Dimensionieren

· Grundproblem der Kontinuumsmechanik:

→ 15 Gleichungen → 15 Unbekannte

· Gleichgewichtsbedingungen: (GGB)

$\sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} + f_1 = 0$

$\sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} + f_2 = 0$

$\sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} + f_3 = 0$

↳ Raumkraft, z.B.: Gravitation

→ Naturgesetz

· Stoffgleichungen: (SG)

→ Nachgiebigkeitsmatrix: $\vec{\varepsilon} = \underline{H} \cdot \vec{\sigma}$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Steifigkeitsmatrix: $\vec{\sigma} = \underline{K} \cdot \vec{\varepsilon}$ $\quad H^{-1} = K$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu} \begin{bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c_1 = \frac{1-\nu}{1-2\nu}$; $c_2 = \frac{\nu}{1-2\nu}$

$E_{Stahl} \approx 200\,GPa$ $\quad$ 1'000 kPa = 1 MPa
$E_{Alu} \approx 70\,GPa$ $\quad$ 1'000 MPa = 1 GPa
$E_{Beton} \approx 30\,GPa$

→ Phenomenologische Beschreibung:
- linear, elastisch, isotrop, homogen

· Kinematische Relation: (KR)

$\varepsilon_{11} = u_{1,1}$ $\quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$

$\varepsilon_{22} = u_{2,2}$ $\quad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1})$

$\varepsilon_{33} = u_{3,3}$ $\quad \varepsilon_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2})$

→ geometrische Approximation:
- nur kleine Dehnungen, keine grossen Rotationen

· Zusammenhänge:

$\sigma = \frac{F}{A}$ $\quad \sigma = E \cdot \varepsilon$ $\quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ $\quad \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ $\quad \nu = -\frac{\varepsilon_{längs}}{\varepsilon_{quer}}$ $\quad \Delta l = \frac{1}{E}\int_0^L \frac{N(x)}{A(x)}\,dx$

$\varepsilon_{therm} = \alpha \cdot \Delta T$ $\quad \Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$

$\varepsilon_{Volumen} \cong \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = spur(\underline{\underline{\varepsilon}})$ → $\varepsilon \ll 1$

$\gamma_{xy} = \gamma_x + \gamma_y = u_{y,x} + u_{x,y} = 2\varepsilon_{xy}$

· Randbedingungen:

→ Kinematische Randbedingungen (KRB):

Bedingungen für die Verschiebungen
→ Lager betrachten (Einspannung, Auflager..)
→ Kontinuität gewährleisten, Stetigkeit

→ statische Randbedingungen (SRB):

Bedingungen für die Spannungen / Kräfte
→ freie Oberfläche: alle Spannungen müssen gleich 0 sein (sonst würde es sich verformen)
→ äussere Kräfte, Volumenkräfte (Gravitation)
→ Momente und Lagerkräfte

· Bsp.: Kragarm $\quad M_b(l) = 0 \rightarrow \sigma_{xx}(x=l) = 0$
$M_b(0) = PL$
$Q(0) = Q(l) = P$

· Strukturtheorien:

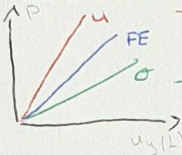
· Zulässigkeitsbedingungen:

→ Spannungsfeld: $\sigma_{ij}(x,y,z)$
- GGB und SRB müssen erfüllt sein

→ Verschiebungsfeld: $u_i(x,y,z)$
- stetig und KRB müssen erfüllt sein
- muss nicht stetig diff'bar sein

→ Spannungs- und Verschiebungsfeld:
- verträglich, falls SG erfüllt sind

· Ansätze:



→ Verschiebungsansatz:
- obere Grenze
- zu steif

→ Spannungsansatz:
- untere Grenze
- zu weich

$K_u > K_{real} > K_\sigma$

· Deformationsenergie:

$$\boxed{U = \iiint_V \left(\oint_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij} \right) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}\, dV}$$

↳ lin. elast.

· Potential der äusseren Kräfte:

$$\boxed{V = -\iiint_V f_i u_i\, dV - \sum_a \vec{F}_a \cdot \vec{u}_a}$$

· Potentielle Energie:

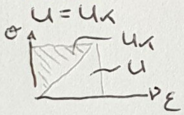
$$\boxed{E_p = U + V}$$

· Komplementäre Deformationsenergie:

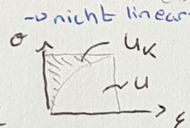
$$\boxed{U_K = \iiint_V \left(\oint_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij}\, d\sigma_{ij} \right) dV = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}\, dV}$$

↳ lin. elast.

→ linear: $U = U_K$



→ nicht linear:



$U_K < U$

· Satz vom Minimum der potentiellen Energie: (SMPE)

→ Verfahren von Ritz

Aus der Menge der zulässigen Verschiebungsfelder u_i^+ und der damit verträglichen Spannungsfelder σ_i^+ macht das wirkliche Verschiebungsfeld u_i die potentielle Energie minimal

$$\boxed{E_p(u_i) < E_p(u_i^+)}$$

→ bestmögliche Lösung für den gewählten Ansatz → nur eine Näherung

· Anwendung vom SMPE:

1.) zulässiger Ansatz für $u_i(x, y, z, \alpha_\gamma)$
2.) Berechne ε_{ij}^* aus den KR
3.) Berechne σ_{ij}^* aus den SG
↳ Verträglichkeitsbedingung automatisch erfüllt
↳ σ_{ij}^* muss nicht zulässig sein
4.) Berechne $E_p(u_i^+)$
5.) Bestimme α_γ mit $\frac{\partial E_p}{\partial \alpha_\gamma} = 0$
→ nach allen Parametern ableiten, um ein Minimum zu erhalten

· Satz vom Minimum der Komplementären Deformationsenergie: (SMKDE)

$$\boxed{U_K(\sigma_{ij}) < U_K(\sigma_{ij}^+)}$$

→ siehe SMPE

1.) zulässiger Ansatz für $\sigma_{ij}(x, y, z, \alpha_\gamma)$
2.) Berechne ε_{ij}^+ aus den SG (evt. nicht zulässig)
3.) Berechne $U_K(\sigma_{ij}^+)$ und bestimme α_γ mit $\frac{\partial U}{\partial \alpha_\gamma} = 0$

· Methode der Finiten Elemente:

· Diskretisierung:

Aufteilen der Struktur in viele kleine Elemente und den dazugehörigen Knoten

· Vorteile:

Lösung ist nachgiebiger, weniger steif
→ sehr nahe an der Realität (vgl. Balken)

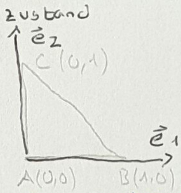
· Verfahren:

$\boxed{\{F\} = \{C\}\{u\}}$ Beziehung zwischen Verschiebungsfreiheitsgraden der Knoten $\{u\}$ und äusseren Kräften an den Knoten $\{F\}$ über die globale Steifigkeitsmatrix $\{C\}$

→ $\{C\}$ entsteht aus der Superposition der Elementsteifigkeitsmatrizen $\{K_i\}$
↳ Verfahren von Ritz (SMPE)

· Elementsteifigkeitsmatrix:

→ Dreieckselement im ebenen Deformationszustand



$$\{K\} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^A \\ u_2^A \\ u_1^B \\ u_2^B \\ u_1^C \\ u_2^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ F_1^B \\ F_2^B \\ F_1^C \\ F_2^C \end{Bmatrix}$$

→ linearer Verschiebungsansatz:

$\vec{e}_1$-Richtung: $u_1 = a x_1 + b x_2 + c$

$\vec{e}_2$-Richtung: $u_2 = d x_1 + e x_2 + f$

→ Koeffizienten durch Verschiebungen ausdrücken:

A: $u_1(x_1 = 0, x_2 = 0) = c = u_1^A$

B: $u_1(x_1 = 1, x_2 = 0) = a + c = a + u_1^A = u_1^B$

→ anschliessend: SMPE anwenden

· Bemerkungen:

- in jedem Knoten kennt man entweder die Kraft oder Verschiebung
- Ansatz wie oben: Spannungen und Dehnungen sind konstant im Element
- quadratischer Ansatz: mehr Knoten notwendig (12 Freiheitsgrade, 2D)

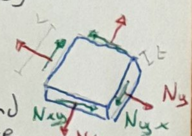
· Ebener Deformationszustand:

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\sigma}} \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$ → steifer, da Querkontraktion gesperrt wird

· Ebener Spannungszustand:

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \leftarrow \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ → weicher

· Scheibentheorie:



· Annahmen:

- ebener Spannungszustand
- keine Volumenkräfte
- übrige Spannungskomponenten sind konstant in z-Richtung verteilt

→ keine Biegung → $t \ll$ planare Dimension

· Airy'sche Spannungsfunktion:

$F(x,y)$: $\sigma_{xx} = F_{,yy}$; $\sigma_{yy} = F_{,xx}$; $\tau_{xy} = -F_{,xy}$

→ Bi-potentialgleichung (Scheibenfunktion):

$F_{,yyyy} + F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} = 0$

$\Leftrightarrow \Delta\Delta F = 0$ → nur eine Approximation, aber für $t \ll L$ sehr gut

→ erfüllt die Kompatibilitätsbedingungen:

$\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2\varepsilon_{xy,xy}$

→ mögliche Lösungen: $x, x^2, x^3, xy, x^2y, x^3y, x^4-y^4, x^4-y^4, x^4-3x^2y^2, y, y^2, y^3, y^2x, y^3x, y^4-x^4$, $\cos(nx)\cosh(ny), \sin(nx)\sinh(nx), \sin(nx)\cosh(ny)$

·Erweiterte Scheibentheorie:

·Anwendung der Spannungsfunktion:

Ansatz $F(x,y)$ $\rightarrow \Delta\Delta F = 0$

Definition anwenden

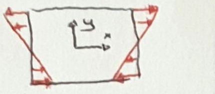
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ $\xrightarrow{SG}$ $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$

Dicke $\cdot t$ | KR

N_x, N_y, N_{xy} | u_x, u_y

falls nicht erfüllt

SRB | KRB



SRB: $N_x = ky$, $N_y = N_{xy} = 0$

$F(x,y) = ay^3 \rightarrow \Delta\Delta F = 0$ (ok)

$\sigma_{xx} = F_{,yy} = 6ay$

$\sigma_{yy} = F_{,xx} = 0$

$N_x = \sigma_{xx} \cdot t = 6aty \rightarrow a = \frac{k}{6t}$

$N_y = \sigma_{yy} \cdot t = 0$ ✓

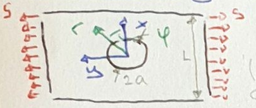
·Scheibe mit Loch:

$\rightarrow$ Scheibengleichung in Zylinderkoordinaten:

$$\Delta: \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ ; \ \sigma_{\varphi\varphi} = F_{,rr}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}F_{,r} + \frac{1}{r^2}F_{,\varphi\varphi} \ ; \ \tau_{r\varphi} = \frac{1}{r^2}F_{,\varphi} - \frac{1}{r}F_{,\varphi r}$$

$\rightarrow$ uniaxiale Zugbelastung:



$\rightarrow$ Annahme: $a \ll L$

$\rightarrow$ Ansatz: $F(r,\varphi) = (Ar^2 + Br^4 + C/r^2 + D) \cdot \cos(2\varphi) + E\ln(r) + Gr^2$

$\rightarrow$ SRB: (Fernfeld, $r \gg a$): einachsiger Spannungszustand

$\rightarrow$ SRB: (Lochrand, $r = a \ \forall \varphi$) spannungsfrei $\rightarrow \sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = 0$; $\sigma_{\varphi\varphi} \neq 0$

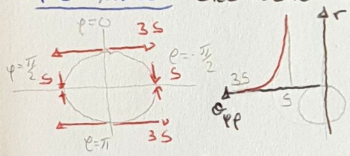
$\rightarrow$ Lösung:

$$\sigma_{rr} = \frac{S}{2}\left[1 - \frac{a^2}{r^2} - \cos(2\varphi)\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right)\right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{S}{2}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} + \cos(2\varphi)\left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right)\right]$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{S}{2}\left[1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2}\right]\sin(2\varphi)$$

$\rightarrow$ Kerbfaktor: Geometrie + Belastung

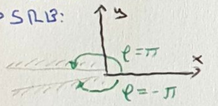


$\rightarrow$ rasche Abnahme von $\sigma_{\varphi\varphi}$ mit Abstand vom Loch

·Scheibe mit Riss:

$\rightarrow$ Ansatz: $F(r,\varphi) = r^{\lambda+1}\left[A_1\cos((\lambda-1)\varphi) + A_2\cos((\lambda+1)\varphi)\right]$

$\rightarrow$ SRB:



$\rightarrow$ Spannungsfreie Rissflanken $\forall r$

$\sigma_{\varphi\varphi} = \tau_{r\varphi} = 0$

$\rightarrow$ Deformationsenergie eines Volumenelementes an der Rissspitze:

$U = t\int_0^R\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{U}(r,\varphi)\, r\, d\varphi\, dr \sim R^{2\lambda}$; $\lambda > 0$

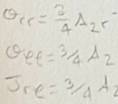
$\rightarrow$ physikalisch sinvoll, falls $\lim_{r\to 0} U = 0$

$\rightarrow$ Nahfeldlösung:

$$\sigma_{rr} = \frac{3}{4}A_2 r^{-1/2}\left[5\cos(\varphi/2) - \cos(3\varphi/2)\right]$$

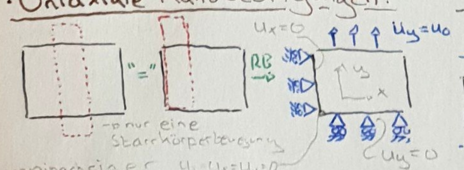
$$\sigma_{\varphi\varphi} = 3/4\, A_2 r^{-1/2}\left[3\cos(\varphi/2) + \cos(3\varphi/2)\right]$$

$$\tau_{r\varphi} = 3/4\, A_2 r^{-1/2}\left[\sin(\varphi/2) + \sin(3\varphi/2)\right]$$



$\rightarrow$ Singularität: $\sigma_{\varphi\varphi} \rightarrow \infty$ an der Rissspitze, verletzt das Grundproblem

·Uniaxiale Randbedingungen:



$\rightarrow$ nur eine Starrkörperbewegung

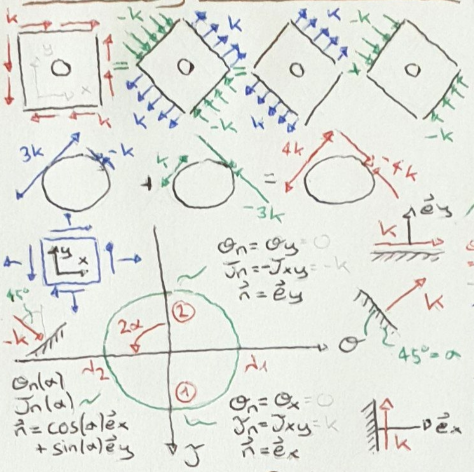
$\rightarrow$ einachsiger Spannungszustand $u, u_x = u_y = 0$

$\rightarrow u_z = 0 \ \forall$ Punkte

·Einflüsse auf Materialverhalten:

- Wärmebehandlung, Anisotropie, Rauheit, Dehnrate, Temperatur, Proben-Dimension, Alterung

·Anwendung des Mohrschen Kreis:



$\sigma_n = \sigma_y = 0$

$\tau_n = -\tau_{xy} = -k$

$\vec{n} = \vec{e}_y$

$\sigma_n(\alpha)$

$\tau_n(\alpha)$

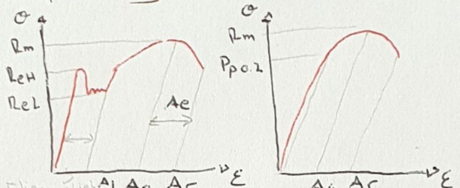
$\vec{n} = \cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y$

$\sigma_n = \sigma_x = 0$

$\tau_n = \tau_{xy} = k$

$\vec{n} = \vec{e}_x$

·Spannung und Dehnung:



R_{eL} untere Streckgrenze | A_g Gleichmassdehnung

R_{eH} obere Streckgrenze | A_r Bruchdehnung

R_m Zugfestigkeit | A_e Einschnürdehnung

$R_{p0.2}$ Fliessgrenze | A_L Lüdersdehnung

$\llcorner$ 0,2% plastische Dehnung

$\rightarrow$ Normwerte von $R_{p0.2}$ und R_m werden als untere Grenze mit 97,5% Überlebenswahrscheinlichkeit angegeben

·Fliessbedingungen:

·Fliessfunktion: $\Phi(\sigma)$

$\rightarrow$ Fliessbedingung: $\Phi(\sigma) < 0$ elastisch

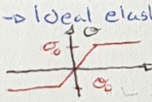
$\Phi(\sigma) = 0$ plastisch

σ_{ij}: 6 unabhängige Komponenten

$\rightarrow$ Darstellung mit Hauptachsen und Hauptrichtungen: $\Phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

·Fliesskurven:

$\rightarrow$ Ideal elastisch plastisch: ①

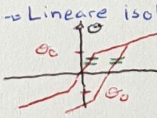


$\Phi(\sigma) = \sigma^2 - \sigma_0^2$

plastisch: $\sigma = \pm\sigma_0$

$\rightarrow$ keine Verfestigung

$\rightarrow$ Lineare isotrope Verfestigung: ②



$\Phi(\sigma) = \sigma^2 - \sigma_0^2(1 + K|\varepsilon_{tot}^{pl}|)^2$

plastisch:

$\sigma = \pm\sigma_0 \pm \sigma_0 K|\varepsilon_{tot}^{pl}|$

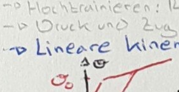
$|\varepsilon_{pl}^{tot}| = \int_0^\varepsilon |d\varepsilon_{pl}|$

$\rightarrow K$: Steigung im plastischen Bereich

$\rightarrow$ Hochtrainieren: $R_{p0,2}$/elastischer Bereich wird grösser

$\rightarrow$ Druck und Zug sind symmetrisch

$\rightarrow$ Lineare kinematische Verfestigung: ③



$\Phi(\sigma) = (\sigma - K\varepsilon_{pl})^2 - \sigma_0^2$

plastisch:

$\sigma = \pm\sigma_0 + K\varepsilon_{pl}$

$\rightarrow$ Bauschiger Effekt

$\rightarrow$ Zug $\neq$ Druck

$\rightarrow$ Entlastung bewirkt eine Verkleinerung der Druckfestigkeit, aber Erhöhung Zugfestigkeit

·Von Mises'sche Fliessbedingung:

$\rightarrow$ Theorie der Gestaltänderungsenergie

$\rightarrow$ Energie der Gestaltänderung (deviatorisch)

$\llcorner$ bewirkt Plastifizierung

$\rightarrow$ Energie der Volumenänderung (hydrostatisch)

$\llcorner$ bewirkt keine Plastifizierung

$\rightarrow$ hydrostatischer Spannungszustand:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

- keine Schubspannungen: $\tau = 0$ $a \in \mathbb{R}$
- Spannungen unabhängig von der Schnittfläche, σ senkrecht zur Schnittfläche

$\rightarrow$ V. Mises Fliessfunktion: ($=0$, Grenze Fliessen)

$$\Phi_{v.Mises} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_0^2$$

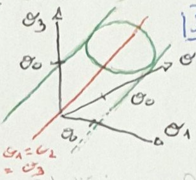
$\rightarrow$ Vergleichsspannung: $\sigma_{v.Mises}^{vgl} = \sigma_0$

$$\boxed{\sigma_{v.Mises}^{vgl} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}}$$

$$\sigma_{v.Mises}^{vgl} = \left(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3(\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2)\right)^{1/2}$$

·Von Mises'sche Kreiszylinder als Fliessfläche für Metalle im Hauptspannungsraum H_3:

- Fliessfläche als Prisma um die Raumdiagonale $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ $\rightarrow$ einfachste Fläche: Zylinder



$\boxed{H_3}$

$\rightarrow$ Achse entspricht uniaxialem Zugversuch

$\rightarrow$ Plastifizierung erst auf der Mantelfläche

$\rightarrow \sigma_0$ entspricht ungefähr dem Radius

$\rightarrow$ Raumdiagonale ist hydrostatisch

$\rightarrow$ Plastifizierung: Radius vom Zylinder wird grösser

$\rightarrow$ alternative Berechnung von $\sigma_{v.Mises}^{vgl}$:

$(\sigma_{v.Mises}^{vgl})^2 = 3T_{II}^D = 6G \cdot \tilde{U}_G$ ~ Verzerrungsenergie der Gestaltänderung

2. Invarianter Spannungsdeviator

$\rightarrow$ 3D Fliessbedingungen:

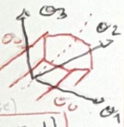
① $\Phi = \sigma_{Mises}^2 - \sigma_0^2$ ② $\Phi = \sigma_{Mises}^2 - \sigma_0^2(1 + K\varepsilon_{pl}^{tot})^2$

③ $\Phi = (J_2(\sigma_{ij} - K\varepsilon_{ij}^{pl}))^2 - \sigma_0^2$

·Festigkeitshypothese nach v. Mises:

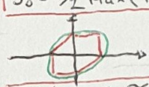
$\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_{Mises} < R_p/\nu_S$ ~ Sicherheitsfaktor > 1

·Tresca'sche Fliessbedingung:



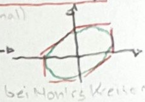
$\rightarrow$ Plastifizierung tritt bei Erreichen eines Grenzwertes für die maximalen Schubspannungen (Schubspannungshypothese)

$$\boxed{\tau_0 = 1/2\, \mathrm{Max}(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|)}$$



$\leftarrow$ Zugversuch: (normal) Tresca konserv.

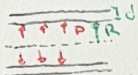
Torsionsversuch: $\rightarrow$ Mises konserv.



$\boxed{\sigma_{Tresca}^{vgl} = 2 \cdot \tau_0}$ $\llcorner$ grösster Radius bei Mohr's Kreisen

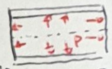
·Zylindrischer Behälter: (mit Innendruck)

·Enden offen: $R \gg d$ dünnwandig



$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{r\varphi z}$$

·Enden geschlossen:

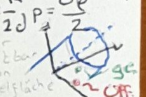


$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}_{r\varphi z}$$

$\sigma_\varphi = p\frac{R}{d} \cong \frac{R_m}{d}$ $R_m = R + \frac{d}{2}$ $\llcorner$ konservativer

$\sigma_z = \frac{R}{2d}p = \frac{\sigma_\varphi}{2}$

$\sigma_{Mises}^{offen} > \sigma_{Mises}^{geschlossen}$ $\rightarrow$ mehr belastbar $\rightarrow$ weiter von der Mantelfläche



$\rightarrow$ Tensoren gelten für die Innenseite $\rightarrow$ Aussenseite $\sigma_r = 0$

$\rightarrow$ Annahme Dünnwandigkeit: $R \gg d \Rightarrow R_M \approx R$

$\rightarrow$ Kesselformeln: $\sigma_r = 0$ $\rightarrow$ nicht konservativ $\frac{d}{R} \ll 1$

·Verhältnis von R/d wird kleiner:

$\rightarrow$ Fehler für σ_z steigt schneller als für σ_φ

$\rightarrow$ technischen Formeln überschätzen den Fehler

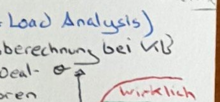
$\rightarrow \sigma_{Mises}^{vgl}$ wird überschätzt

$\rightarrow$ Realität: Inhomogenität der Spannung über die Dicke

·Auslegungskriterien: Grundlagen:

·Kraft- und Deformationsgesteuerte Belastung: (KB/DB)

$\frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_y} \gg \frac{\sigma_B}{\sigma_y}$ $\rightarrow$ für viele Metalle



$\left|\frac{\varepsilon_B}{\varepsilon_y}\right|$: Reserve für DB:

$\rightarrow$ vorgespannte Schraube, Feder; thermisches

$\rightarrow$ Begrenzung der auftretenden Spannung ist weniger konservativ

$\left|\frac{\sigma_B}{\sigma_y}\right|$ Reserve für KB:

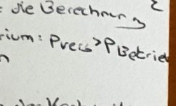
$\rightarrow$ Gewicht, Kessel mit Innendruck, zentrifugal-spannung

$\rightarrow$ Beim Überschreiten der Streckgrenze wenig Reserve bis zum Bruch $\rightarrow$ konservativere Dimensionierung

·Grenzlastanalyse: (Limit Load Analysis)

$\rightarrow$ FE basierte Festigkeitsberechnung bei KB

- Materialgesetz: elastisch ideal-plastisch mit Sicherheitsfaktoren



- Berechnung mit zunehmender primärer Belastung, beim Erreichen des plast. Versagens konvergiert die Berechnung nicht mehr: $p = p_{vers}$ $\rightarrow$ Kriterium: $p_{vers} > p_{Betrieb}$
- nur für duktile Materialien

·Kerbfaktoren:

lokale Spannungsüberhöhung an der Kerbspitze

$\sigma_{max} < K \cdot \sigma_n \rightarrow \sigma_{max} < R_{p0.2}$ oft zu konservativ $\rightarrow$ an der Kerbe darf es plastifizieren

Auslegungskriterien:

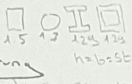
→ Spannungsverteilung:

Homogene Spannungsverteilung:
beim Erreichen der Fliessgrenze wird es in der ganzen Struktur zur Plastifizierung kommen
→ Versagen → Bsp.: Belastung auf Zug (ideal elastisch plastisch)

Lineare Spannungsverteilung:
beim Erreichen der Fliessgrenze an einer Stelle bleibt der Grossteil der Struktur elastisch
→ Versagen erst bei einer grösseren Belastung
→ Bsp.: Belastung auf Biegung (ideal elastisch plastisch)

Formfaktoren (Formzahl):

$\boxed{F_p = \frac{M_v}{M_p}}$ ~ Kollaps, Versagen / ~ erstmalige Plastifizierung



→ Vorteile eines Querschnitts mit viel Material weit weg von der Neutralachse sind teilweise wegen kleinen Reserven verloren
→ Bsp.: Biegebalken

$M_p = \sigma_0 \cdot I \cdot 2/h$ $\quad M_v = 2\int_{-b/2}^{b/2}\int_0^{h/2} \sigma_0 \cdot y \cdot dy\, dz$

→ $\sigma \cdot dA = dF$, dM

→ Statischer Festigkeitsnachweis nach FKM Richtlinie:

- Spannungsberechnung erfolgt mittels FEM mit einem linear-elastischen Materialgesetz
- Vorgehen bei Singularität: Strukturspannung oder Referenzradius verwenden
  ↳ Festigkeitshypothese $\sigma_{ij} \to \sigma_v$ (Mises)

Allgemeine Vorgehensweise:

Spannungskennwerte σ_v (1)	Werkstoff-Festigkeitskennwerte (2)	Konstruktionskennwerte (3)
Sicherheitsfaktoren J_{ges} (5)	statische Bauteilfestigkeit σ_{SK} (4)	
(6) Nachweis a_{SK}		

Bestimmung von σ_{SK}:

$\boxed{R_p = K_{d,p} \cdot K_A \cdot R_{p,N}}$ → Korrektur der Fliessgrenze für das Bauteil

- R_p: Fliessgrenze am Bauteil
- $R_{p,N}$: Fliesgrenze der Normprobe
- K_A: Anisotropiefaktor (keine: 1; Walzen ∥: 1, ⊥: <1)
- $K_{d,p}$: Technologischer Grösseneinflussfaktor (<1)
  ↳ berücksichtigt Einfluss von Wärmebehandlung
  ↳ je grösser der Ø des Bauteil, desto ↓ $K_{d,p}$

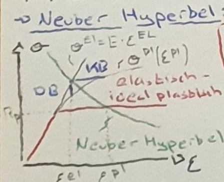
→ **Erlauben von lokalem Plastifizieren:**

$\boxed{\sigma_{SK} = R_p \cdot n_{pl}}$ n_{pl}: plastische Stützzahl (>1)

→ homogene Spannungsverteilung: $n_{pl} = 1$ ↳ keine Reserve
→ sonst: $\boxed{n_{pl} = \min\left(\sqrt{E \cdot \varepsilon_{ertr}/R_p}\, ;\, K_p\right)}$ → ε_{ertr}: Bruchdehnung
→ beschränkt durch:
(1) max. Dehnung an der Kerbe → kein Riss
(2) max. plast. Tragkraft → kein globales Versagen

K_p: plast. Formzahl $= \frac{\text{vollplastische Traglast}}{\text{elastische Grenzlast}}$ – Grenzlastanalyse – $\max \sigma_v = R_p$

→ **Neuber Hyperbel:**



$\boxed{\begin{matrix} \to \sigma \cdot \varepsilon = \text{konst} \\ \sigma^{EL} \cdot \varepsilon^{EL} = \sigma^{PL} \cdot \varepsilon^{PL} \end{matrix}} = R_p \cdot \varepsilon^{PL}$ (konservativer)

$\left(\frac{\sigma^{EL}}{E}\right) \to \varepsilon^{PL} = \frac{(\sigma^{EL})^2}{R_p \cdot E}$

$\to \sigma^{EL}_{max} = \sqrt{R_p \cdot E \cdot \varepsilon_{ertr}}$

↳ $n_{pl} = \frac{\sigma^{El}_{max}}{R_p} = \sqrt{\frac{E \cdot \varepsilon_{ertr}}{R_p}}$

Sicherheitsfaktor ↳ Spannungsüberhöhung

$\boxed{J_{ges} = J_S \cdot \left[J_z \cdot \max\left(\frac{J_m \cdot R_p}{R_m}\, ;\, J_p\right)\right]}$

J_S: Lastfaktor → 1: Lastannahme sicher; >1 sonst
J_z: Sicherheit für geschweisste Teile oder Guss ↳ kein Guss: $J_z = 1$
J_p: Sicherheit gegen Plastifizierung
→ Risiko: Eintrittswahrschein. × Schadensausmass

J_m	2	1.8	1.75	1.6
J_p	1.5	1.35	1.3	1.2
	hohe S. hohe V.	hohe S. niedrige W.	niedrige S. hohe W.	niedrige S. niedrige W.

Nachweis:

Auslastungsgrad: $\boxed{a_{SK} = \frac{\sigma_v}{\sigma_{SK}/J_{ges}}}$ → Ziel: $a_{SK} < 100\%$

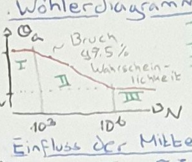
→ Mehrachsigkeit im Nachweispunkt:

$\boxed{h = \frac{1/3 \cdot Spur(\underline{\sigma})}{\sigma_{Mises}}}$ → hydrostatischer Anteil
→ $h > 1.33$: zusätzlicher Nachweis
→ $h > 1/3$: ε_{ertr} wird reduziert

Zyklische Belastung / Ermüdung:

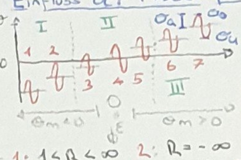
Durch progressive Schädigung durch zyklische Belastung kann ein Anriss entstehen → Dauerbruch

Wöhlerdiagramm:



I: LCF (low cycle fatigue)
II: HCF (high cycle fatigue)
III: Dauerfestigkeit ↳ gibt es nicht ∀ Materialien
→ ⚠ Versuch räpresentativ?

Einfluss der Mittelspannung:

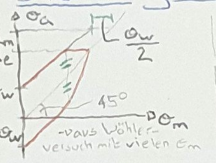


I: Druckschwellbereich
II: Wechselbereich
III: Zugschwellbereich

$\boxed{\sigma_m = \frac{\sigma_u + \sigma_o}{2}}$ $\boxed{R = \frac{\sigma_u}{\sigma_o}}$

1: $1 < R < \infty$ 2: $R = -\infty$ 3: $-\infty < R < -1$ 4: $R = -1$
5: $0 > R > -1$ 6: $R = 0$ 7: $1 > R > 0$

Smith-Diagramm:



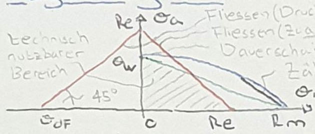
→ aus Wöhlerversuch mit vielen σ_m

Ermüdungsanalyse:

Geometrie, Lasten (t)	Mechanik I/II, Berechnungsmodus / FEM →	
$\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$	Festigkeitshypothese, Extrema →	
$\Delta\sigma$, $\Delta\varepsilon$	Materialdaten →	N_{zul}

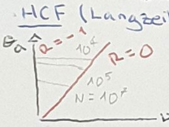
Haigh-Diagramm:

$\boxed{\sigma_m = 0}$



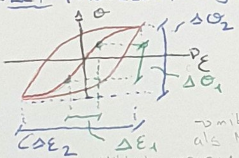
Goodman-Gerade: $\sigma_a = \sigma_w\left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right)$
Gerber-Parabel: $\sigma_a = \sigma_w\left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2\right]$

HCF (Langzeitfestigkeit):

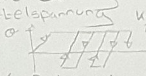


→ Haigh-Diagramm für $\sigma_m > 0$
→ HCF: $\Delta\sigma \leftrightarrow \Delta\varepsilon$ linear

LCF (Kurzzeitfestigkeit):



- Materialverhalten: elastoplastisch
Verfestigung / Entfestigung
$R^{zykl}_{p0.2} \gtrless R_{p0.2}$
→ mittlere Dehnung relevanter als Mittelspannung
→ Einfluss Mittelspannung: $\Delta\sigma > 2R^{zykl}_{p0.2} \Rightarrow R = -1$



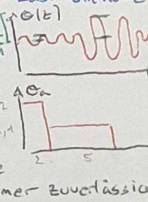
↳ Ratchetting

Kummulative Ermüdung:

→ Schadensakkumulation:

$\boxed{\text{Anriss: } D_{Erm} = \sum_i^N \frac{n_i}{N_{zul}} = 1}$

→ Lastkollektive:



n_i: # Lastspiele
N_{zul}: Bruchlastspielzahl
→ **Miner's Regel:**
Schädigungsanteile lassen sich unabhängig von der Reihenfolge summieren → Ergebnisse nicht immer zuverlässig

Kerben:

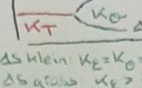
- Anriss als Folge von Spannungs- und Dehnungskonzentration an der kritischen Stelle
- meist ebener Spannungszustand an der kritischen Stelle (spannungsfreie Oberfläche)

→ Material lokal elastisch ($\Delta\sigma_v < 2R^{zykl}_{p0.2}$):
K_t: Kerbformzahl: Spannungsüberhöhung im Kerbgrund
K_F: Kerbwirkungszahl: berücksichtigt Stützwirkung des Materials, beschreibt Schwingungsfestigkeit
q: Index der Kerbsensitivität $q < 1$, $r \downarrow q \uparrow$

$\boxed{\begin{matrix} 1 \leq K_F \leq K_T \quad K_F = q(K_T - 1) + 1 \quad \sigma_{max} = K_F \cdot \sigma_{nom} \\ K_F = \frac{\sigma_a}{\sigma_a^K} \end{matrix}}$
σ_a ~ ungekerbtes Bauteil, σ_a^K ~ gekerbtes Bauteil

→ Material lokal inelastisch (LCF an Kerbe):

$\boxed{\begin{matrix} \Delta\sigma_K = K_\sigma \Delta S \quad \Delta S = E\,\Delta e \\ \Delta\varepsilon_K = K_\varepsilon \Delta e \\ \Delta\varepsilon = 2\varepsilon_a \quad \varepsilon_a^p = \frac{K_T^2 S^2}{E \cdot R_e^{zykl}} \\ K_T^2 = K_\sigma K_\varepsilon \end{matrix}}$



ΔS klein: $K_\varepsilon = K_\sigma = K_T$
ΔS gross: $K_\varepsilon > K_\sigma$

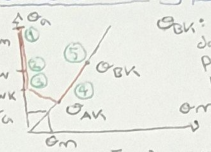
Δ: Schwingungsbreite; ε_a, S_a: Amplitude
$\Delta\sigma_K, \Delta\varepsilon_K$: lokal; $\Delta S, \Delta e$: nominell

Ermüdungsfestigkeitsnachweis nach FKM-Richtlinie:

Vorgehensweise:

Analyse wird für jede Hauptspannung durchgeführt → grösste als Referenz
→ Schritt (4) der statischen FKM wird ersetzt durch die Berechnung von...

Bauteilermüdungsfestigkeit σ_{BK}:



σ_{BK}: zulässige Spannung für das Bauteil (aus Material, Prozess, Geometrie, Belastung)

$\boxed{\sigma_{BK} = K_{BK} \cdot K_{AK} \cdot \frac{1}{K_{WK}} \cdot \sigma_W}$

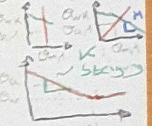
1 → 2: $\sigma_w = F_w \cdot R_m$ (F_w: 0,3...0,4)
2 → 3: Kerbe + Oberflächeneinfluss:

$\boxed{K_{WK} = \left[\left(1 + \frac{1}{\tilde{K}_F}\left(\frac{1}{K_R} - 1\right)\right)\frac{1}{K_V}\right] \cdot \frac{1}{n_\sigma}}$ $\quad G_\sigma = \frac{\Delta\sigma_a}{\Delta S} \cdot \frac{1}{\sigma_a}$

n_σ: Stützzahl aus Kerbwirkung – keine Kerbe: $n_\sigma = 1$
K_V: Randschichtfaktor ($K_V > 1$) – normaler Zustand → $K_V = 1$
K_R: Rauheitsfaktor – polierte Oberfläche: $K_R = 1$
$\tilde{K}_F = 2$ für Stahl – M: Steigung Haigh-Diagramm

3 → 4: Einfluss der Mittelspannung (Haigh-Diagramm)
K_{AK} ist abhängig von der Belastungsart:
→ σ_a variiert bei konstantem σ_m:
$\boxed{K_{AK} = 1 - M\frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_{WK}}}$ $\quad \boxed{K_{AK} = \left[1 + M\frac{\sigma_{m,i}}{\sigma_{a,i}}\right]^{-1}}$
→ σ_a ist proportional zu σ_m (Betriebsfestigkeit)

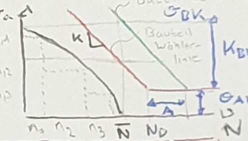
4-5: Beschränkte # Zyklen
→ Betriebs- anstatt Dauerfestigkeit



→ Einstufenkollektiv:

$\boxed{K_{BK} = \frac{\sigma_a(N = N_L)}{\sigma_W} = \left(\frac{N_D}{N_L}\right)^{1/K}}$

→ Mehrstufenkollektiv:



$\boxed{\begin{matrix} \bar{N} = \sum_i n_i \\ K_{BK} = \left(\frac{A\, D_M\, N_D}{\bar{N}}\right)^{1/K} \end{matrix}}$ D_M = Schadensgrenze

$\boxed{A = \left[\sum_i \frac{n_i}{\bar{N}}\left(\frac{\sigma_{a,R,i}}{\sigma_{a,1}}\right)^K\right]^{-1}}$ $\quad \boxed{\sigma_{a,R,i} = \sigma_{a,i}\frac{K_{AK,1}}{K_{AK,i}}}$

Nachweis:

$\sigma_{BK} = \min\{K_{BK} \cdot \sigma_{AK}\, ;\, 0.75 \cdot R_p \cdot n_{pl}\}$
→ Ziel $a_{BK} < 1$ → $\boxed{a_{BK} = \sigma_{a,1}/(\sigma_{BK}/J_D)}$

→ **Sicherheitsfaktor:**

$\boxed{J_D = J_S \cdot J_z \cdot J_F}$ J_F: Materialsicherheitsf.
→ regelmässige Inspektion & geringe Folgen: $J_F = 1.2$
→ seltene Inspektion & schwere Folgen: $J_F = 1.5$

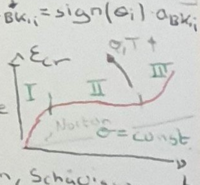
→ **3D Nachweis:**

$a_{ges} = \sqrt{1/2\left\{(a^*_{BK,1} - a^*_{BK,2})^2 + (a^*_{BK,2} - a^*_{BK,3})^2 + (a^*_{BK,3} - a^*_{BK,1})^2\right\}}$

$a_{BK,i} = \frac{\sigma_{i,a,1}}{(\sigma_{BK}/J_D)}$ → $a_{ges} \leq 1$ (extreme Belastung)
→ $a^*_{BK,i} = \mathrm{sign}(\sigma_i) \cdot a_{BK,i}$

Kriechen:

→ **Ursache:**
Bewegung von Versetzungen, Gleit- und Diffusionsphänomene
→ Metalle: ab $T > 0.3\, T_{schmelz}$

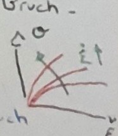


→ **Folgen:**
inelastische Deformation, Schädigung
I: Primäres Kriechen ($\ddot{\varepsilon}_{cr} < 0$)
Progressive Verfestigung wegen Aufbau von Hindernissen zur Versetzungsbewegung
II: Sekundäres Kriechen ($\ddot{\varepsilon}_{cr} = 0$, $\dot{\varepsilon}_{cr} = const$)
Gleichgewicht zwischen Verfestigung und thermischer Entfestigung
III: Tertiäres Kriechen ($\ddot{\varepsilon}_{cr} > 0$)
beschleunigtes Kriechen wegen mehr Schädigung

→ **Zusammenhänge:**
σ ↑ oder T ↑ → Kriechrate ↑, Bruchdehnung ↑, Bruchzeit ↓

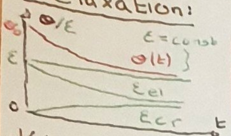
Kriechmodelle (Norton):

$\boxed{\dot{\varepsilon}_{cr} = A \cdot \sigma^n}$ n: 4 bis 8



→ Konsequenz für den Zugversuch
- Dehnratenabhängig

Relaxation:



→ Spannung reduziert sich bei vorgegebener Deformation

$$\boxed{\begin{aligned}&\varepsilon_{cr} + \varepsilon_{el} = \varepsilon = const\\ &\dot{\varepsilon}_{cr} + \dot{\varepsilon}_{el} = 0 \quad \sigma_0 = E\varepsilon_0\\ &\sigma(t) = \left[\sigma_0^{1-n} + (n-1)AEt\right]^{\frac{1}{1-n}}\end{aligned}}$$

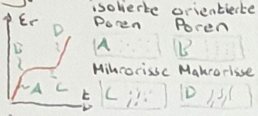
$\int \dot{\varepsilon}_{cr} = \dot{\varepsilon}_{cr} dt \quad \varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon_0 - \frac{\sigma(t)}{E}$

$\dot{\sigma} = -EA\,\sigma^n$

Kriechschädigung:

Rissentwichlung:

Versagen aufgrund interkristalliner Schädigung

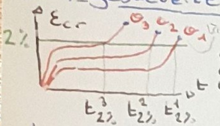


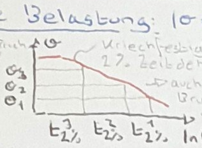
Einflussgrössen Kriechporenwachstum:

- hydrostatischer Spannungszustand ↑↑, Spannung ↑↑, Temperatur ↑↑, superponierte Ermüdungsbelastung ↑↑

Auslegungskriterien: Kriechen:

Kraftgesteuerte Belastung: $(\sigma = const)$





→ kummulative Schädigung: → time fraction rule (↳ vgl.: Miner-Regel)

$$\boxed{D_{cr} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\Delta t_n}{t_B(\sigma_n)} < 1}$$

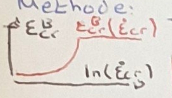
→ Zeit-intervall, → Bruchzeit

Deformationsgesteuerte Belastung $(\varepsilon_{tot} = const)$

→ time fraction rule für kontinuierliche Spannungsgeschichte:

$$\boxed{D_{cr} = \int_0^t [t_B(\sigma(t))]^{-1} dt < 1}$$

→ ductility exhaustion Methode:



→ Kriechbruchdehnung ~ Kriechdehnrate

$$\boxed{D_{cr} = \int_0^{\varepsilon_{cr}} \left[\varepsilon^B_{cr}(\dot{\varepsilon}_{cr})\right]^{-1} d\varepsilon_{cr} < 1}$$

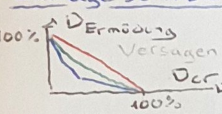
Interaktion Kriechen-Ermüdung:

Kriechen oder Relaxion innerhalb einer zyklischen Belastung führt zu kleinerem N_{zul} für die gleiche Dehnungsschwingbreite $\Delta\varepsilon$

grössere Haltezeit ⟺ kürzere Bruchzeit

$D_{cr} \uparrow \quad N_{zul}(\Delta\varepsilon) \downarrow$

Damage summation diagram:



- linear
- nicht linear
- bi-linear

· Bsp.: → geg.: linear, $D_{erm} = 0.7$, $t_B = e^{(15 - 0.03\sigma)}$ → ges.: t_{max} für $\sigma = 150\,MPa$

↳ Lösung: $t_{max} = (1 - D_{erm}) \cdot t_B(150)$

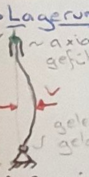
Stabilität:

Definition:

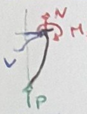
- Übergang in eine stabile Deformationslage, oft unerwünscht, "plötzliches" Auftreten ist möglich

Knicken eines Balkens

→ Lagerung: → Freischnitt: → Beanspruchung:



→ deformierter Zustand



$N = -P$

$M_z + Pv(x) = 0$

→ DGL:

$$\boxed{v'' = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{-Pv(x)}{EI_z}}$$

$\hookrightarrow v'' + \frac{P}{EI_z} v = 0$

→ Randbedingungen: $v(0) = v(\ell) = 0$

→ Eigenwertproblem:

Ansatz: $v = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad k = \sqrt{P/EI_z}$

RB: $A \cdot 0 + B = 0$

$A\sin(k\ell) + B\cos(k\ell) = 0 \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin(k\ell) & \cos(k\ell)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

det = 0 ⟺ Rang nicht voll ⟺ nicht triviale Lösungen

→ triviale Lösung $v(x) = 0$

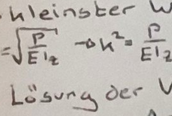
→ det = 0 → $\sin(k\ell) = 0$ → $k\ell = 0$ → $k\ell = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$

→ kleinster Wert von k:

$k = \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \rightarrow k^2 = \frac{P}{EI_z} = \frac{\pi^2}{\ell^2} \rightarrow \boxed{P = \frac{\pi^2 EI_z}{\ell^2} = P_K}$

→ Lösung der Verschiebung:

→ $B = 0$ → A = beliebig → $v = A\sin(kx)$



linearisierte Lsg: kleine Deformation

nicht linear: minimiert E_P

wahre Lösung: wegen Imperfektion

Bifurkation: (Verzweigungsproblem)

→ linearisierte Betrachtung:

Energieverfahren zur (approximativen) Bestimmung der kritischen Last → P_K

→ nicht lineare Betrachtung

- Verhalten nach dem Knicken
- Beurteilung der Stabilität einer Ruhelage bei Verzweigungsproblemen

Stabilität einer Ruhelage:

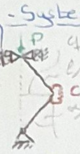
→ stabil, falls "kleine" Veränderungen von Geometrie oder Belastung nur "kleine" Modifikationen der Ruhelage hervorrufen

→ Stabilitätssatz von Lagrange: stabile Gleichgewichtslage ⟺ Minimum des Gesamtpotential ≠0

→ Gesamtpotential $E_P = U + V$ (vgl. Seite 1)

stabil: $E''_P > 0$ instabil: $E''_P < 0$

System mit einem Freiheitsgrad:



- Rückstellmoment Winkelfeder: $M_c = C \cdot \alpha$
- Potential Winkelfeder: $U = 1/2\, C\alpha^2$
- Knicklast: $P_K = 4C/\ell \quad \hookrightarrow \alpha = 4\frac{a}{\ell}$

$X = L\left(1 - \sqrt{1 - 4a^2/\ell^2}\right) \approx 2\ell\, a^2/\ell^2$

→ grosse Deformation für $P \geq P_K$

Einfluss von Strukturfehlern:

$\hookrightarrow Q = 4C/\ell$

Vorkrümmung (anfängliche Auslenkung) bewirkt die wahre Lösung, keine Bifurkation

→ Energetische Stabilitätsanalyse:

Rayleighscher Quotient Q: (1-FG)

$$\boxed{Q = U/X} \quad \boxed{E_P = U - P_K X} \quad \boxed{P_K = \min(Q(u_i(x_i)))}$$

X: Verschiebung der Kraft

$u_i(x_i)$: zulässiges Deformationsfeld

Rayleigh-Ritz-Verfahren:

→ nummerische Approximation von P_K

1.) zulässige Testfunktion $v_i(x)$ (Deformation)
2.) Ansatz: $v(x) = q_1 \cdot v_1(x) + \ldots + q_n \cdot v_n(x)$
↳ q_n: unbekannte Koeffizienten
3.) Finde $U(v)$ und $X(v)$
4.) Einsetzen in Rayleigh Quotienten
5.) q_i Bestimmen: $\frac{\partial Q}{\partial q_i} = 0 \quad P_K \leq Q(q_1, \ldots, q_n)$

$U = \frac{1}{2} EI \int_0^h (v'')^2 dx \quad X = \frac{1}{2}\int_0^L (v')^2 dx$

Nützliches:

Kronecker Delta:

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Einsteinsche Summationskonvention:

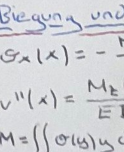
→ über Doppel-Indices wird summiert $(\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$

Einheiten:

$N = kg \cdot m/s^2$, $Pa = N/m^2 = \frac{kg}{m \cdot s^2}$; $J = Nm = \frac{kg\,m^2}{s^2}$

$1\ell = 0.001\,m^3$

Lösung des Grundproblems:



→ $z = L$: $\sigma_{zz} = S$ → gegeben A, ρ, L

→ reibungsfrei am Boden aufgelegt

→ 3. GGB: $\sigma_{zz,z} - \rho g = 0$

→ keine σ in x und y-Richtung

$\sigma_{zz} = \rho g z + C_1$ → RB:

$\sigma_{zz}(L) = \rho g L + C_1 = S \rightarrow C_1 = S - \rho g L$

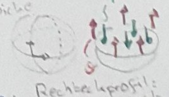
→ $u_x(z=0) \neq 0$, Querkontraktion

Kugelförmiger Kessel:

→ Kräftegleichgewicht:

$p\pi R^2 = 2\pi R d\sigma \quad \boxed{\sigma = p\frac{R}{2d}}$

Druck = σ im Material

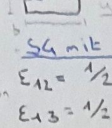


Biegung und Balkentheorie:

Rechteckprofil: Breite = const

$$\boxed{\begin{aligned}&\sigma_x(x) = -\frac{M_z(x)}{I_z} y \quad M_b(x) = -B\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y\, dy\\ &v''(x) = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad v_y(x) = \frac{1}{E}\iint \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} dx\\ &M = \iint \sigma(y) y\, dA\end{aligned}}$$

Formfaktor eines I-Trägers:



$b = h = 5s \quad M_p = \frac{2\sigma_0 I}{h} = \frac{2\sigma_0}{5s} \cdot \frac{517 s^4}{12} = \frac{517}{30}\sigma_0 s^3$

$I = \frac{517 s^4}{12} \quad M_v = 2\sigma_0 \iint_{A_{oben}} y\, dA = \frac{89}{4}\sigma_0 s^3$

$y_{Schwerpunkt} \cdot \Delta A$ →

↳ Alternative

$M_v = M_v^{aussen} - M_v^{innen}$

$M_v^a = 2\sigma_0 5s \int_0^{5/2 s} y\, dy$

$M_v^i = 2\sigma_0 4s \int_0^{3/2 s} y\, dy$

SG mit Schubmodul:

$\varepsilon_{12} = 1/2G \cdot \sigma_{12}$

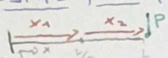
$\varepsilon_{13} = 1/2G \cdot \sigma_{13}$

$\varepsilon_{23} = 1/2G \cdot \sigma_{23}$

Elementsteifigkeitsmatrix:

$F_1^A = \frac{\partial U}{\partial u^A} \quad V = -F_x^A u^A - F_x^B u_x^B - \ldots$

SMPE für doppelten Ansatz:



1.) Stetigkeit herstellen $u_y^1(x = \frac{L}{2}) = u_y^2(x = L/2)$

2.) Standard SMPE für beide Teilansätze parallel durchführen

→ Achtung bei Volumen und Schubspannungen und Faktor 2

↳ nur Teilvolumen

Zusätzliche Formeln für die Ermüdungsanalyse:

$\sigma_{AK} = \sigma_{a,1} \cdot \left(\frac{N_{zul}(\sigma_{a,1})}{N_D}\right)^{\frac{1}{k}}$

→ $\Delta\sigma > 2R_{p0.2}^{zykl}$: $\quad \Delta\varepsilon = A \cdot N_{zul}^b$

→ N_{zul}: $N_{zul}(\sigma_{a,R_i}) = N_{zul}(\sigma_{a,1}) \cdot \left(\frac{\sigma_{a,1}}{\sigma_{a,R_i}}\right)^k$

$\sigma_a(\sigma_m) = \sigma_{wk} - M\sigma_m$

→ Einstufenkollektiv: $\sigma_a = C_1 N^{-1/k} \quad \sigma_W = C_1 \cdot N_D^{-1/k}$

⚠ Aufpassen mit Schwingungsbreiten Δ und Amplituden → Faktor 2

Neuber mit Kerbfaktoren:

· geg.: $R_{p0.2}^{zykl} = 300\,MPa$, $E = 2 \cdot 10^5\,MPa$, elastisch, idealplastisch, $\Delta\sigma_{EL} = 800\,MPa$, $K_T = 2$, uniaxialer Spannungszustand

· ges.: $\Delta\varepsilon_{EL}, \Delta\varepsilon_{PL}, K_\sigma, K_\varepsilon, \varepsilon^a_{EL}, \sigma^a_{EL}$

· Lösungsweg:

$\sigma^a_{EL} = \frac{1}{2}\Delta\sigma_{EL} = 400\,MPa$

$\Delta\varepsilon_{EL} = \frac{\Delta\sigma_{EL}}{E} = 4 \cdot 10^{-3} \quad \varepsilon^a_{EL} = 1/2\,\Delta\varepsilon_{EL} = 2 \cdot 10^{-3}$

$\varepsilon^a_{PL} = \frac{\sigma^a_{EL} \cdot \varepsilon^a_{EL}}{\sigma^a_{PL}} = 2.67 \cdot 10^{-3} \quad \sigma^a_{PL} = R_{p0.2}^{zykl} = 300\,MPa$

$\Delta\varepsilon_{PL} = 2\varepsilon^a_{PL} = 5.33 \cdot 10^{-3}$

$K_\sigma = \frac{\Delta\sigma_K}{\Delta S} = \frac{\sigma^a_K}{S^a} = \frac{\sigma^a_{PL}}{\sigma^a_K \frac{1}{K_T}} = \frac{R_{p0.2}^{zykl}}{\sigma^a_{EL}\frac{1}{K_T}} = 1.5$ → Kerbe plast. → Fernfeld elast.

$K_\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon_K}{\Delta e} = \frac{\varepsilon^a_K}{e^a} = \frac{\varepsilon^a_{PL}}{S^a/E} = 2.67$

→ Neuber mit Amplituden rechnen

σ_a^{zul} für N^* aus der Lebensdauerlinie berechnen:

$\sigma_a^{zul}(N^*) = \sigma_{a,1}\left(\frac{AD_M \cdot N_{zul}(\sigma_{a,1})}{N^*}\right)^{1/k}$

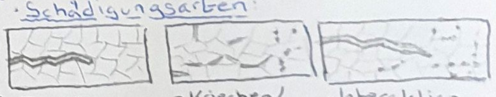
Anwendung der ductility exhaustion Methode:

geg.: $\varepsilon_{cr} = a \cdot t$, $\varepsilon^B_{cr} = b \cdot (\dot{\varepsilon}_{cr})^c$

$\int_0^{\varepsilon_{cr}} \frac{1}{\varepsilon^B_{cr}(\dot{\varepsilon}_{cr})} d\varepsilon_{cr} = \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}_{cr}}{b \cdot (\dot{\varepsilon}_{cr})^c} dt = \frac{1}{b}\int_0^t (\dot{\varepsilon}_{cr})^{1-c} dt$

$= 1/b \cdot a^{1-c} \cdot t$

Schädigungsarten:



- Ermüdung
- Transkristallin

- Kriechen/Relaxation
- Interkristallin

- Interaktion zwischen Ermüdung und Kriechen

Aussagen: (alle sind richtig)

Grundproblem/Vergleichsspannung:

- Verschiebungsansatz führt zu Normalspannungen ⊥ Balkenachse
- grösste Hauptspannung ≯ $R_{p0.2}$ (Tresca, Mises)
- grösste Schubspannung = $\frac{1}{2} R_{p0.2}$ (Tresca)

Ermüdung:

- Die Streckgrenze kann sich auch bei T = const während der Lebensdauer verändern
- Wenn $\sigma_m > 0$ ist, dann reduziert sich die Dauerfestigkeit und die Zeitfestigkeit
- Wenn $\sigma_{Mises} > R_{p0.2}$ → Lebensdauer noch nicht zu Ende

FKM und Kriechen:

- mit zunehmender Mittelspannung wird K_{AK} kleiner
- σ_{AK} kann grösser sein als σ_W
- σ_{AK} ist immer kleiner als σ_{WK}
- $1_0 = 1$ für eine Kerbe ist konservativ
- σ_{WK} kann grösser sein als σ_W
- K_{BK} kann bei einstufiger Belastung direkt aus der Wöhlerkurve bestimmt werden
- Bei mehrstufiger Belastung wird die Spannungsamplitude angepasst, auch wenn alle Stufen die gleiche Mittelspannung haben
- Bei Mehrstufigen-Belastungen werden die verschiedenen Mittelspannungen berücksichtigt
- Kriechversuche bei höheren Spannungen führen zu grösseren Bruchdehnungen
- Duktilität ist nicht von $\dot{\varepsilon}_{cr}$ unabhängig
- Kriechporen bilden sich an Korngrenzen