_{n+1}

-> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert -> (a_n) ist eine Nullfolge

· Bsp.: alternierende harmonische Reihe

$$s_n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

⚠ $(a_n) \to 0$ reicht nicht, dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

· Majorantenkriterium:

Jede Minorante einer konvergenten Reihe mit lauter positiven Summanden ist konvergent; jede Majorante einer divergenten Reihe mit lauter positiven Gliedern ist divergent

· Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q \quad \begin{array}{l} = 1 \to \text{keine Aussage} \\ < 1 \to \text{konvergent} \\ > 1 \to \text{divergent} \end{array}$$

· Ebene Kurven:

· Parameterdarstellung: (I)

$\vec{r}(t): [b_1, b_2] \to \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (x(t), y(t))$

· Implizite Darstellung: (II)

-> Beschreibung einer Kurve als Nullstelle einer Funktion

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0\}$

· Explizite Darstellung: (III)

-> Darstellung als Funktionsgraph $x \longmapsto f(x)$

· Umwandlung der Schreibweisen ineinander:

I -> II: t eliminieren

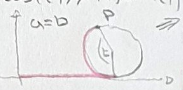
II -> III: nach y auflösen und ggf. in mehrere Funktionen aufteilen

III -> I: Parameter t einführen: $\vec{r}(t) = \binom{t}{f(t)}$

· Kurven in Polarkoordinaten:

Abstand ρ, Winkel φ $\quad \varphi \longmapsto \rho(\varphi)$

-> parametrisiert: $\vec{r}(\varphi) = (\rho(\varphi)\cos(\varphi), \rho(\varphi)\sin(\varphi))$



· Tangentensteigung:

$$\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

· Tangente im Punkt P:

-> Tangentialvektor

$$\boxed{\vec{R}(s) = \vec{r}(t) + s\cdot\dot{\vec{r}}(t)} \qquad \boxed{\dot{\vec{r}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))}$$

$\dot{\vec{r}}(t)$ zeigt in Richtung wachsendes t

$-\dot{\vec{r}}(t)$ zeigt in Richtung fallendes t

· Normale im Punkt P:

-> Normalenvektor

$$\boxed{\vec{R}(s) = \vec{r}(t) + s\cdot\vec{n}(t)} \qquad \boxed{\vec{n}(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}$$

-> im Gegenuhrzeigersinn

-> rechte Hand Regel

-> im Uhrzeigersinn: $(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$

-> einsetzen und überprüfen

· Einheitsvektor:

$$\vec{n}_E(t) = \frac{1}{|\vec{n}(t)|}\vec{n}(t)$$

-> jeder Vektor kann normiert werden, indem man ihn durch seinen Betrag teilt

-> $|\vec{n}(t)| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

· Orthogonalität:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi) = 0$ <- Skalarprodukt

· Parallelität:

$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi) = 0$ <- Kreuzprodukt

· Krümmung:

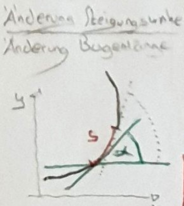
implizit: $-\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_x^2F_{yy}}{(F_x^2 + F_y^2)^{3/2}}$

$$\boxed{k(t) = \frac{\dot{\alpha}}{\dot{s}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}} = \frac{\text{Änderung Steigungswinkel}}{\text{Änderung Bogenlänge}}$$

-> Parameterdarstellung

$$\boxed{k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}}$$

-> explizite Darstellung



$|k(t)|$ gross <=> enge Kurve

$|k(t)|$ klein <=> weite Kurve

$k(t) > 0$ <=> α wächst <=> Linkskurve

$k(t) < 0$ <=> α fallend <=> Rechtskurve

horizontale Tangente <=> $\dot{y}(t) = 0$

vertikale Tangente <=> $\dot{x}(t) = 0$

· Krümmungskreis:

$$\text{Radius } \boxed{\rho(t) = \frac{1}{|k(t)|}}$$

-> 1. Näherung

-> Tangente: gleicher Punkt und Steigung

-> Kreis: zusätzlich 2. gleiche Krümmung

grosser Radius <=> kleine Krümmung

kleiner Radius <=> grosse Krümmung

· Evolute:

-> Kurve der Krümmungskreiszentren

$$\boxed{\vec{E}(t) = \vec{r}(t) + \frac{1}{k(t)}\frac{\vec{n}(t)}{|\vec{n}(t)|}}$$

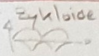
-> Parameter-Darstellung

$$\boxed{= (x,y) + (-\dot{y}, \dot{x})\cdot\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}}$$

-> explizite Darstellung

$$\boxed{= \left(x - \frac{f'(x)(1 + (f'(x))^2)}{f''(x)},\ f(x) + \frac{1 + (f'(x))^2}{f''(x)}\right)}$$

-> Evolute der Zykloide ist eine verschobene Zykloide



· Kreis:

Mittelpunkt (x_0, y_0); Radius R

(I) $\vec{r}(t) = (x_0 + R\cos(t), y_0 + R\sin(t))$

(II) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

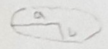
(III) $y = \pm\sqrt{R^2 - (x-x_0)^2} + y_0$

· Ellipse:

Mittelpunkt (x_0, y_0); Halbachse: a, b

(I) $\vec{r}(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + b\sin(t))$

(II) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$



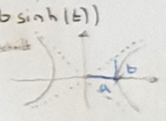
(III) $y = \pm\sqrt{1 - \frac{(x-x_0)^2}{a^2}}\cdot b + y_0$

· Hyperbel:

Steigung der Asymptoten: $\pm\frac{b}{a}$

(I) $\vec{r}(t) = (\pm a\cosh(t), b\sinh(t))$

(II) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ -> x-Abschnitt a



(III) $y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\cdot b$

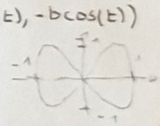
· Zykloide:

Radius: a, P im Abstand b vom Mittelpunkt

(I) $\vec{r}(t) = (at, a) + (-b\sin(t), -b\cos(t))$

· Lemniskate:

(I) $\vec{r}(t) = (R\sin(t), R\sin(2t))$



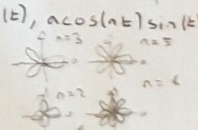
· Blätter:

(I) $\vec{r}(t) = (a\cos(nt)\cos(t), a\cos(nt)\sin(t))$

-> n gerade: 2n Blätter

-> n ungerade: n Blätter

-> a: Länge der Blätter



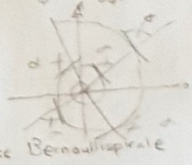
· Bernoullispirale:

$\rho(\varphi) = ce^{k\varphi}$

$\vec{r}(\varphi) = ce^{k\varphi}\binom{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$

-> Winkel zwischen Ortsvektor und Tangente ist konstant

-> Evolute ist eine gedrehte Bernoullispirale



· Integralrechnung:

· Hauptsatz der Infinitesimalrechnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

-> Riemannsumme

· Rechenregeln:

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$$

-> Linearität

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

-> Additivität

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

· Ableitung von Integralen:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_c^{g(x)} f(t)\,dt = f(g(x))\cdot g'(x)}$$

Integrieren:

- → f darf an einzelnen isolierten Stellen sogar unstetig sein, a und b müssen reell und fixiert sein, f darf keine Pole haben

Kettenregel:

$$\boxed{\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = f(g(x)) + C}$$

Bsp.: $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)}\, dx = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} = \ln(\ln(x)) + C$

→ $f' = \frac{1}{(\,)}$; $g = \ln(x)$ → $f'(g)$ → g'

Partielle Integration:

$$\boxed{\int u' v\, dx = uv - \int u v'\, dx}$$

→ nach Integral auflösen (evt. 2× partiell integrieren)
→ mit 1 multiplizieren (Umkehrfunktionen)

Substitution:

$$\boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f(y)\, dy = F(y) + C}$$

$y = g(x) \quad dy = g'(x)\, dx$

$$\boxed{\int_u^v f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(u)}^{g(v)} f(y)\, dy}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))\, g'(u)\, du}$$ $x = g(u)$, $dx = g'(u)\, du$

Gebrochenrationale Funktionen:

Grad Zähler ≥ Grad Nenner → Polynomdivision
Grad Zähler < Grad Nenner → Partialbruchzerlegung

Partialbruchzerlegung:

1. Nullstelle des Nenners finden (raten: 1, −1, 2, −2)
2. Zerlegung in Linear-Faktoren
3. Koeffizientenvergleich

A) einfache NS: $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$

B) mehrfache NS: $\frac{1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$

C) komplexe NS: $\frac{1}{(x^2+1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1}$

Trigo-Integrale:

$\int$	$0-\pi/2$	$0-\pi$	$0-2\pi$	$0-\pi/4$
sin	1	2	0	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$
$\sin^2$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\frac{\pi-2}{8}$
$\sin^3$	$2/3$	$4/3$	0	$\frac{8-5\sqrt{2}}{12}$
cos	1	0	0	$1/\sqrt{2}$
$\cos^2$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$\frac{2+\pi}{8}$
$\cos^3$	$2/3$	0	0	$\frac{5}{6\sqrt{2}}$
sin·cos	$1/2$	0	0	$1/4$
$\sin^2 \cdot \cos$	$1/3$	0	0	$\frac{1}{6\sqrt{2}}$
$\sin \cdot \cos^2$	$1/3$	$2/3$	0	$\frac{4-\sqrt{2}}{12}$

wichtige Integrale:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C}$$

$$\int \frac{1}{x+b}\, dx = \ln|x+b| + C$$

$$\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$$

$$\int \frac{x}{ax^2+b}\, dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+b| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \operatorname{artanh}(x) + C = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right), \quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx = \operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C, \quad x \geq 1$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)}\, dx = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x) + C$$

$$\int \sin^2(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right) + C$$

$$\int \cos^2(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right) + C$$

$$\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - x + C$$

$$\int \ln(x) \cdot x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2 + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \tfrac{1}{2}\left(\operatorname{arsinh}(x) + x\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\boxed{\int f'(x) \cdot f(x)\, dx = \tfrac{1}{2}\left(f^2(x)\right) + C}$$

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

$$\int \frac{(\ln(x))^n}{x}\, dx = \frac{(\ln(x))^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\, dx = \frac{y}{x^2+y^2} + C$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx) - b\cos(bx)\right) + C$$

$$\int \ln(x)^2\, dx = x\left(\ln(x)^2 - 2\ln(x) + 2\right) + C$$ → 2× partiell

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sqrt{x^2-1} + C$$

$$\int \sin(x)\cos^n(x)\, dx = -\frac{\cos^{n+1}(x)}{n+1} + C, \quad n \geq 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx$$

Symmetrien ausnutzen!!!

nur positive Werte integrieren!!!

Rekursionsformel für Sinus

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

wichtige Substitutionen:

Integral	Substitution	Differential
$\int f(x, \sqrt{ax+b})\, dx$	$x = \frac{u^2-b}{a} \Rightarrow \sqrt{ax+b} = u$	$dx = \frac{2u}{a}\, du$
$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2})\, dx$	$x = a\sin(u) \Rightarrow \sqrt{a^2-x^2} = a\cos(u)$	$dx = a\cos(u)\, du$
$\int f(x, \sqrt{a^2+x^2})\, dx$	$x = a\sinh(u) \Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} = a\cosh(u)$	$dx = a\cosh(u)\, du$
$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2})\, dx$	$x = a\cosh(u) \Rightarrow \sqrt{x^2-a^2} = a\sinh(u)$	$dx = a\sinh(u)\, du$
$\int f(\sin(x), \cos(x))\, dx$	$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$	$dx = \frac{2}{1+u^2}\, du$
$\int f(\sinh(x), \cosh(x))\, dx$	$u = e^x \Rightarrow \sinh(x) = \frac{u^2-1}{2u}, \cosh(x) = \frac{u^2+1}{2u}$	$dx = \frac{1}{u}\, du$

uneigentliche Integral:

→ 1. Gattung: $(a, b]$, unstetig in a

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\xi \to a^+} \int_\xi^b f(x)\, dx$$ → Pole, Definitionslücken

→ 2. Gattung: Integrationsintervall: unendlich

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{\xi \to \infty} \int_a^\xi f(x)\, dx$$ → Beträge

Bogenlänge:

→ ⚠ Achtung: positiv

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{r}}(t)|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\right| dt \quad \text{→ Betrag} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\varphi \end{aligned}}$$

Flächenberechnung:

→ Fläche zwischen x-Achse und Kurve:

$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)\, y(t)\, dt = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx}$$

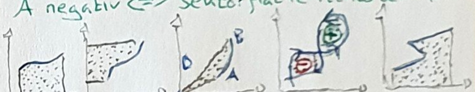
→ Fläche zwischen y-Achse und der Kurve:

$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, \dot{y}(t)\, dt = \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\, dy = \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f'(x)\, dx}$$

→ Sektor-fläche zwischen A, B und Ursprung:

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\int_{t_A}^{t_B} x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \rho^2(\varphi)\, d\varphi}$$

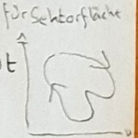
A positiv ⟺ Sektorfläche links der Kurve
A negativ ⟺ Sektorfläche rechts der Kurve



→ geschlossene Kurve: Alternative für Sektorfläche

$$A = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\dot{y}(t)\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t)\, y(t)\, dt$$

→ falls $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$



Rotationsoberfläche:

→ x-Achse:

$$\boxed{O_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

→ y-Achse

$$\boxed{O_y = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

→ Polarkoordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} O_x &= 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\sin(\varphi)\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\varphi \\ O_y &= 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho\cos(\varphi)\sqrt{\rho^2 + \dot{\rho}^2}\, d\varphi \end{aligned}}$$

Rotationsvolumen:

→ x-Achse (inneres Volumen):

$$\boxed{V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2\, \dot{x}(t)\, dt = \pi \int_{x_1}^{x_2} f(x)^2\, dx}$$

→ y-Achse (inneres Volumen):

$$\boxed{\begin{aligned} V_y &= \pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2\, \dot{y}(t)\, dt \\ &= \pi \int_{y_1}^{y_2} (f^{-1}(y))^2\, dy = \pi \int_{x_1}^{x_2} x^2 f'(x)\, dx \end{aligned}}$$

→ y-Achse (äusseres Volumen):

$$\boxed{V_y^A = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y(t)\, \dot{x}(t)\, dt = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} x \cdot f(x)\, dx}$$

→ Querschnittsfläche $Q(x)$:

$V = \int_a^b Q(x)\, dx$

Physikalische Anwendungen des Integrals:

Schwerpunkt:

$$\boxed{x_S = \frac{\int_a^b x\, q(x)\, dx}{\int_a^b q(x)\, dx}}$$

$q(x)$ ↳ y-Ausdehnung an der Stelle x

- → S liegt auf der Symmetrieachse
- → nicht jede Achse/Ebene, die durch S geht, teilt das Objekt in 2 gleich schwere Hälften
- → S muss nicht Teil des Objekts sein

(Massen-) Trägheitsmoment:

→ $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$ → $v = w \cdot r$ → $r = \sqrt{x^2+y^2}$

→ $E_{kin} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \cdot w^2 \cdot (x_i^2 + y_i^2)$

→ $E_{kin} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(m_1(x_1^2+y_1^2) + \ldots + m_n(x_n^2+y_n^2)\right)}_{\Theta_z = \text{Trägheitsmoment bzg. z-Achse}} w^2$

$$\Theta_y = \int_a^b x^2 \rho\, G(x)\, dx \qquad \Theta_x = \int_c^d y^2 \rho\, H(y)\, dy$$

$G(x)$ ↳ Fläche im Abstand x; ρ ↳ Dichte

$$\boxed{\Theta_x = \frac{1}{2}\pi \rho \int_a^b (f(x))^4\, dx}$$

→ ⚠ nur für Rotationskörper

→ kinetische Energie der Rotation:

$$\boxed{E_{kin} = \frac{1}{2} \Theta w^2 = T}$$

$dT = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} r^2 w^2 dm$

$dT = \frac{1}{2} v^2 \rho dV = \frac{1}{2} r^2 w^2 \rho dV$

Polares Flächenträgheitsmoment

→ setzt sich aus 2 axialen Flächträgheitsmomenten zusammen → $I_{polar} = I_x + I_y$

$$\boxed{\iint_A x^2+y^2\, dA = \iint_A \rho^2\, \rho\, d\rho\, d\varphi}$$

Trägheitsmoment um die z-Achse:

$$\boxed{\iiint_V \rho(x^2+y^2)\, dV = \iiint_V \rho^2 \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}$$

ρ ↳ Dichte

Schwerpunkt über Teilflächen:

$$\boxed{x_S = \frac{\sum x_{S_i} \cdot A_i}{\sum A_i}}$$

- x_{S_i} → Schwerpunkt der Teilstücke
- A_i ↳ Teilfläche
- $\sum A_i$ → Gesamtfläche

Trägheitsmoment (parametrisiert):

$$\Theta_x = \frac{1}{2}\pi \rho \int_A^B y^4(t)\, |\dot{x}(t)|\, dt$$

Scheitelform:

$F(x) = a(x-d)^2 + e$ → Verschiebung entlang der y-Achse; d → Verschiebung entlang x-Achse

$S = (d/e) \quad d = -\frac{b}{2a} \quad e = \frac{-b^2+4ac}{4a}$

- $|a| < 1$ → breiter → Stauchung
- $|a| > 1$ → schmaler → Streckung in y-Richtung
- $a > 0$ → nach oben geöffnet
- $a < 0$ → nach unten geöffnet

Quadratisch Ergänzen:

$2x^2 - 8x - 4 \quad |:2$ → $x^2 - 4x - 2$ → $(-4):2$

→ $(x-2)^2 - 4 - 2$ → $(x-2)^2 - 6$

Mehrdimensionale Funktionen:

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Beispiel: harmonische Welle

$F(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{c} - t\right) + \varphi\right)$

A: Amplitude, T: Periode, c: Phasengeschwindigkeit, φ: Phasenverschiebung

→ $\frac{x}{c} - t$ = konst. ⇒ Fortschreiten einer Welle

Niveaulinie/-Fläche/-menge:

$\{(x,y) \in D(f) \mid F(x,y) = c\},\ c \in \mathbb{R}$ ↳ in der xy-Ebene eingezeichnet

- → Dimension Funktion = n
- → Graph = n+1 → Niveaumenge = n

starke Steigung ⇔ N.-linien liegen eng zueinander

geringe Steigung ⇔ N.-linien liegen weit ander

Partielle Ableitungen:

$$F_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial x}$$

→ alle Variablen nach denen nicht abgeleitet wird, werden als Konstanten betrachtet

Satz von Schwarz:

$$F_{xy}(x_0,y_0) = F_{yx}(x_0,y_0); \quad \frac{\partial F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y \partial x}$$

- → falls F_{xy} und F_{yx} in einer Umgebung von (x_0,y_0) stetig sind
- → Reihenfolge von partiellen Ableitungen ist egal

Integrabilitätsbedingung (IB):

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "\partial/\partial x"] \arrow[d, "\partial/\partial y"'] & \varphi = F_x \arrow[d, "\partial/\partial y"] \\ \psi = F_y \arrow[r, "\partial/\partial x"'] & F_{xy} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "F_x"'] \arrow[d, "F_y"] \arrow[dr, "F_z"] & \\ \varphi & \psi & \chi \end{tikzcd}$$

$\varphi_y \equiv \psi_x \qquad \psi_z \equiv \chi_y \qquad \varphi_z \equiv \chi_x$

- → stetig diff'bare Funktionen
- → D: achsenparalleles Rechteck / Quader

Linearisieren: → lineare Ersatzfunktion

$$\boxed{\begin{aligned} (x,y) &\to F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\ L(\vec{r}) &= F(\vec{r}_0) + \operatorname{grad} F(\vec{r}_0)(\vec{r} - \vec{r}_0) \end{aligned}}$$

Totales Differential

$$\boxed{dF = F_x(x_0,y_0)\,dx + F_y(x_0,y_0)\,dy}$$

→ lineare Ersatzfunktion in neuem Koordinatensystem

Fehlerrechnung:

- → lineare Approximation über das totale Differential
- → absoluter Fehler: $\Delta F \sim dF$
- → relativer Fehler: $\Delta F / F$

Extrema: ¡Tipp: D(F) zeichnen!

1) $\operatorname{grad}(F) = \vec{0}$; $F_x(x_0,y_0) = F_y(x_0,y_0) = 0$
2) Punkte, an denen die Ableitung nicht definiert ist
3) Rand des Definitionsbereiches oder Eckpunkte (direkt in die Funktion einsetzen oder Rand parametrisieren)

D(F) beschränktes Gebiet mit Rand ⇔ F hat je eine globale Minimal-/Maximalstelle

$\operatorname{grad}(F) = \vec{0}$ ⇐ Extremalstelle

Gradient:

$$\operatorname{grad} = \nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}; \quad \operatorname{grad}(F) = \nabla F = \begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r}) \\ F_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

∇ ↳ Nabla-Operator

- → ordnet einer Funktion (Skalarfeld) ein Gradientenfeld (Vektorfeld) zu
- → Gradient zeigt in die Richtung der maximalen Richtungsableitung
- → $-\operatorname{grad}(F)$: Richtung der minimalen Ableitung
- → Betrag des Gradienten: Wert der maximalen Richtungsableitung
- → Gradient steht senkrecht auf Niveauflächen] und der Tangentialebene

Tangentialebene:

→ Methode 1:

$$\boxed{z = F(x_0,y_0) + F_x(x_0,y_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

→ Methode 2: $F(x,y,z) = \text{const}$

$$\boxed{\operatorname{grad}(\phi)|_P(x,y,z) = \operatorname{grad}(\phi)|_P(x_0,y_0,z_0)}$$

- → Hilfsfunktion $\phi(x,y,z)$, sodass $F(x,y,z) = \text{const}$ eine Niveaufläche von ϕ ist
- → Gradient von ϕ ist normal auf F

Richtungsableitung:

$$\boxed{D_{\vec{e}} F(x_0,y_0,z_0) = \vec{e} \cdot \operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)}$$

$\vec{e}$ ↳ Einheitsvektor: $\|\vec{e}\| = 1$

Verallgemeinerte Kettenregel:

Funktion $F(x,y,z)$; Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

→ zusammengesetzte Funktion $F(t) = F(r(t))$

$$\boxed{F'(t) = \operatorname{grad} F(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)}$$

Verallgemeinerte Kettenregel 2D

$$F'(t) = F_x(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + F_y(x(t),y(t)) \cdot \dot{y}(t)$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}}$$

Tangentensteigung an F:

$$-\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$$

Koordinatentransformation:

– kartesisch in polar-Koordinaten

$x(\rho,\varphi) = \rho\cos(\varphi)$

$y(\rho,\varphi) = \rho\sin(\varphi)$

$\rho \mapsto (x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi))$, φ fest

$\tilde{F}(\rho,\varphi) = F \circ (x,y)$

$$\boxed{\tilde{F}_\rho(\rho,\varphi) = F_x \cdot x_\rho + F_y \cdot y_\rho}$$

→ in F_x, F_y wird $(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi))$ eingesetzt

Laplace-Operator Δ:

$\tilde{F}(\rho,\varphi) = F(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi))$

$$\Delta F = F_{xx} + F_{yy} = \tilde{F}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{F}_\rho + \frac{1}{\rho}\tilde{F}_{\varphi\varphi}$$

Mehrdimensionale Integralrechnung:

$$\iint_B F(x,y)\, dA = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} F(x,y)\, dy\, dx$$

- → Berechnung erfolgt von innen nach aussen
- → Grenzen dürfen nur von Variablen abhängen nach denen zu einem späteren Zeitpunkt noch integriert wird
- → eine Variable darf nicht mehr auftauchen, wenn nach ihr bereits integriert wurde

Vertauschen der Integrationsreihenfolge:

- konstante Grenzen: ohne Anpassen
- abhängige Grenzen: Anpassen → Skizze

Flächen- und Volumenberechnung:

F = 1 → Fläche/Volumen durch Integrationsgrenzen bestimmt $\quad \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} 1\, dx\, dy$

Masse: $\iiint_V \rho\, dV$

Oberflächenberechnung:

$$\boxed{O = \iint_B |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv}$$

- → Fläche als Funktion von 2 Parametern
- ↳ partielle Ableitungen
- → Fläche explizit gegeben $z = F(x,y)$ → parametrisiert: $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ F(u,v) \end{pmatrix}$

Schwerpunktberechnung: $S = (x_S, y_S)$

$$\boxed{x_S = \frac{1}{|F|} \iint_F x\, dx\, dy} \quad \boxed{y_S = \frac{1}{|F|} \iint_F y\, dy\, dx}$$

→ Symmetrieen ausnutzen

Koordinatentransformation:

$dF = dx\,dy = |\det(J)|\, du\, dv$

→ Integrationsbereich anpassen

Jacobi-Matrix:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$

- → Verzerrungsfaktor
- → Spaltenvektoren: nicht normierten Richtungsvektoren des neuen Koordinatensystems
- → linear

Zylinderkoordinaten:

$x = \rho\cos(\varphi)$	$0 \le \rho$	$dF = \rho\, d\rho\, d\varphi$
$y = \rho\sin(\varphi)$	$0 \le \varphi \le 2\pi$	$dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$
$z = z$	$z \in \mathbb{R}$	$dO = \rho\, d\varphi\, dz$

Kugelkoordinaten:

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$	$0 \le \rho$	$dV = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$
$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$	$0 \le \theta \le \pi$	$dO = \rho^2 \sin\theta\, d\varphi\, d\theta$
$z = \rho\cos\theta$	$0 \le \varphi < 2\pi$	

$x = \rho\cos\theta\cos\varphi$	$0 \le \rho$	$dV = \rho^2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$
$y = \rho\cos\theta\sin\varphi$	$0 \le \varphi < 2\pi$	$dO = \rho^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta$
$z = \rho\sin\theta$	$-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$	

Elliptische Koordinaten:

→ $r \in [0,1]$

$x = ar\cos\phi$	$0 \le r$	$dF = ab\,r\,dr\,d\phi$
$y = br\sin\phi$	$0 \le \phi < 2\pi$	$dV = ab\,r\,dr\,d\phi\,dz$
$z = z$	$z \in \mathbb{R}$	$dO = ab\,r\,dz\,d\phi$

Satz von Steiner

$$J_a = J_a^{CM} + m \cdot d^2$$

- J_a = TM um die Achse a
- J_a^{CM} = TM um // Achse zu a durch Schwerpunkt
- d = Abstand der beiden Achsen

Ableitung von Integralen mit Parametern:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b f_x(x,t)\,dt}$$

$$\psi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t,x)\,dt$$

$$\boxed{\psi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(t,x)\,dt + f(v(x),x)\,v'(x) - f(u(x),x)\,u'(x)}$$

↳ Anpassen der Integralgrenzen

Vektoranalysis:

Skalarfeld:
eine Funktion, die jedem Punkt ein Skalar zuordnet
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$

Vektorfeld:
eine Funktion, die jedem Punkt einen Vektor zuordnet
$\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $(x,y,z) \longmapsto \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

Stationarität:
stationär: zeitunabhängig
instationär: zeitabhängig

Homogenität:
sowohl Richtung, als auch Betrag hängen nicht vom Ort ab → alle Vektoren des Urbildraumes werden auf den selben Vektor abgebildet $\boxed{\vec{v}(\vec{r}) = \vec{a}}$

Feldlinien:
Kurven, die in jedem Punkt tangential an das Vektorfeld liegen
stationäre Felder: Feldlinien schneiden sich nie
instationäre Felder: Feldlinien können sich schneiden

Differentialoperatoren:
- **Gradient**: Skalarfeld → Vektorfeld

$$\boxed{\text{grad}(f) = \vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z)}$$

- **Divergenz**: Vektorfeld → Skalarfeld

$$\boxed{\text{div}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = v_{1,x} + v_{2,y} + v_{3,z}}$$ Quelle

→ Mass für Quelldichte, Auseinanderstreben
$\text{div}(\vec{v}) > 0 \Leftrightarrow$ Grösse wird in diesem Punkt erzeugt
$\text{div}(\vec{v}) < 0 \Leftrightarrow$ Grösse wird in diesem Punkt vernichtet
$\text{div}(\vec{v}) \equiv 0 \Leftrightarrow \vec{v}$ heisst quellfrei
Senke

- **Rotation**: Vektorfeld → Vektorfeld

$$\boxed{\text{rot}(\vec{v}) = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{3,y} - v_{2,z} \\ v_{1,z} - v_{3,x} \\ v_{2,x} - v_{1,y} \end{pmatrix}}$$

→ Mass für Mikrowirbel

Zusammensetzungen Diff'operatoren:
$\text{div}(\text{grad}(f)) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$

$\boxed{\text{rot}(\text{grad}(f)) \equiv \vec{0}}$ $\boxed{\text{div}(\text{rot}(\vec{v})) \equiv \vec{0}}$

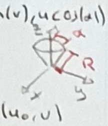
$\text{rot}(\text{rot}(\vec{v})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) - (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$

Flächen im Raum:
I Parameterdarstellung $(u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
II Implizit: Lösungsmenge von $g(x,y,z) = 0$
III Explizit: Graph von f

Ebene:
I: $\vec{r}(u,v) = \vec{r}_0 + u\vec{a} + v\vec{b}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a}\times\vec{b}$
II: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$
III: $z = f(x,y) = z_0 + \dfrac{c_1(x_0 - x) + c_2(y_0 - y)}{c_3}$

Kugel:
I: $\vec{r}(u,v) = (R\sin(v)\cos(u), R\sin(v)\sin(u), R\cos(v))$
II: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $\quad$ ↳ $u \in [0, 2\pi]$; $v \in [0, \pi]$
III: $f_{1,2} = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = z$

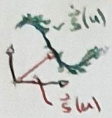
Mantel eines geraden Kreiskegels:
I: $\vec{r}(u,v) = (u\sin(\alpha)\cos(v), u\sin(\alpha)\sin(v), u\cos(\alpha))$
$u = [0, R]$, $\vartheta = \alpha$, $v = [0, 2\pi] \to \varphi$



Parameterlinien:
v-Linie: Halte $u = u_0$ fix, $v \longmapsto \vec{r}(u_0, v)$
u-Linie: Halte $v = v_0$ fix, $u \longmapsto \vec{r}(u, v_0)$

Tangentenfläche:

$$\boxed{S: \vec{r}(u,v) = \vec{s}(u) + v\cdot\dot{\vec{s}}(u)}$$



Normaleneinheitsvektor:

$$\boxed{\vec{n}(u_0, v_0) = \pm\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}}$$

→ unabhängig von der Parametrisierung

Böschungsflächen:
Flächen, für die die z-Koordinaten des NEV konstant bleiben

Fluss bei einfachen Flächen:

$$\boxed{\Phi = \iint_B \vec{v}\cdot\vec{n}\,dO}$$ ⚠ $|\vec{n}| = 1$ → Normaleneinheitsvektor

→ nur bei Flächen, die parallel zu den Koordinatenflächen anwenden

Fluss bei parametrisierten Flächen:

$$\boxed{\Phi = \iint_B \vec{v}(\vec{r}(u,v))\cdot(\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v))\,du\,dv}$$

→ $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ ist der NV und muss nicht normiert werden, da er den Verzerrungsfaktor beinhaltet
→ 3-Finger-Regel für die Richtung des NV benutzen

Eigenschaften Fluss:
- Fluss ist additiv (Bsp.: Würfel: Summe der Seiten)
- nur die Projektionen der Feldvektoren auf den NV spielen eine Rolle (Skalarprodukt)
- Fluss durch eine Fläche in entgegengesetzter Richtung → Vorzeichenwechsel

Divergenzsatz: (Satz von Gauss)

$$\boxed{\Phi = \iint_{\partial B} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dO = \iiint_B \text{div}(\vec{v})\,dV}$$

→ B muss ein beschränktes Volumen sein
→ Randfläche ∂B muss geschlossen sein
→ $\vec{v}$ muss in ganz B definiert und diff'bar sein
→ Richtung des Flusses ist von innen nach aussen

Koordinatenfreiheit der Divergenz:

$$\text{div}\,\vec{v}(\vec{r}_0) = \lim_{\text{vol}\to 0}\frac{1}{\text{vol}(\Delta V)}\iint_{\partial(\Delta V)} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dO$$

- Ortsvektor von P_0 ist $\vec{r}_0$, Δ Volumen mit $P_0 \in \Delta V$ und Rand $\partial(\Delta V)$
→ Divergenz misst Fluss pro Volumen infinitesimal
→ $\text{div}\,\vec{v} = \text{div}\,\tilde{\vec{v}} = \tilde{v}_{1,\xi} + \tilde{v}_{2,\eta} + \tilde{v}_{3,\zeta}$
↳ (ξ, η, ζ) ein kartesisches KOS

Fluss bei quellfreiem Vektorfeld:
$\text{div}\,\vec{v} \equiv 0$ → Fluss durch jede Randfläche eines Volumens ist immer 0

Arbeit: (Zirkulation)

$$\boxed{A = \int_W \vec{v}\cdot d\vec{r}}$$ → Arbeit von $\vec{v}$ entlang W $\quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt$

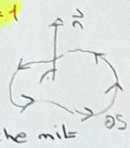
$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}\,dt}$$ → parametrisiert

→ unabhängig von der Geschwindigkeit
$A > 0 \Leftrightarrow$ Arbeit wird am System verrichtet
$A < 0 \Leftrightarrow$ das System verrichtet Arbeit

Operationen von Wegen:
- Vorzeichenwechsel ändert die Richtung
- Wege lassen sich aufaddieren

Satz von Stokes: ⚠ $|\vec{n}| = 1$

$$\boxed{\int_{\partial S} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}\,dO}$$



→ S ist eine beschränkte Fläche mit geschlossenem Rand ∂S
→ $\text{rot}(\vec{v})$ muss auf der ganzen Fläche S definiert sein
→ ∂S wird bzg. $\vec{n}$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen → Rechte-Hand-Regel
→ Weg eventuell ergänzen

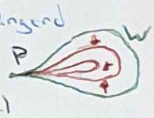
Eigenschaften Rotation:
$\text{rot}\,\vec{v} \equiv \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}$ ist wirbelfrei
$\text{rot}\,\vec{v}\cdot\vec{n}$ maximal
$\Leftrightarrow \text{rot}\,\vec{v}$ und $\vec{n}$ sind parallel
$\Leftrightarrow \text{rot}\,\vec{v}$ steht senkrecht auf S
- $\text{rot}\,\vec{v}$ ist die Wirbelung in P_0 um die Achse $\vec{n}$
- $\text{rot}\,\vec{v}$ entspricht der Wirbelstärke

Rechenregeln Rotation:
$\text{rot}(c\vec{v}) = c\cdot\text{rot}(\vec{v})$
$\text{rot}(\vec{v} + \vec{u}) = \text{rot}(\vec{v}) + \text{rot}(\vec{u})$ } Linearität

Rechenregeln Divergenz:
$\text{div}(c\vec{v}) = c\cdot\text{div}(\vec{v})$
$\text{div}(\vec{v} + \vec{u}) = \text{div}(\vec{v}) + \text{div}(\vec{u})$ } Linearität
$\text{div}(\vec{v}\times\vec{u}) = \vec{u}\,\text{rot}(\vec{v}) - \vec{v}\,\text{rot}(\vec{u})$

Greensche Formel:
$\text{div}(f\,\text{grad}(g)) = \text{grad}(f)\,\text{grad}(g) + f\Delta g$

einfach zusammenhängende Gebiete:
jeder geschlossene Weg lässt sich stetig auf einen Punkt zusammen ziehen und jedes Punktepaar lässt sich mit einem Weg verbinden, der das Gebiet D nicht verlässt
→ Bsp.: einfach zusammenhängend
$\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{P\}$,
$\mathbb{R}^3 \setminus$ gefüllte Kugel, Kugeloberfläche (auch Ellipsoid z.B.)



→ Coulombfeld einer Punktladung
→ Gravitationsfeld einer Kugel, ausserhalb der Kugel
→ Strömungsfeld von Hagen-Poiseuille
→ Bsp.: nicht einfach zusammenhängend
$\mathbb{R}^3 \setminus$ Gerade, $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$, Torus

Konservative Felder / Potentialfelder:
$\vec{v}$ ist konservativ und $D(\vec{v})$ einfach zusammenh.
$\Leftrightarrow \oint_W \vec{v}\,d\vec{r} = 0 \;\forall$ geschlossenen Wege W
$\Leftrightarrow \int_W \vec{v}\,d\vec{r} = \text{const} \;\forall$ Wege W von P nach Q
↳ Arbeit ist unabhängig vom Weg
$\Leftrightarrow \vec{v}$ ist ein Potential-/Gradientenfeld mit Potential f
$\Leftrightarrow$ es gibt eine Skalfunktion f mit $\vec{v} = \text{grad}\,f$
$\Leftrightarrow \vec{v}$ ist wirbelfrei $\boxed{\Leftrightarrow}$ $\text{rot}\,\vec{v} \equiv \vec{0}$
$\Leftrightarrow \vec{v}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingungen
$\Leftrightarrow \int_W \vec{v}\,d\vec{r} = \Phi_{\text{Ende}} - \Phi_{\text{Anfang}}$ → Potential
⚠ gilt nur falls $D(\vec{v})$ einfach zusammenhängend, sonst gilt nur $\vec{v}$ konservativ $\Rightarrow \text{rot}\,\vec{v} \equiv \vec{0}$
→ Bsp.: Gravitationsfeld, elektrisches Feld

Arbeit berechnen:

Weg geschlossen?
- Nein → Ist $\text{rot}(\vec{v}) = \vec{0}$ und $D(\vec{v})$ einfach zusammh.?
  - Nein ①
  - Ja ②
- Ja → Ist $\text{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}$ const?
  - Nein ③
  - Ja ④

① Weg parametrisieren $\quad W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt$

② Es existiert ein Potential $\Phi(x,y,z)$, $\vec{v} = \text{grad}(\Phi)$
$\left.\begin{array}{l} \Phi_x = v_1 \\ \Phi_y = v_2 \\ \Phi_z = v_3 \end{array}\right\} \Phi(x,y,z)$ → „$+C(y,z)$"
→ $W = \Phi_{\text{Ende}} - \Phi_{\text{Anfang}}$

③ Satz von Stokes

④ Falls const $= 0$ → $W = 0$,
sonst $W = \text{rot}(\vec{v})\cdot\vec{n}\iint_S dO$ $\quad$ ⚠ $|\vec{n}| = 1$

Bsp.: Potential
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2xy + 3 \\ x^2 - 4z \\ -4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{integrieren}} \begin{array}{l} x^2y + 3x + C(y,z) \\ x^2y - 4zy + C(x,z) \\ -4zy + C(x,y) \end{array}$

→ $\Phi(x,y,z) = x^2y + 3x - 4zy + C$

Differentialgleichungen:

Gleichungen von Funktionen und deren Ableitungen

gewöhnliche Differentialgleichung DGL:
(ordinary differential equation ODE)

$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$

→ y ist eine Funktion in einer Variable

allgemeine Lösung:
Lösungen sind eine Schar von Funktionen mit Scharparameter C

Anfangswertproblem: AWP
$y(x_0) = y_0$ soll gelten → C ist eindeutig bestimmt → man erhält die spezielle Lösung (partikuläre Lösung)

Ordnung:
entspricht der höchsten Ableitung, die vorkommt → Bsp.: $y'' + y' + y = 0 \Rightarrow$ Ordnung 2

Linearität:
Die gesuchte Funktion y(x) und alle ihre Ableitungen $y', y'', \dots$ kommen nur linear vor
→ die unabhängige Variable x darf in nicht linearer Form vorkommen
- lineare DGL: $2y'' - x^2 y = \cos(x)$
- nicht lineare DGL: $y'(x) = \cos^2(y(x)) + e^y + y \cdot y''$

Homogenität:
alle Terme der DGL enthalten die gesuchte Funktion y(x) oder eine ihrer Ableitungen
→ ein Term, der nicht von y abhängt heisst Störterm und führt zu einer inhomogenen DGL
- homogene DGL: $y' - x^2 y = 0$
- inhomogene DGL: $y'' - y + e^x = 0$

  ↳ Störterm

Autonomie:
Die unabhängige Variable x kommt nicht explizit vor

autonome DGL: $F(y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$

nicht autonome DGL: $F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$

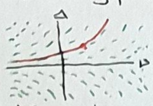
Konstante Koeffizienten:
alle Koeffizienten vor der gesuchten Funktion y(x) und alle ihren Ableitungen $y'(x), y''(x), \dots$ sind konstant

Superpositionsprinzip:
→ gilt für lineare, homogene DGL
→ jede Linearkombination von Lösungen ist ebenfalls eine Lösung der DGL

Singuläre Lösung:
- kann nicht aus der allgemeinen Lösung durch Einsetzen gewonnen werden
- Problem bzgl. Eindeutigkeit eines AWP
- Bsp: triviale Lösung $y(x) \equiv 0$, Enveloppen

Existenzsatz: (Picard - Lindelöf)
Ein Anfangswertproblem $y'(x) = f(x,y)$ und $y(x_0) = y_0$ besitzt eine eindeutige Lösung falls $F(x,y)$ in $\mathbb{D}(f)$ stetig ist und nach y stetig partiell differenzierbar ist

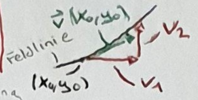
Regulär:
Kurvenschar der Lösung hat keine Kreuzungspunkte

Richtungsfeld:


Graphische Darstellung einer DGL der Form $y' = f(x,y)$
→ Graph $\Gamma(y)$ einer speziellen Lösung liegt tangential zum Richtungsfeld

Partielle DGL: (partial differential equation) PDE
Die gesuchte Funktion hängt von mehreren Variablen ab → $F: (x,y,z,t) \mapsto F(x,y,z,t)$
- Bsp: $F_{tt} = c^2 \cdot (F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}) = c^2 \Delta F$

Feldlinien eines Vektorfeldes:
$$\boxed{y'(x) = \frac{V_2(x, y(x))}{V_1(x, y(x))}}$$



→ in einer kleinen Umgebung von (x_0, y_0) ist der Graph des AWP genau die Feldlinien durch (x_0, y_0) → Achtung Vorzeichen
→ Niveaulinien des Potentials und Feldlinien sind Orthogonaltrajektorien

Homogene, lineare DGL 1. Ordnung:
→ Separation:
$$\boxed{y' = \frac{g(x)}{h(y)}}$$
$h(y) \cdot y' = g(x)$; $y'(x) = \frac{dy}{dx}$

$h(y) \cdot dy/dx = g(x)$

$h(y) \cdot dy = g(x) \cdot dx$

$$\boxed{\int h(y)\, dy = \int g(x)\, dx}$$
→ integrieren
→ "+C" nicht vergessen
→ nach y auflösen

→ alle linearen, homogenen DGL 1. Ordnung sind separierbar

→ Substitution:
manche nicht separierbare DGL werden erst durch eine passende Substitution separierbar
→ $y'(x) = F(y/x)$ → $u(x) = y(x)/x$
→ $y'(x) = f(ax + by + c)$ → $u(x) = ax + by + c$

Bsp.: $x^2 \cdot y'(x) = xy + y^2 \quad | :x^2$

→ $y'(x) = \frac{y}{x} + (y/x)^2 \quad | u(x) = y(x)/x$

→ $y(x) = x \cdot u(x)$; $y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$

$u(x) + x \cdot u'(x) = u(x) + (u(x))^2$

$\boxed{u'(x) =} \frac{u(x)^2}{x} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x}}; \boxed{\frac{1}{u(x)^2}}$ | Separation

$\int \frac{1}{u(x)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx$ ↳ g(x) ↳ h(y)

$-\frac{1}{u} = \ln(x) + C$ → $u(x) = -\frac{1}{\ln(x) + C}$

→ Rücksubstitution:

$y(x) = x \cdot u(x) = -\frac{x}{\ln(x) + C}$

⚠ Achtung: Beim Substituieren von y'(x) muss man die Kettenregel beachten

Inhomogene DGL 1. Ordnung:
$y'(x) = p(x) \cdot y(x) + q(x)$ (I)

$y'(x) = p(x) \cdot y(x)$ (H)

1.) entsprechende homogene DGL mit Separation lösen → y_h

2.) partikuläre Lösung y_p durch "Raten" oder Variation der Konstanten bestimmen

3.) Lösung der inhomogenen DGL: $y = y_h + y_p$

→ Lösungsansatz für Störterm:

Störterm q(x)	Lösungsansatz $y_p(x)$
Konstante	$y_p(x) = A$
Lineare Fkt.	$y_p(x) = Ax + B$
Quadratische Fkt.	$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$
Ax^b	$y_p(x) = Cx^{b+1}$
$A\sin(wx)$ $B\cos(wx)$ $A\sin(wx) + B\cos(wx)$	$y_p(x) = C\sin(wx) + D\cos(wx)$ → analog: hyberbolische Fkt.
Ae^{bx}	$y_p(x) = Ce^{bx}$
$1/x^2$	$y_p(x) = C\ln(x)$
Axe^{bx}	Verfahren von Lagrange
Summe von Störtermen	$y_p = y_{p1} + y_{p2} + \dots$
Produkt von Störtermen	$y_p = y_{p1} \cdot y_{p2} \cdot \dots$

→ Falls der Ansatz fehlschlägt → mit x multiplizieren
→ Ansatz darf keine Linearkombination der homogenen Lösung sein

→ Variation der Konstanten, Verfahren von Lagrange:
1.) Konstante von y_h als C(x) schreiben

2.) y_c' berechnen → Kettenregel

3.) y_c und y_c' in DGL einsetzen
→ C(x) muss sich wegkürzen!
→ sonst ist ein Fehler vorhanden

4.) C'(x) integrieren
→ Integrationskonstante gleich 0 setzen, da man nur eine partikuläre Lösung braucht

5.) C(x) in y_h einsetzen → y_p

→ funktioniert immer, aber meist umständlich

Bsp.: $y' - y/2x = x^2$

1.) $y' = \frac{y}{2x}$ → $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{2x} dx$

→ $\ln|y| = 1/2 \ln|x| + C_1 = \ln|\sqrt{x}| + C_2$ → $y_h = \sqrt{x}\, C$

2.a) $q(x) = x^2$ → quadratische Funktion

$y_p = Ax^2 + Bx + C$, $y_p' = 2Ax + B$

$2Ax + B - \frac{Ax}{2} - \frac{B}{2} - \frac{C}{2x} = x^2$

↳ Koeffizientenvergleich → geht hier nicht
→ Ansatz mal x → $A = 2/5$, $B = C = 0$

2.b) $y_h = C\sqrt{x}$ → $y_c = C(x)\sqrt{x}$

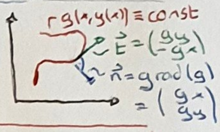
→ $y_c' = C'(x)\sqrt{x} + C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$C'(x)\sqrt{x} + \cancel{C(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}} - \cancel{\frac{C(x)\sqrt{x}}{2x}} = x^2$

$C'(x) = x^{3/2}$ → $C(x) = 2/5\, x^{5/2}$

→ $y = C(x)\sqrt{x} = 2/5\, x^3 = y_p$

Niveaulinien mit Hilfe von DGL:
$$\boxed{y' = -\frac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)}}$$



exakte DGL:
$$\boxed{y'(x) \cdot g_y(x,y) + g_x(x,y) = 0}$$

→ Integrabilitätsbedingung muss gelten:
$$\boxed{(g_y)_x = (g_x)_y}$$
→ ⚠ Achtung Vorzeichen

→ Lösung: $\int g_x\, dx$, $\int g_y\, dy$ → Koeff.-vergleich → +C, gleich 0

Orthogonaltrajektorien:
$$\boxed{y_{OT}' = -\frac{1}{F(x,y)}}$$
→ Kurven, die in jedem Punkt senkrecht auf der ursprünglichen Kurvenschar liegen

→ Orthogonaltrajektorie einer Orthogonaltrajektorie einer Kurve ist die ursprüngliche Kurve
→ Kurvenschar sei die Lösung der DGL $y'(x) = F(x,y)$

→ Kurvenschar ist nicht in der Form einer DGL:
1.) Kurvenschar hat die Form $F(x, y(x), C) = 0$

2.) Ableitung nach x: $\frac{d}{dx} F(x, y(x), C) = 0$ ↳ ⚠ innere Ableitung ↑ y'

3.) Eliminiere die Konstante C

4.) mehre Konstanten → mehre Ableitungen
↳ y als Funktion von x schreiben y → y(x)

Isogonaltrajektorien:
Kurven, die die Kurvenschar unter einem festen Winkel schneiden

$$\boxed{y_{iso}' = \frac{\tan(\alpha) + y_1'}{1 - y_1' \cdot \tan(\alpha)}} \quad \boxed{y_1' = F_1(x,y)}$$

Enveloppen (Hüllkurve):
Die Enveloppe einer Schar ist eine Kurve, die in jedem ihrer Punkte eine Kurve der Kurvenschar tangential berührt
→ nicht jede Schar besitzt eine Enveloppe

$$\boxed{\begin{matrix} F(x,y,C) = 0 \\ F_C(x,y,C) = 0 \end{matrix}}$$
→ Kurvenschar mit Scharparameter C
→ Ableitung nach C

↳ Elimination des Scharparameters C ergibt die Gleichung der Enveloppe

- Tipp: um die Schargleichung zu erhalten, mit Parameter t führt man eine Parameterdarstellung ein und eliminiert anschliessend t

Clairaut'sche DGL:
$$\boxed{y = y'x + g(y')}$$
→ $y = Cx + g(C)$
→ $y' = C$ ↳ $x = -g_c(C)$

Lösungsvariationen:
↳ Enveloppe $y = -Cg_c(C) + g(C)$

Lösungen von DGL können allgemeine Lsg./singuläre Lsg. oder Kombinationen davon sein

- Zusammenhänge: Lösungsschar ist regulär ⟺ ∀x gibt es ∀ AWP eine eindeutige (Existenzsatz)

Differentialgleichungen (Fortsetzung):

DGL höherer Ordnung:

- Allg. Lsg. besteht aus einer n-parametrigen Schar
- Für ein AWP braucht man n Anfangsbedingungen

Lineare DGL mit konst. Koeffizienten:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

-> Ansatz: $\boxed{y(x) = e^{\alpha x}}$

-> charakteristisches Polynom:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_2 \alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

-> durch Umschreiben der DGL in ein System von DGL 1. Ordnung kann man eine Koeffizientenmatrix aufstellen und deren Eigenwertproblem führt auf das selbe charakt. Polynom

-> Nullstellen/ Eigenwerte berechnen

-> einfach, reelle Nullstelle: $(\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \in \mathbb{R})$

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} + C_3 e^{\alpha_3 x} + \dots$$

-> mehrfach, reelle Nullstelle: $(\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \in \mathbb{R})$

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} + C_3 x^2 e^{\alpha x} + \dots$$

-> $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \dots$$

-> einfach, komplexe Nullstelle: $(\alpha_{1,2} = a \pm ib)$

$$y = C_1 e^{ax} \cos(bx) + C_2 e^{ax} \sin(bx)$$

-> mehrfach, komplexe Nullstelle $(\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \dots = a \pm ib)$

$$y = C_1 e^{ax}\cos(bx) + C_2 e^{ax}\sin(bx) + C_3 x e^{ax}\cos(bx) + C_4 x e^{ax}\sin(bx) + C_5 x^2 e^{ax}\cos(bx) + C_6 x^2 e^{ax}\sin(bx) + \dots$$

Eulersche DGL:

$$a_n y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{x} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} y' + \frac{a_0}{x^n} y = 0$$

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

-> Ansatz: $\boxed{y(x) = x^\alpha}$

-> Indexpolynom: (ohne x)

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-1))a_n + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-(n-2))a_{n-1} + \dots + \alpha a_1 + a_0 = 0$$

-> einfach, reelle Nullstellen: $(\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \in \mathbb{R})$

$$y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} + C_3 x^{\alpha_3} + \dots$$

-> mehrfach, reelle Nullstellen: $(\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \in \mathbb{R})$

$$y = C_1 x^\alpha + \ln(x) C_2 x^\alpha + (\ln(x))^2 C_3 x^\alpha + \dots$$

-> $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = 0$:

$$y = C_1 + \ln(x) C_2 + (\ln(x))^2 C_3 + \dots$$

-> einfach, komplexe Nullstellen: $(\alpha_{1,2} = a \pm ib)$

$$y = C_1 x^a \cos(b \ln(x)) + C_2 x^a \sin(b \ln(x))$$

-> mehrfach, komplexe Nullstellen: $(\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4} = \dots = a \pm ib)$

$$y = C_1 x^a \cos(b\ln(x)) + C_2 x^a \sin(b\ln(x)) + \ln(x) C_3 x^a \cos(b\ln(x)) + \ln(x) C_4 x^a \sin(b\ln(x)) + \dots$$

Lösungsansatz bei höherer Ordnung:

- im Prinzip wie bei 1. Ordnung

Störterm $q(x)$	Lösungsansatz $y_p(x)$
$m \cdot e^{cx}$	c ist keine Lsg.: $y_p = Ae^{cx}$ c ist einfache Lsg.: $y_p = Axe^{cx}$ c ist k-fache Lsg.: $y_p = Ax^k e^{cx}$ des charakt. Polynoms
$A\sin(wx)$ $B\cos(wx)$ $A\sin(wx) + B\cos(wx)$	iw ist keine Lsg. des char. Pol.: $y_p = C\sin(wx) + D\cos(wx)$ iw ist eine Lsg. des char. Pol.: $y_p = x[C\sin(wx) + D\cos(wx)]$

⚠ Achtung: Ansatz darf keine Linearkombination der homogen Lösung sein

VDK 2. Ordnung:

1.) $y_H(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$

2.) $y_p(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$

3.) Bedingung: $C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0$

4.) Einsetzen in die DGL liefert:

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = q(x)$$

5.) $\boxed{C_1' = -\frac{q(x) y_2(x)}{W(x)}}$ $\boxed{C_2' = \frac{q(x) y_1(x)}{W(x)}}$

-> Wronski-Determinante $\boxed{W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2}$

6.) Integrieren

Schwingungsproblem:

$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + w^2 x = 0}$ -> homogen, lineare DGL mit konst. Koeffizienten

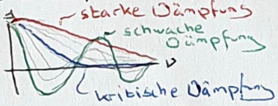
- char. Pol.: $P(\alpha) = \alpha^2 - 2\lambda\alpha + w^2 = 0$
- Nullstellen: $\alpha_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w^2}$

-> Fallunterscheidung:

(a) $\lambda > w$, starke Dämpfung

(b) $\lambda = w$, kritische Dämpfung
  -> schnellste Konvergenz zur Asymptote
  -> oszilliert nicht mehr

(c) $\lambda < w$, schwache Dämpfung



-> in allen 3 Fällen gilt:

$$\lim_{t \to \infty} x_h(t) = 0$$

(d) inhomogener Fall:
  -> partikuläre Lsg. / stationäre Lösung: x_0
  -> x_0 dominiert das Verhalten für grosse t

(e) $\lambda = 0$, keine Dämpfung
  -> Modell gültig für kleine $x, \dot{x}$

Zusammenhang VR:

homogen, linear <=> Lösungsraum = VR
inhomogen, linear <=> Lösungsraum ≠ VR

Potenzreihen für DGL:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$y'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} x^k = c_1 + 2c_2 + 3c_3 x^2 + \dots$$

gleiche Funktion <=> Koeff. müssen gleich sein

-> Ableiten -> in DGL einsetzen

-> Koeffizientenvergleich

Systeme von DGL:

$$\begin{vmatrix} \dot{x} = a_{11} x + a_{12} y + b_1 \\ \dot{y} = a_{21} x + a_{22} y + b_2 \end{vmatrix} \qquad \vec{x} = A\vec{x} + \vec{b}$$

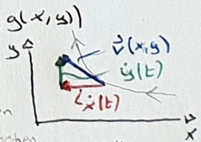
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \; \vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

-> linear, autonomes DGLS mit konst. Koeff.

Phasenportrait:

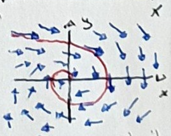
$$\vec{v}(x,y) = (\dot{x}, \dot{y}) = (F(x,y), g(x,y))$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{g(x,y)}{F(x,y)}}$$



-> Lösungskurven/ Trajektorien eines autonomen Systems entsprechen den Feldlinien eines Vektorfeldes

-> Trajektorie ist die durch (x_0, y_0) gehende Feldlinie mit Durchlaufsinn gemäss Pfeilen



-> Schar der Trajektorien ist das Phasenportrait

-> Durchlaufsinn: mehrere Punkte einsetzen, Vorzeichen von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ beachten bzgl. Achsen $\vec{v}(x,y)$

Entkoppelungsmethode (LinAlg):

-> entkoppeltes System: Ableitung einer Funktion hängt nur noch von der Funktion selbst ab

-> Bedingung: Koeffizientenmatrix A muss diagonalisierbar sein (alg. VF. und geo. VF. eines jeden EW muss übereinstimmen)

-> Problem: homogenes System $\dot{\vec{x}} = A x$

-> Vorgehen:

1.) EW λ_i bestimmen: $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$

2.) EV $\vec{v}_i$ bestimmen $(A - \lambda\mathbb{I}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$

3.) $\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{v}_i e^{\lambda_i t}$ (ohne t)

-> alg. VF. > 1: einfach die verschiedenen EV nehmen (nicht mit t oder so multiplizieren)

4.) komplexe EW: $a \pm ib$

$$x_1 = e^{at}[\cos(bt)\mathrm{Re}(v_i) - \sin(bt)\mathrm{Im}(v_i)]$$

$$x_2 = e^{at}[\sin(bt)\mathrm{Re}(v_i) + \cos(bt)\mathrm{Im}(v_i)]$$

Eliminationsmethode:

- Idee: System von n linearen DGL 1. Ordnung in eine DGL n-ter Ordnung überführen

-> eine DGL nach der Variablen auflösen, die nicht als Ableitung vorkommt -> ableiten

-> in die andere DGL einsetzen

-> andere DGL durch Rückwärtseinsetzen

Stabilitätsverhalten:

-> Gleichgewichtspunkte:

- konstante Funktionen, die das autonome System lösen
- Punkte, an denen das System komplett in Ruhe ist (alle Ableitungen verschwinden)

-> Vorgehen:

1.) höhere Ableitungen -> DGL in ein System 1. Ordnung überführen

2.) alle Ableitungen gleich Null setzen
  -> Gleichgewichtspunkte

3.) System nicht linear -> um die GGP linearisieren

Bsp.: $\begin{vmatrix} \dot{x}(t) = x(t)^2 + y(t)^2 - 1 \\ \dot{y}(t) = x(t)^2 - y(t)^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} := f(x,y) \\ := g(x,y) \end{matrix}$

-> lineare Ersatzfunktion von f in (a,b)

$$(x,y) \longmapsto f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

$= a^2 + b^2 - 1 + 2a(x-a) + 2b(y-b) \sim f$

$= a^2 - b^2 + 2a(x-a) - 2b(y-b) \sim g$

$$\begin{vmatrix} \dot{x} = 2ax + 2by - a^2 - b^2 - 1 \\ \dot{y} = 2ax - 2by - a^2 + b^2 \end{vmatrix}$$ -> linearisiertes System

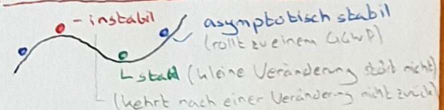
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2a & -2b \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 - b^2 - 1 \\ -a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms

4.) EW des Systems/ von A berechnen

$\exists\, \mathrm{Re}(\lambda) > 0$	<=>	instabil
$\exists\, \mathrm{Re}(\lambda) = 0$	<=>	grenzstabil
$\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ $\boxed{\forall \lambda}$	<=>	asymptotisch stabil

Achtung



-> Alternativ:

Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnen -> Fallunterscheidung bzg. e^x

-> Strudelpunkt:

oszillierend, strebt gegen 0 oder $\pm\infty$

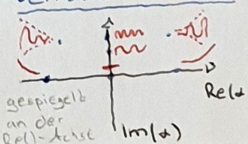
Homogene lineare DGL 1. und 2. Ordnung:

DGL	$y' = ay$	$y'' = -a^2 y$
Allg. Lsg.	$y(x) = Ce^{ax}$	$y(x) = C_1\cos(a_1 x) + C_2 \sin(a_2 x)$
Spez. Lsg.	$y(x) = e^{ax} y_0$	$y(x) = y_0 \cos(a_1 x) + y_0 \sin(a_2 x)$

-> AWP mit $y(0) = y_0$ und $y'(0) = y_0$

Verhalten von $e^{\alpha x}$

α kann komplex sein



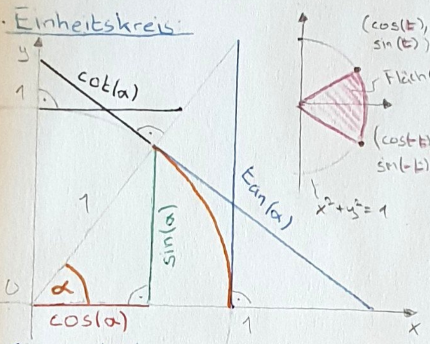
-> beschränkte Lösungen für $x \to \infty$

-> $\mathrm{Re}(\alpha) \leq 0$

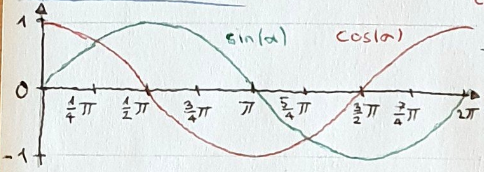
Trigonometrie:

	$0°$ / 0	$15°$ / $\frac{\pi}{12}$	$30°$ / $\frac{\pi}{6}$	$45°$ / $\frac{\pi}{4}$	$60°$ / $\frac{\pi}{3}$	$75°$ / $\frac{5\pi}{12}$	$90°$ / $\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2-\sqrt{3}$	0

Einheitskreis:



Sinus und Kosinus:



$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Phasenverschiebung:

$\cos(-x) = \cos(x)$ $\qquad \sin(-x) = -\sin(x)$

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$ $\qquad \sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos(x)$

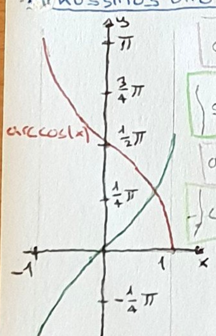
$\cos(x \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin(x)$ $\qquad \sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos(x)$

$\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\cot(x)$ $\qquad \cos(\pi - x) = -\cos(x)$

$\cot(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan(x)$ $\qquad \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ $\qquad 1 + \cot^2(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$

Arkussinus und Arkuskosinus:



$\boxed{\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\boxed{\int \sin^{-1}(x)\,dx = \sqrt{1-x^2} + x\sin^{-1}(x) + C}$

$\boxed{\arccos(x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$\boxed{\int \cos^{-1}(x)\,dx = x\cos^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2} + C}$

Sinussatz:

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

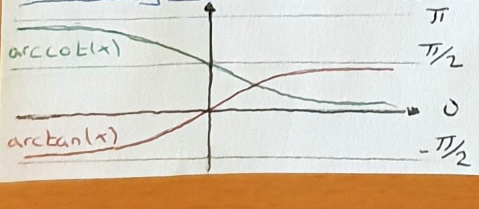
Kosinussatz:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$

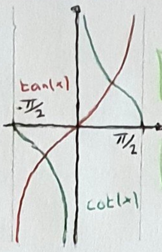
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$

Arkustangens und Arkuskotangens:



Tangens und Kotangens:



$\boxed{\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1}$

$\boxed{\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)| + C}$

$\boxed{\cot(x)' = -\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)}$

$\boxed{\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)| + C}$

Verkettung von Inversen Funktionen:

$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$

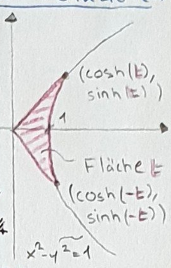
$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

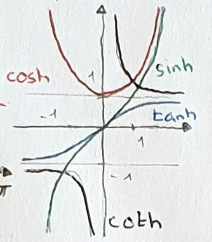
$\cos(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$\tan(\arccos(x)) = x^{-1}(1-x)^{1/4}$

$\tan(\arcsin(x)) = x(1-x)^{-1/4}$



Hyperbolische Funktionen:



$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$\boxed{\sinh(x)' = \cosh(x) \quad \cosh(x)' = \sinh(x)}$ $\qquad \boxed{\tanh(x)' = \frac{1}{\cosh^2(x)}}$

$\boxed{\int \tanh(x)\,dx = \ln|\cosh(x)| + C}$

$\boxed{\coth(x)' = -\frac{1}{\sinh^2(x)}}$ $\qquad \boxed{\int \coth(x)\,dx = \ln|\sinh(x)| + C}$

$\boxed{\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1}$ $\qquad \boxed{\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1}$

$\boxed{\cosh(x) + \sinh(x) = e^x}$

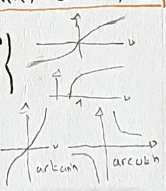
Areafunktionen:

$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$\operatorname{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$



$\boxed{\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$ $\qquad \boxed{\operatorname{arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$

$\boxed{\int \sinh^{-1} dx = x\sinh^{-1}(x) - \sqrt{x^2+1} + C}$

$\boxed{\int \cosh^{-1} dx = x\cosh^{-1}(x) - \sqrt{x^2-1} + C}$

$\boxed{\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \ |x| < 1}$ $\qquad \boxed{\operatorname{arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}, \ |x| > 1}$

$\boxed{\int \tanh^{-1}(x)\,dx = x\tanh^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)}$

$\boxed{\int \coth^{-1}(x)\,dx = x\coth^{-1}(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)}$

Verkettungen:

$\sinh(2\operatorname{arcsinh}(x)) = 2x\sqrt{x^2+1}$

$\sinh(\operatorname{arccosh}(x)) = \sqrt{x^2-1}$

$\cosh(\operatorname{arcsinh}(x)) = \sqrt{x^2+1}$

Formel von Moivre: $n \geq 2$

$(\cosh(x) \pm \sinh(x))^n = \cosh(nx) \pm \sinh(nx)$

$\boxed{\arctan(x)' = \frac{1}{x^2+1}}$ $\qquad \boxed{\operatorname{arccot}(x)' = -\frac{1}{x^2+1}}$

$\boxed{\int \tan^{-1}(x)\,dx = x\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C}$

$\boxed{\int \cot^{-1}(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + x\cot^{-1}(x) + C}$

Herleitung über Exponentialform:

$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, $\quad e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

→ ausmultiplizieren und Real- und Imaginärteil vergleichen

$a \pm b$:

$\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

$\sinh(a \pm b) = \sinh(a)\cosh(b) \pm \cosh(a)\sinh(b)$

$\cosh(a \pm b) = \cosh(a)\cosh(b) \pm \sinh(a)\sinh(b)$

$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a)\tan(b)}$ $\qquad \cot(a \pm b) = \frac{\cot(a)\cot(b) \mp 1}{\cot(a) \pm \cot(b)}$

$\tanh(a \pm b) = (\tanh(a) \pm \tanh(b)) : (1 \pm \tanh(a)\tanh(b))$

$\coth(a \pm b) = (1 \pm \coth(a)\coth(b)) : (\coth(a) \pm \coth(b))$

$2a$:

$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) = (2\tan(a)) : (1 + \tan^2 a)$

$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = (1 - \tan^2(a)) : (1 + \tan^2 a)$

$\sinh(2a) = 2\sinh(a)\cosh(a)$

$\cosh(2a) = \cosh^2(a) + \sinh^2(a) = 2\cosh^2(a) - 1 = 1 - 2\sinh^2(a)$

$\tan(2a) = (2\tan(a)) : (1 - \tan^2(a))$

$\tanh(2a) = (2\tanh(a)) : (1 + \tanh^2(a))$

$3a$:

$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$

$\sinh(3a) = 3\sinh(a) + 4\sinh^3(a)$

$\cosh(3a) = 4\cosh^3(a) - 3\cosh(a)$

$\tan(3a) = (3\tan(a) - \tan^3(a)) : (1 - 3\tan^2(a))$

$\tanh(3a) = (3\tanh(a) + \tanh^3(a)) : (1 + 3\tanh^2 a)$

$a/2$:

$\sin(a/2) = \pm\sqrt{1/2 \cdot (1 - \cos(a))}$

$\cos(a/2) = \pm\sqrt{1/2 \cdot (1 + \cos(a))}$

$\sinh(a/2) = \sqrt{(\cosh(a) - 1) : 2}, \ x \geq 0$

$\sinh(a/2) = -\sqrt{(\cosh(a) - 1) : 2}, \ x < 0$

$\tan(a/2) = \pm\frac{1 - \cos(a)}{\sin(a)} = \pm\frac{\sin(a)}{1 + \cos(a)}$

$\tanh(a/2) = \frac{\sinh(a)}{\cosh(a) + 1} = \frac{\cosh(a) - 1}{\sinh(a)}$

$\cosh(a/2) = \sqrt{(\cosh(a) + 1) : 2}$

Summen:

$\sin(a) \pm \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a \pm b}{2}\right)\cos\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$

$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$

$\sinh(a) \pm \sinh(b) = 2\sinh\left(\frac{a \pm b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a \mp b}{2}\right)$

$\cosh(a) + \cosh(b) = 2\cosh\left(\frac{a+b}{2}\right)\cosh\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cosh(a) - \cosh(b) = 2\sinh\left(\frac{a+b}{2}\right)\sinh\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\tan(a) \pm \tan(b) = (\sin(a \pm b)) : (\cos(a)\cos(b))$

$\tanh(a) \pm \tanh(b) = (\sinh(a \pm b)) : (\cosh(a)\cosh(b))$

Produkte:

$\sin(a)\sin(b) = 1/2(-\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$\sin(a)\cos(b) = 1/2(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

$\cos(a)\cos(b) = 1/2(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

$\sinh(a)\sinh(b) = 1/2(\cosh(a+b) - \cosh(a-b))$

$\cosh(a)\cosh(b) = 1/2(\cosh(a+b) + \cosh(a-b))$

$\sinh(a)\cosh(b) = 1/2(\sinh(a+b) + \sinh(a-b))$

Potenzen:

$\sin^2(a) = 1/2(1 - \cos(2a))$

$\cos^2(a) = 1/2(1 + \cos(2a))$

$\sinh^2(a) = 1/2(\cosh(2a) - 1)$

$\cosh^2(a) = 1/2(\cosh(2a) + 1)$

$\sin^3(a) = 1/4(3\sin(a) - \sin(3a))$

$\cos^3(a) = 1/4(3\cos(a) + \cos(3a))$

$\sinh^3(a) = 1/4(\sinh(3a) - 3\sinh(a))$

$\cosh^3(a) = 1/4(\cosh(3a) + 3\cosh(a))$

Schwierige Integrale:

$\int \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx \quad \xrightarrow[du=[\tan^2(x)+1]\,dx]{u=\tan^2(x)} \quad \int \frac{\sqrt{1+\tan^2(x)}}{1+\tan^2(x)}\,du = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du$

$= \operatorname{arsinh}(u) + C$

$\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx = \int \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}}\,dx$

$= \int \sqrt{\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}\,dx = \int \sqrt{1+\tan^2(x)}\,dx$

$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx \quad \xrightarrow[du=dx\,2x]{u=x^2+1} \quad 1/2\int \sqrt{u}\,du$

$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx \quad \xrightarrow[dx=\cos(u)du]{x=\sin(u)} \quad \int \sin^2(u)\cos^2(u)\,du$

$\xrightarrow{\cos^2(u)=1-\sin^2(u)} \int \sin^2(u)-\sin^4(u)\,du$

$\int \cosh^2(x)\,dx \quad \xrightarrow{\cosh^2(x)=1/2\cosh(2x)+1/2} \quad \int 1/2\cosh(2x)+1/2\,dx$

$\xrightarrow[du=2dx]{u=2x} 1/4\int \cosh(u)\,du + 1/2\int dx = \frac{x}{2}+\frac{\sinh(2x)}{4}+C$

$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}+C$

$\int \frac{ax}{(x^2+b)^{3/2}} = -\frac{a}{(x^2+b)^{1/2}}+C$ (Kettenregel)

$\int \cos^3(x)\,dx = \left(\sin(x)-\frac{\sin^3(x)}{3}\right)+C$

$\int (x+1)e^x\,dx = xe^x+C$

$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C$

$\int \frac{4x-3}{x^2+x+1}\,dx = 2\ln(x^2+x+1)-\frac{10}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$

$\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x)+\sin(x)+C$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\sqrt{1-x^2}+C$

$\int xe^x\,dx = (x-1)e^x+C$

$\int x^2\ln(x)\,dx = \frac{x^3\ln(x)}{3}-\frac{x^3}{9}+C$

$\int x^2\sin(x)\,dx = -x^2\cos(x)+2x\sin(x)-2\cos(x)$

$\int \frac{x}{\sin^2(x)}\,dx = -x\cot(x)+\ln|\sin(x)|+C$

$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = 2\arctan(\sqrt{e^x-1})+C$

$\int \frac{x}{x^4+3}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right)+C$

$\int \frac{1}{\cosh(x)}\,dx = 2\arctan(e^x)+C$

$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln(\ln(x))+C$

$\int \frac{1}{(x-a)(x-b)}\,dx = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|+C \quad a\neq b$

$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \tanh(x)+C$

$\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\coth(x)+C$

$\int \frac{1}{x\sqrt{ax+b}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{b}}\arctan\sqrt{\frac{ax+b}{-b}}$

Trigo-Integrale höherer Ordnung:

$\int$	$0-\pi/2$	$0-\pi$	$0-2\pi$	$0-\pi/4$
$\sin^4$	$3\pi/16$	$3\pi/8$	$3\pi/4$	$(3\pi-8)/32$
$\sin^5$	$8/15$	$16/15$	0	$(64-43\sqrt{2})/120$
$\sin^6$	$5\pi/32$	$5\pi/16$	$5\pi/8$	$5\pi/64-11/48$
$\sin^7$	$16/35$	$32/35$	0	$(256-177\sqrt{2})/560$
$\sin^8$	$35\pi/256$	$35\pi/128$	$35\pi/64$	$35\pi/512-5/24$
$\sin^9$	$128/315$	$256/315$	0	$\frac{4096-2867\sqrt{2}}{10\,080}$
$\cos^4$	$3\pi/16$	$3\pi/8$	$3\pi/4$	$(8+3\pi)/32$
$\cos^5$	$8/15$	0	0	$43/60\sqrt{2}$
$\cos^6$	$5\pi/32$	$5\pi/16$	$5\pi/8$	$11/48+5\pi/64$
$\cos^7$	$16/35$	0	0	$177/280\sqrt{2}$
$\cos^8$	$35\pi/256$	$35\pi/128$	$35\pi/64$	$5/24+35\pi/512$
$\cos^9$	$128/315$	0	0	$2867/5040\sqrt{2}$
$\sin^2\cdot\cos^2$	$\pi/16$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/32$
$\sin^3\cdot\cos^2$	$2/15$	$4/15$	0	$(16-7\sqrt{2})/120$
$\sin^2\cdot\cos^3$	$2/15$	0	0	$7/60\sqrt{2}$
$\sin^3\cdot\cos$	$1/4$	0	0	$1/16$
$\sin\cdot\cos^3$	$1/4$	0	0	$3/16$
$\sin^3\cdot\cos^3$	$1/12$	0	0	$1/24$

Nützliches:

- **Tangente an eine implizite Fkt.:**

$f_x(P)(x-x_P)+f_y(P)(y-y_P)=0$

- **Extremalstellen in 3D:**

- Bereich B mit Oberfläche ∂B
- Funktion F

grad(F) // grad(∂B)

$\Rightarrow$ grad(F) = k · grad(∂B)

Nützliches:

- **Hesse-Matrix:**

$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Matrix ist symmetrisch

$\rightarrow$ grad $f(a) = 0$

Hf(a) positiv definit $\Leftrightarrow$ alle EW > 0 $\Leftrightarrow$ lokales Minimum

Hf(a) negativ definit $\Leftrightarrow$ alle EW < 0 $\Rightarrow$ lokales Maximum

Hf(a) indefinit $\Leftrightarrow$ ± EW $\Rightarrow$ Sattelpunkt

Hf(a) semidefinit $\Rightarrow$ keine Aussage

- **Vorzeichenwechsel <, >:**

$-3 < 4 \mid \cdot(-1) \rightarrow 3 > -4$

$\rightarrow$ ln von einer Zahl kleiner 1 ist negativ

- **Symmetrisches Integral einer ungeraden Funktion:**

$\int_{-a}^{a}$ ungerade Fkt. $dx = 0$

- **Bsp.:** $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2)\sin(x)\,dx = 0$ (ungerade; gerade)

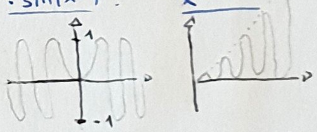
- **Eigenschaften (un-)gerader Fkt.:**

gerade + gerade = gerade
ungerade + ungerade = ungerade
gerade · gerade = gerade
gerade · ungerade = ungerade
ungerade · ungerade = gerade
(gerade)' = ungerade
(ungerade)' = gerade
ungerade(ungerade) = ungerade
gerade(gerade) = gerade(ungerade) = gerade
ungerade(0) = 0 ; ungerade(gerade) = gerade

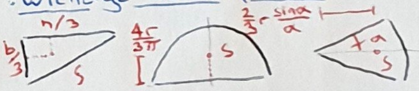
- **Krümmung in Polarkoordinaten:**

$$\kappa = \frac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{(\rho^2+(\rho')^2)^{3/2}}$$

- **$\sin(x^2)$:** **$x^{\sin(x)}$**



- **wichtige Schwerpunkte:**



- **wichtige Flächenträgheitsmomente:**

- Quadrat: $a^4/12$ - Kreis: $\pi R^4/4$

- **spezielle DGL:**

$\frac{y''}{y'} = \frac{x''}{x'} \qquad \frac{d}{dt}(\ln(x'(t))) = \frac{x''(t)}{x'(t)}$

$\hookrightarrow \frac{d}{dt}\ln(y') = \frac{d}{dt}\ln(x') \rightarrow \ln(y') = \ln(x')+C$

- **Fluss Vorzeichen:**

kein Normalenvektor $\vec{n}$ $\rightarrow$ nicht definiert
$\rightarrow$ man muss immer wissen, ob von oben oder unten durchströmt

·Beispielaufgaben:

·Verallgemeinerte Kettenregel:

→ zylindrisches Koordinatensystem

$F(x,y,z) = \tilde{F}(\rho,\varphi,z) = F(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$

$\rho(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi(x,y) = \arctan(y/x)$, $z = z$

$$F_x = \frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial \rho}\cdot\frac{d\rho}{dx} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$= \tilde{F}_\rho \cdot \rho_x + \tilde{F}_\varphi \cdot \varphi_x + \tilde{F}_z \cdot z_x$$

·Tangentialebene mit Gradienten:

$F(x,y,z) = 4x^2+3y^2+8z^2 = 24$; $P=(1,2,1)$

→ $\phi(x,y,z) = 4x^2+3y^2+8z^2$

→ $\text{grad}(\phi) = (8x, 6y, 16z)$

→ $\text{grad}(\phi)|_P = 8, 12, 16$

$\text{grad}(\phi)|_P\,(x,y,z) = \text{grad}(\phi)|_P\,(x_0,y_0,z_0)$

$(8,12,16)(x,y,z) = (8,12,16)(1,2,1)$

→ $8x+12y+16z = 48$ → $2x+3y+4z=12$

·Feldlinien:

geg.: $y(x) = 1/x$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1/y \\ -1/x \end{pmatrix}$

Ist $y(x)$ eine Feldlinie von $\vec{v}$?

Parametrisiere $y(x) = \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1/t \end{pmatrix}$ in Mechanik

Zeige $\dot{\vec{r}}(t) \parallel \vec{v}(\vec{r}(t))$ → vgl. Geschwindigkeit

$\dot{\vec{r}}(t) \times \vec{v}(\vec{r}(t)) \overset{!}{=} \vec{0}$ ⇒ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t \\ -1/t \end{pmatrix} = \vec{0}$

·uneigentliche Integral:

$I(a) = \int_1^\infty x^{a\sin(x)}\,dx$ → $I(a)$ divergiert für jedes a

·zwei Geradengleichungen:

$(y-3x+4)(2y+x)=0$

→ Lösungskurve sind 2 Geraden

·Flächendifferential:

$z = x^2+y^2$, $0 \le z \le 1$; $\vec{v} = (-y^3, x^3, z^3)$

$\int_S \text{rot}(\vec{v})\,\boxed{d\vec{S}}$ → Oberfläche parametrisieren

— Oberfläche

$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r^2 \end{pmatrix}$

$d\vec{S} = \vec{r}_r \times \vec{r}_\varphi \, d\rho\, d\varphi$

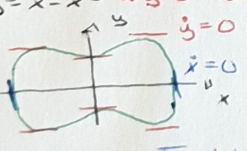
$\vec{r}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} d\rho\, d\varphi$

$\vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$

·Lösungskurve DGL:

$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$ → $\dot{x}=0$: vertikale Gerade → $\dot{y}=0$: horizontale Gerade



→ Punkte Einsetzen

·Ordnung von Funktionen:

Es gelte: $g(x) = O(F(x))$, $x \to \infty$

→ was kann gelten?

$g(x) = o(F(x))$, wenn $x \to \infty$

$g(x) > F(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$

$F(x) = o(g(x))$, wenn $x \to \infty$

$F(x) = x^{\sin(x)+3}\ln(x)$ → $g = o(F)$

$g(x) = x^2$ ✓

$g(x) = x^3\ln(x)$ ✗

$g(x) = x^4\sin(x)$ ✗

·Konvergenzradius mit Exponent ungleich n:

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}$ $y = x^2$

→ auf die Form ay^n bringen

→ $F(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} y^n$ $r = \frac{1}{4}$

→ für y r einsetzen

$|x| = |\sqrt{y}| < 1/2$

·quellenfreies Vektorfeld:

$D(\vec{v}) = \mathbb{R} \setminus \{(0,0,0)\}$

Vollkugel mit Radius R und Zentrum in 0

↳ Fluss von $\vec{v}$ durch ∂K_R ist unabhängig von R

$S := \{\vec{w} \in \mathbb{R} \mid r \le |\vec{w}| \le R\}$, $r > 0$

$0 = \iiint_S \text{div}(\vec{v})\, dV = \iint_{\partial S} \vec{v}\,\vec{n}\, dO$

$= \iint_{\partial K_R} \vec{v}\,\vec{n}\, dO - \iint_{\partial K_r} \vec{v}\,\vec{n}\, dO$

$\Rightarrow \Phi(\vec{v}, \partial K_R) = \Phi(\vec{v}, \partial K_r)$

·Eigenschaften von Funktionen:

g: positiv, monoton steigend

f: positiv, konvex

→ $g \circ f$ wieder konvex? ✗

$(g\circ f)' \Rightarrow (g'\circ f)' + (g \circ f')'$

$\Rightarrow \underset{\in\mathbb{R}}{g''}\circ \underset{>0}{f} + 2\circ \underset{\ge 0}{g'} \underset{\ge 0}{f'} + \underset{>0}{g}\circ \underset{\ge 0}{f''}$

g, h: positiv, monoton steigend

f: monoton fallend

→ $f \circ (g \cdot h)$ monoton fallend ✓

·Grenzwerte bei Brüchen:

$\lim_{n\to\infty} a_n$ → $\sqrt{n^2+5n+3} - n \,\Big|\, \cdot \frac{\sqrt{n^2+5n+3}+n}{\sqrt{n^2+5n+3}+n}$

$= \frac{n^2+5n+3-n^2}{\sqrt{n^2+5n+3}+n} = \frac{5+3/n}{\sqrt{1+5/n+3/n^2}+1} = \frac{5}{2}$

·Zusammenhänge:

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, stetig diff'bar, F_x und $F_y \neq 0$

→ Feldlinien des Vektorfeldes verlaufen entlang der Niveaulinien von f

→ f ist beschränkt

→ es existiert keine geschlossene Feldlinie von $\vec{v}$

→ es existiert keine geschlossene Niveaulinie von f

·Linearisierung:

$F(x) = x^2$ ist a.d.S. $x_0 = 1$ linearisiert $t(x) = 2x-1$. Wie gross darf x max sein, damit $F_{abs} \le 0.01$ ist?

$|F(x_0+\Delta x) - t(x_0+\Delta x)| \le 0.01$

$(1+\Delta x)^2 - (2(1+\Delta x)-1) \le 0.01$

$1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 2 - 2\Delta x + 1 \le 0.01$

$\Delta x^2 \le 0.01$ → $\Delta x \le 1/10$

·Potenzreihen bei DGL:

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $y''(x) + xy'(x) + x^2y(x) = 0$

$x^2y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

$xy'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \cdot x = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n x^n$

$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)\cdot n \cdot a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)\, x^n$

·Uneigentliche Integrale:

$I(a) = \int_1^\infty x^{a\sin(x)}\,dx$

→ $I(a)$ divergiert für jedes a

·Asymptoten:

$F(x) = e^{-x}\cos(x)$

$g(x) = 5e^{-\sqrt{x}}$ ✓

$g(x) = 1/x$ ✓

$g(x) = \cos(x)$ ✗

$g(x) = e^{-x}\arctan(x)$ ✓

$F(x) = \frac{4x^2+9x+3}{4x+1}$

$x + 2 + \frac{1}{4x+2}$ ✓

x^2+x+2 ✗

$4x^2+9x+3$ ✗

$x+2$ ✓

·Ordnung von Funktionen:

$F(x) = \prod_{k=1}^{2018} \ln(e^x + x^k)$ → $g = O(F)$

$g(x) = x^{2018}$ ✓

$g(x) = \prod_{k=1}^{2018} \ln(e^x)$ ✓

$g(x) = e^x$ ✗

$g(x) = \ln(e^x + x^{2019})$ ✓

·Uneigentliche Integral:

$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha + x^{2\alpha}}\,dx$

$\alpha = 3/2$ → konvergiert ✓

$f: \alpha \mapsto I_\alpha$ monoton steigend ✗

$\alpha = 2/3$ → konvergiert ✓

$\alpha = 1/2$ → konvergiert ✗

·Divergenz von uneigentlichen Integralen

$\int_a^\infty \frac{1}{x^\beta}\,dx$ → $\beta \le 1$ existiert nicht → $\beta > 1$ existiert

$\int_0^a \frac{1}{x^\beta}\,dx$ → $\beta < 1$ existiert → $\beta \ge 1$ existiert nicht

$\int_0^\infty e^{-\beta x}\,dx$, $\beta > 0$ $= \frac{1}{\beta}$

$\int_1^\infty \frac{1}{x+x^\beta}\,dx$, $\beta < 1$ existiert nicht

·Folgen

Folge: $a_1, a_2, a_3, \ldots$; $b_1, b_2, b_3, \ldots$

$b_1 = a_1$, $b_n = a_n - a_{n-1}$

$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$ → $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ✗

b_n konvergiert → a_n konvergiert ✗

a_n beschränkt und monoton steigend → b_n ist eine Nullfolge ✓

Existenzsatz 2. Ordnung:

→ stetig partiell nach x, y, y' diff'bar

→ Existenzsatz anwendbar?

$y'' = y^{1/3}$ ✗ ; $y'' = y^{-1/3}$ ✗ ; $y'' = y^{4/3}$ ✓