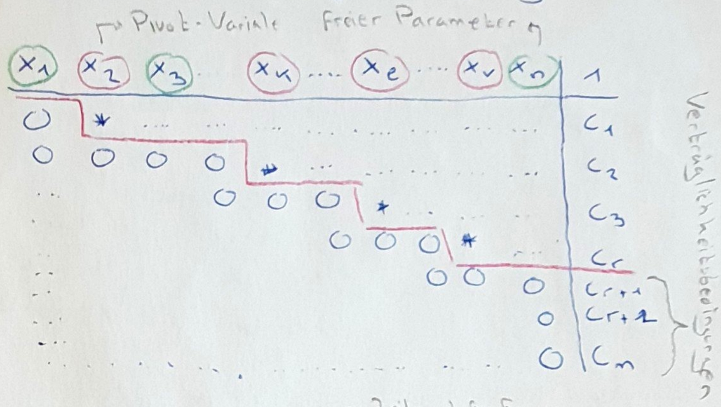
Lineare Gleichungssysteme

- eine, keine, unendlich viele Lösungen
- äquivalent: LGS haben die gleiche Lösungsmenge



→ Zeilenstufenform

m: Gleichungen
n: Unbekannte
r: Rang = # Pivots p

$r \geq 0$
$r \leq m$
$r \leq n$

→ Dreiecksform: $m = n = r$

→ Homogenes LGS:

$Ax = 0$ → immer die triviale Lösung $x = 0$

- $n > m$ → nichttriviale Lösungen
  $r < n$

äquivalente Umformungen:

(I) Vertauschen zweier Zeilen
(II) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen
(III) Multiplizieren einer ~~Zahl~~ Zeile mit einer Zahl $\neq 0$

- eindeutige Lösung:
  - keine Nullzeile im Endschema
  - $r = n = m = p$
- unendlich viele Lösungen:
  - Nullzeilen im Endschema
  - $r < n$, $m < n$
  - Anzahl freier Parameter $k = n - r$
  - Verträglichkeitsbedingungen erfüllt
- keine Lösung:
  - $r < m$
  - Verträglichkeitsbedingungen verletzt

$Ax = b$		
	$r = m$	$\forall b$ lösbar
	$r < m$	nicht $\forall b$ lösbar

$m = n$ | $Ax = b$ $\forall b$ lösbar $\iff$ $Ax = 0$ nur die triviale Lösung

$m = n$ | Lösung von $Ax = b$ eindeutig $\iff$ $\forall b$ lösbar

Matrizen:

- $m = n$ → quadratisch
- alle Einträge 0 → Nullmatrix

Rechtsdreiecksmatrix / obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Linksdreiecksmatrix / untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- symmetrisch: $A = A^T$
- antisymmetrisch: $A = -A^T$ (schiefsymmetrisch)
- Transponieren: $(A^T)^T = A$
  $(A+B)^T = A^T + B^T$
  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
  $\text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(A)$

Multiplikation

$\overset{A}{A^{m \times p}} \cdot \overset{B}{B^{p \times n}} = C^{m \times n}$

$A \cdot B \neq B \cdot A$

$A \cdot B \cdot C = A(B \cdot C) = (AB) \cdot C$

$(A + B) \cdot C = AC + BC$

Spaltenvektoren:

$a^{(i)}$ $\quad A = (a^{(1)}\, a^{(2)} \dots a^{(n)})$

$AB = (Ab^{(1)}\, Ab^{(2)} \dots Ab^{(n)})$

$Ax = x_1 a^{(1)} + x_2 a^{(2)} + \dots + x_n a^{(n)}$

$Ae^{(i)} = a^{(i)}$

Inverse:

$\det(A) \neq 0$

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$A \mid I$
$\downarrow$
$I \mid A^{-1}$

$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$

Zeilenvektoren:

$a^{[i]}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ a^{[2]} \\ \vdots \\ a^{[m]} \end{pmatrix}$

$e^{[i]}A = a^{[i]}$

$xA = x_1 a^{[1]} + x_2 a^{[2]} + \dots + x_n a^{[n]}$

$AB = \begin{pmatrix} a^{[1]}B \\ a^{[2]}B \\ \vdots \\ a^{[m]}B \end{pmatrix}$

Reguläre Matrizen

(i) A ist regulär
(ii) A ist invertierbar
(iii) $Ax=b$ ist für jedes b lösbar
(iv) $Ax=0$ hat nur die triviale Lösung
(v) $\det(A) \neq 0$
(vi) $\text{Rang}(A) = n$

singuläre Matrizen

(i) B ist singulär
(ii) B ist nicht invertierbar
(iii) Nullzeilen im Endschema
(iv) $\det(B) = 0$

$\dim(\text{Kern}) > 0$
$\dim(\text{Im}) < n$

$|Ax|^2 = (Ax)^T Ax$

Orthogonale Matrizen

$C^T C = C C^T = 1$

$C^{-1} = C^T$

C^{-1} ist orthogonal

CD ist orthogonal

$\mathbb{I}$ ist orthogonal

$\det(C) = \pm 1$

→ jeder Zeilenvektor / Spaltenvektor hat die Länge 1

→ je 2 Zeilen-/Spaltenvektoren stehen senkrecht aufeinander

$\det(AB) = \det(A)\det(B)$
$\det(AB) = \det(BA)$
$\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$
$\det(A^T) = \det(A)$
$\det(rA) = r^n \det(A)$
$\det(\mathbb{I}) = 1$

LR-Zerlegung:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&0&3&-2\\ 0&1&0&4&-2&1\\ 0&0&1&2&-1&1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&0&1&2&-1&1\\ 0&1&0&4&-2&1\\ 1&0&0&0&3&-2 \end{array}\right) \quad \cdot(-2) \; \oplus$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&0&1&2&-1&1\\ 0&1&0&\boxed{2}&0&-1\\ 1&0&0&0&3&-2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0&0&1&2&-1&1\\ 1&0&0&0&3&-2\\ 0&1&0&\boxed{2}&0&-1 \end{array}\right)$$

P, L, R

1.) $PA = LR$
2.) $Ly = Pb$
3.) $Rx = y$

$$L = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 2&0&1 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 2&-1&1\\ 0&3&-2\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$$

Minor von A: $M_{ij} = \det A_{ij}$

Kofaktor von A: $\tilde{\alpha}_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Adjunkte von A: $(\tilde{\alpha}_{ij})^T$

Determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

→ Dreiecksmatrizen: Diagonale multiplizieren
→ Entwicklung nach einer Zeile/Spalte mit vielen 0
→ $PA = LR$ → $\det(A) = \det(P)\det(R)$
→ Blockmatrizen: $\det(M) = \det\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det(A)\cdot\det(D)$
→ Zeilen/Spalten vertauschen: Vorzeichenwechsel
→ Addition eines Zeilen-/Spaltenvielfachen: det bleibt gleich
→ Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einem Skalar a: $a \cdot \det$
→ Matrix mit Nullzeile, $\det = 0$
→ zwei gleiche Zeilen/Spalten, $\det = 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

A $\in M^{n \times n}$ ist eine orthogonale Matrix ⟺ Spalten bilden eine O.N.B. von $\mathbb{R}^n$ bzgl. des euklidischen Skalarproduktes

Rang(A)	det(A)	LGS	Effekt
$=n$	$\neq 0$	$Ax=0$	hat nur die triviale Lösung $x=0$
$<n$	$=0$	$Ax=0$	hat unendlich viele Lösungen
$=n$	$\neq 0$	$Ax=b$	hat für beliebiges b genau eine Lösung
$<n$	$=0$	$Ax=b$	hat je nach b keine oder unendlich viele Lösungen

• Vektorräume

- → innere Operation: Addition zweier Vektoren
- → äussere Operation: Multiplikation mit einem Skalar

→ Es gibt genau einen $\vec{0}$.
→ $\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = \vec{0}$
→ $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$
→ $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
→ $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

Axiome:

(A1) $u + v = v + u$
(A2) $(u+v)+w = u+(v+w)$
(A3) $u + 0 = u$
(A4) $u + (-u) = 0$

(M1) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
(M2) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u$
$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$
(M3) $1 \cdot u = u$

$\Rightarrow U_1, U_2$ Unterräume von V
(i) $U_1 \cap U_2$ ist ein Unterraum von V
(ii) $U_1 + U_2$ ist ein Unterraum von V
$\{0\}$ und V sind Unterräume von V

⚠ $U_1 \cup U_2$ ist **kein** Unterraum von V

• Unterraum:

(i) $\forall a, b \in U \Rightarrow a + b \in U$ → U ist abgeschlossen unter Addition
(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, a \in U \Rightarrow \alpha a \in U$ → U ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren

$\{0\} \subset P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n \subset \ldots \subset P \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \ldots \subset C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$\{0\}$: Nullfunktion; P_0: konstante Funktionen; P_n: Polynome vom Grad n; C^∞: → beliebig oft diff'bare Funktionen; $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$: alle Funktionen

• Linearkombination:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

- → Addition von Vektoren
- → Multiplikation mit einem Skalar

• Erzeugendensystem:

$U = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots = \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots\}$

- endliches Erzeugendensystem: endlichdimensional
- unendliches Erzeugendensystem: unendlichdimensional

• Basis:

Erzeugenden System mit linear unabhängigen Vektoren

(i) $v_1, v_2, \ldots, v_k$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$
(ii) $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\} = \mathbb{R}^n$
(iii) jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist LK von $v_1, v_2, \ldots, v_k$
(iv) für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $b = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ lösbar
(v) für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ ist das LGS $Ax = b$ lösbar
(vi) $\operatorname{Rang}(A) = n$
(vii) $k \geq n$

$v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$
$A = (v_1 \; v_2 \; \ldots \; v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$

• linear Unabhängig:

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$
→ $\det(A) \neq 0$

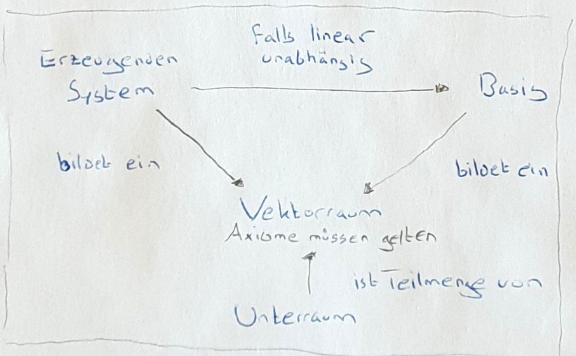
• linear Abhängig:

Es gibt eine nichttriviale LK die den Nullvektor ergibt
- → min 1 $\alpha_i \neq 0$
- → Menge, die den Nullvektor enthält ist linear Abhängig
- → 2 Vektoren die ein skalares Vielfaches voneinander sind, sind linear abhängig
- → $V \in \mathbb{R}^3$: liegen 3 Vektoren in der gleichen Ebene, sind sie linear abhängig

• Dimension:

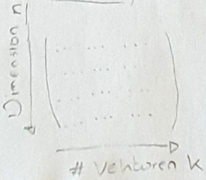
$b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V
n = Dimension von V; $\dim(V) = n$
$\dim(\{0\}) = 0$ → = # linear unabhängiger Spalten

→ Dimension von $\mathbb{R}^n = n$



		Matrizen
$r = k$ ↔ linear unabhängig	→	$r = n$
$r = n$ ↔ erzeugend	→	$r = m$
$n = k = r$ ↔ Basis	→	$r = m = n$
$k > r$ ↔ linear abhängig	→	$r < n$
$k < n$ ↔ nicht erzeugend	→	$n < m$
$k > n$ ↔ linear abhängig	→	$n > m$

n = Dimension der Vektoren
k = Anzahl Vektoren
r = Rang der Matrix
linear unabhängiger Zeilen / Spalten



• Koordinaten:

$V = \mathbb{R}^n$, $B = \{e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}\}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$x = x_1 e^{(1)} + \ldots + x_n e^{(n)}$

→ die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ sind die Koordinaten von x bezüglich der Basis B

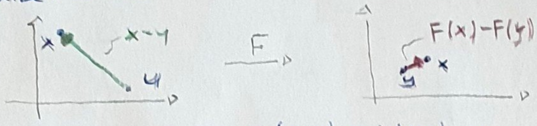
- Bestimme maximale Teilmenge von linear unabhängigen Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ 1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Gauss}} R = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivot 1   Pivot-Spalten

→ 3 linear unabhängige Spalten von A

→ Rang = 3



- Kontraktion:

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst Kontraktion, wenn ein $c \in (0,1)$ existiert, so dass $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $\|F(x) - F(y)\| \leq c\,\|x - y\|$.

- Eigenschaften Transponieren:

- Spur, Rang, Determinante und EW bleiben unter Transponierung gleich

A invertierbar $\Leftrightarrow$ A^T invertierbar

A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ A^T diagonalisierbar

- Lineare Abbildungen:

(i) $F(x+y) = F(x) + F(y)$

(ii) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

→ $F(x) = A \cdot \vec{x}$ ist eine lineare Abbildung

Matrix ⤴   ⤷ Vektor

- Bsp.: - Identitätsabbildung ($x \longmapsto x$)
  - Nullabbildung ($x \longmapsto 0$)
  - Ableitung ($x \longmapsto \frac{df}{dx}$)
  - Streckungen, (Spiegelungen), Projektionen, Drehungen, Interpolation

$A = (1)$

$A = (0)$

⚠ Translation ($x \longmapsto x + a$) ist nicht linear

- Affin lineare Abbildung:

$x \longmapsto Ax + a$

→ jede lineare Abbildung muss 0 auf 0 abbilden