Eigenvektoren

$\boxed{Ax = \lambda x}$ → Vektor wird nur gestreckt

· Eigenwert: (EW)

$\boxed{\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0}$ → λ kann 0 sein

· Eigenvektor: (EV)

$\boxed{(A - \lambda \mathbb{I})x = 0}$ → x darf nicht $\vec{0}$ sein

· Charakteristisches Polynom: $F(A) = 0$ ⇒ $F = P_A$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I})$ → $P_A(A) = 0$

· Algebraische Vielfachheit:

\# gleiche EW im charakteristischen Polynom

→ Summe der alg. Vf. der EW $= n$

· Koeffizienten des charak. Polynom:

$P_A(\lambda) = c_n \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$

$c_0 = P_A(0) = \det(A)$; $c_n = (-1)^n$

$c_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$

· Spur

$\mathrm{Spur}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

· Produkt von Eigenwerten:

$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$

· Spektrum:

Menge der EW von A

· Ähnliche Matrizen: $\boxed{\text{Ähnlich} \Rightarrow \text{Aussagen}}$

Zwei quadratische Matrizen A und B heissen ähnlich, falls es eine reguläre/invertierbare T gibt mit $\boxed{B = T^{-1}AT}$

(i) gleiche charak. Polynom
(ii) gleiche Determinante/Spur/EW
(iii) λ ist ein EW von A zum EV x
⇔ $y = T^{-1}x$ ein EV von B zum EW λ

A, B ähnlich ⇔ A^2, B^2 ähnlich

· Kern:

Lösungsmenge des HLGS $Ax = 0$

$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

→ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$

· Eigenraum E_λ:

x ist EV von A zum EW λ ⇔ $(A - \lambda\mathbb{I})x = 0$ ⇔ $x \in \mathrm{Kern}(A - \lambda \mathbb{I})$

Der Unterraum der EV x von A zum EW λ heisst Eigenraum E_λ

$\boxed{E_\lambda = \mathrm{Kern}(A - \lambda \mathbb{I})}$

· Geometrische Vielfachheit:

$= \dim E_\lambda$ = # freie Parameter in der Lösung des Systems $(A - \lambda\mathbb{I})x = 0$

$= n - \mathrm{Rang}(A - \lambda\mathbb{I})$

$\boxed{1 \leq \text{geom. Vf. von } \lambda \leq \text{alg. Vf. von } \lambda \leq n}$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ verschiedene EW von A zu den EV $x_1, x_2, \dots, x_k$

⇒ $x_1, x_2, \dots, x_k$ linear unabhängig

· Dreiecksmatrix:

EW sind die Elemente der Diagonalen

→ jedes Vielfache eines EV hat den selben EW

· **Bsp.: Überprüfen ob ein Vektor ein EV von A ist** $Ax = \lambda x$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Ax = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

· **Bsp.: Eigenwertproblem**

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ → $\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$

$(4-\lambda)^3 + 8 + 8 - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) - 4(4-\lambda) = 0$

$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda + 32 = 0$

$(\lambda - 2)^2(\lambda - 8) = 0$ EW: $\lambda_1 = 2$ → alg. Vf.: 2, $\lambda_2 = 8$ → alg. Vf.: 1

$(A - \lambda\mathbb{I})x = 0$

$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

Pivot; freie Parameter

→ Rang = 1

$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

→ $\dim E_2 = 2$ → geom. Vf. von 2 gleich 2

· **Bsp.: mit komplexen Zahlen**

$\lambda_1 = 2 + i$ → $E_{2+i} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

gesucht für $2 - i$ → $Ax = \lambda x$ → $Ax = (2+i)x$

komplexe Konjugation → $\overline{Ax} = \overline{(2+i)x}$

→ $A\bar{x} = (2-i)\bar{x}$ → $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}$

→ $E_{2-i} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

· Zusammenhänge:

Matrix M mit EW λ zum EV x

⇔ λ^k ist ein EW von M^k zum EV x

⇔ $1/\lambda$ ist ein EW von M^{-1} zum EV x

↳ Falls M invertierbar ist

$M^k x = M^{k-1}Mx = M^{k-1}\lambda x = \lambda^2 M^{k-2}x = \dots = \lambda^k x$

$x = \mathbb{I}x = M^{-1}Mx = M^{-1}\lambda x \Rightarrow M^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$ ↳ $\lambda \neq 0$

A ist nicht invertierbar ⇔ $\lambda = 0$

$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \det(A) = 0$

· Eigenbasis:

Basis aus EV einer Matrix A

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt n paarweise verschiedene EW ⇔ EV bilden eine Basis von $\mathbb{C}^n$

→ EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig

Summe aller geometrischen Vielfachheiten von EW von A muss gleich n sein, damit eine Eigenbasis existiert

· Einfach:

Jeder EW von A hat die alg. Vf. 1

· Halbeinfach:

Bei jedem EW von A stimmen die alg. Vf. und die geom. Vf. überein

A halbeinfach ⇔ A^n, A^T halbeinfach

einfach ⇒ halbeinfach

A halbeinfach (einfach) ⇔ A besitzt Eigenbasis
⇔ A diagonalisierbar

· **Bsp.: Eigenbasis**

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = 2$ → $g_1 = 2$ $E_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda_2 = 8$ → $g_1 = 1$ $E_8 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

⇒ $\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ = Eigenbasis von $\mathbb{R}^3$

↳ linear unabhängig

· Diagonalisierbar:

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heisst diagonalisierbar, falls

$\boxed{T^{-1}AT = D = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)}$

→ Vergleich ähnliche Matrizen

· Eigenschaften Diagonalisierbarkeit:

- Spalten $t^{(1)}, \dots, t^{(n)}$ sind eine Basis von $\mathbb{C}^n$
- $\boxed{\text{Spalten } t^{(j)} \text{ sind EV zu den EW } d_j}$

⚠ kohärent bleiben $T \Leftrightarrow D$, $t^{(j)} \Leftrightarrow d_j$

- $t^{(j)}$ bilden eine Eigenbasis von A
- Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung in einer Eigenbasis ist diagonal

A invertierbar ⇔ A^{-1} ist diagonalisierbar

· Symmetrische Matrizen: $A^T = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

· alle EW von A sind reell
- EV zu verschiedenen EW sind orthogonal
- Ist $x \in \mathbb{C}^n$ ein EV von A, so sind auch $\mathrm{Re}(x)$ und $\mathrm{Im}(x)$ EV von A
- A ist halbeinfach/diagonalisierbar
- A besitzt eine orthonormale Eigenbasis

· komplexe Standardskalarprodukt:

$\langle x, y \rangle = \bar{x}^T y = \bar{x}_1 y_1 + \dots + \bar{x}_n y_n$

$\langle Bx, y \rangle = \langle x, \bar{B}^T y \rangle$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$

→ A symmetrisch; λ, μ EW zu den EV x, y

$(\bar{\lambda} - \mu)\langle x, y \rangle = 0$

· **Bsp.: ONB, (Diagonalisieren)**

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 8$ $E_2 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ → u_1, → u_2 $E_8 = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ → u_3

1) EW und EV finden
2) Innerhalb eines Eigenraums die Vektoren orthonormalisieren

$\vec{v}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\tilde{\vec{v}}_2 = \vec{u}_2 - \langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\vec{v}_2 = \frac{\tilde{\vec{v}}_2}{\|\tilde{\vec{v}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ → $E_8 \perp E_2$, weil A symmetrisch → $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ $B = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\}$

$T_{\text{orthn.}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $D = \mathrm{diag}(2, 2, 8)$

$T^{-1} = T^T$

· $A^k x$ berechnen:

1.) T, D finden → $A = TDT^{-1}$
2.) z als Lösung des LGS $Tz = x$ finden
3.) $A^k x = T\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)\,z$

$A^k = (TD\cancel{T^{-1}})(\cancel{T}D\cancel{T^{-1}}) \dots (\cancel{T}DT^{-1}) = (TD^kT^{-1})$

→ $A^k x = TD^k \underbrace{T^{-1}x}_{z}$ → $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

→ Zeilen von T sind Vektoren z. B. $1, x, x^2$

· e^A berechnen:

$e^A = T\,\mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})\,T^{-1}$

⚠ $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ ⇔ $AB = BA$

· Matrix-Operatornorm:

$\|A\| = \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ → längste Halbachse

→ Einheitskugel ↳ bildet ein Ellipsoid

→ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $\|A\| = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n}\{\lambda_i\}}$

→ λ_i sind EW von A^TA

→ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; symmetrisch:

$\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n}\{|\lambda_i|\}$ → λ_i sind EW von A

→ $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, orthogonal: $\|A\| = 1$

→ $|\lambda| = 1$ → EV zu verschiedenen EV sind orthogonal

· **Bsp.: Konvergenz bzg. Normen**

Konvergiert die Folge von Funktionen $f_n(x) = \frac{1}{1 + (nx)^2}$ auf $[-1, 1]$ bzg. der Norm $\|\ \|_{L^\infty}$ gegen die Funktion $f(x) \equiv 0$?

$\|f_n(x)\|_{L^\infty} = \max\{|f_n(x)| : -1 \leq x \leq 1\}$

$= \max\left\{\frac{1}{1 + (nx)^2} : -1 \leq x \leq 1\right\} = 1$ → nein

Normen

Abbildung von $V \to \mathbb{R}$

- Axiome:

(N1) $\forall v \in V: \|v\| \geq 0$
und $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$

(N2) $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}: \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$

(N3) $\forall u, v \in V: \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$
↳ Dreiecksungleichung

- Euklidische Norm:

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2 \right)^{1/2}$$

- P-Norm:

$$\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \right)^{1/p} \quad \to \text{Vektor}$$

$$\|f(x)\|_{L^p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \to \text{Funktionen}$$

↳ misst durchschnittlichen Ausschlag

Maximumsnorm:

$$\|v\|_\infty = \max \{ |v_i| : 1 \leq i \leq n \}$$

$$\|f(x)\|_{L^\infty} = \max \{ |f(x)| : a \leq x \leq b \}$$

↳ misst maximalen Ausschlag

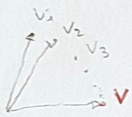
- Hilbert-Schmidt-Norm:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

↳ wird nicht durch ein Skalarprodukt erzeugt

- Operatornorm:

$$\|A\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$



- Konvergenz:

$$\lim_{n \to \infty} v_n = v \iff \lim_{n \to \infty} \|v_n - v\| = 0$$

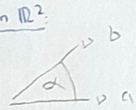
→ alle Konvergenzbegriffe, die durch Normen erzeugt werden, stimmen auf endlich-dimensionalen VR überein

→ in unendlichdimensionalen VR ist das falsch!

Skalarprodukte

- Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^2$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$



- Axiome:

(S1) $\langle x, y+z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle; \forall x, y, z \in V$
$\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

(S2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in V$

(S3) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V$
$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

(S1) Bilinearität
(S2) Symmetrie
(S3) positive Definitheit

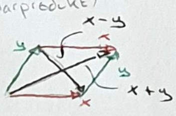
- Innenproduktraum:
V mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$

↳ wegen Symmetrie reicht es die Linearität nur in einem Argument zu prüfen

- Induzierte Norm: (durch ein Skalarprodukt)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

→ Beispiel ist die P2-Norm



- Parallelogrammregel:

Eine Norm $\| \|$ wird dann und nur dann von einem Skalarprodukt erzeugt, wenn

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

- Polarisationsformel:

Falls die Parallelogrammregel gilt, kann man das Skalarprodukt aus der Norm rekonstruieren

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \right)$$

- Orthogonal:
$\langle x, y \rangle = 0 \iff x \perp y$

- Skalarprodukte

$V = \mathbb{R}^n$: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

$V = C([a,b])$: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$

- Frobenius-Skalarprodukt:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

→ Skalarprodukt zwischen 2 Matrizen

→ komponentenweise Multiplikation der Einträge und anschliessende Summation über alle Produkte

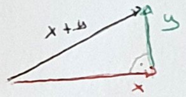
Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\langle A, B \rangle = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 8$

- Satz des Pythagoras:

Falls $x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle$
$= \|x\|^2 + 2\underbrace{\langle x, y \rangle}_{=0} + \|y\|^2$
$= \|x\|^2 + \|y\|^2$



- Ungleichung Norm/Skalarprodukt:

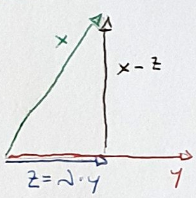
$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 ; \forall x, y \in V$$

→ Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Orthogonalprojektionen

$$\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

$$z = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \cdot y$$



- Einheitsvektor:
$\|x\| = 1$

- Orthonormalbasis ONB:

$e_1, \dots, e_k$ paarweise orthogonale Vektoren
$\Rightarrow e_1, \dots, e_k$ linear unabhängig

⚠ $e_i \neq 0 \; \forall i$

→ n paarweise orthogonale Einheitsvektoren bilden eine n-dimensionale Orthonormalbasis

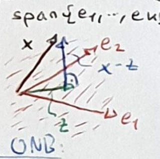
- Projektion auf einen VR:

$$\boxed{z = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i}$$

ist die orthogonale Projektion von x auf $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$

→ z realisiert den minimalen Abstand von x zu $\text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$

→ $x - z \perp \text{span}\{e_1, \dots, e_k\}$



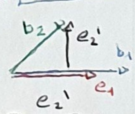
- Linearkombination bei ONB:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

→ $e_1, \dots, e_n$ sind eine ONB von V
→ $x \in V$

- Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

1.) $e_1 = \dfrac{b_1}{\|b_1\|}$ ← $\sqrt{\langle b_1, b_1 \rangle}$



2.) $e_2' = b_2 - \underbrace{\langle b_2, e_1 \rangle e_1}_{\text{Projektion von } b_2 \text{ auf } e_1}$, $e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|}$

3.) $e_3' = b_3 - \underbrace{(\langle b_3, e_1 \rangle e_1 + \langle b_3, e_2 \rangle e_2)}_{\text{Projektion von } b_3 \text{ auf } \text{span}\{e_1, e_2\}}$

$e_3 = \dfrac{e_3'}{\|e_3'\|}$

Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$, $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_1 = \dfrac{b_1}{\|b_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle e_1$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$e_3' = b_3 - (\langle b_3, e_1 \rangle e_1 + \langle b_3, e_2 \rangle e_2) =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $e_3 = \dfrac{e_3'}{\|e_3'\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lineare Abbildungen I

(i) $F(x+y) = F(x) + F(y)$
(ii) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$

$\boxed{F(x) = A \cdot \vec{x}}$ → Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen VR lässt sich mit einer Matrix beschreiben

Matrix: A, Vektor: $\vec{x}$

Lineare Abbildung $\Rightarrow F(0) = 0$
$F(0) \neq 0 \Rightarrow$ nicht linear

→ die Zusammensetzung von linearen Abbildungen ist linear

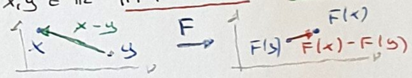
- Beispiele von linearen Abbildungen:
  - Identitätsabbildung $x \longmapsto x$ $A = (1)$
  - Nullabbildung $x \longmapsto 0$ $A = (0)$
  - Ableitung $x \longmapsto df/dx$
  - bestimmte Integral $x \longmapsto \int_a^b f(x) dx$
  - Streckungen, Projektion, Interpolation
  - Spiegelungen ⚠ Achse muss durch den Ursprung gehen
  - Drehungen ⚠ um den Ursprung

⚠ Translation ist nicht linear
$(x \longmapsto x + a)$

- Affin lineare Abbildung:
$x \longmapsto Ax + a$ (lineare Abbildung + Translation)

- Kontraktion:

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst Kontraktion, wenn ein $c \in (0,1)$ existiert, so dass $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\|F(x) - F(y)\| \leq c\|x - y\|$



- Darstellungsmatrix:

$\mathcal{F}: V \to W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$

$\boxed{[y]_C = A[x]_B}$
↳ Koordinatenvektor von y bzgl. C

$y = \mathcal{F}(x)$
$A = m \times n$ - Matrix
C = Basis in W
B = Basis in V

$$\boxed{A = ([F(b_1)]_C \; [F(b_2)]_C \dots [F(b_n)]_C)}$$

→ Die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren der Bilder $\mathcal{F}(b_i)$ bzgl. der Basis C

- **Bsp.:** Darstellungsmatrix berechnen

V = VR der Polynome vom Grad ≤ 2, $B = \{1, x, x^2\}$
W = VR der Polynome vom Grad ≤ 1, $C = \{1, x\}$
$\mathcal{F}: V \to W$, $p \longmapsto p'$ (Ableitung)

$\mathcal{F}(1) = 0 \to [\mathcal{F}(1)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{F}(x) = 1 \to [\mathcal{F}(x)]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\mathcal{F}(x^2) = 2x \to [\mathcal{F}(x^2)]_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Zusammenhang Lin. Abb & Matrizen:

$$\begin{array}{ccc} \text{kern}(F) \subset V^n & \xrightarrow{\mathcal{F}} & W^m \supset \text{im}(F) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & \mathcal{F}(x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [x]_B & \xrightarrow{A} & [\mathcal{F}(x)]_C = A[x]_B \end{array}$$

- Zusammengesetzte Lin. Abb

$$V^n \xrightarrow{\mathcal{F}} W^m \xrightarrow{\mathcal{G}} Z^P$$

Basis $\mathcal{B}$ — Basis $\mathcal{C}$ — Basis $\mathcal{D}$

$x \longmapsto \mathcal{F}(x) \longmapsto \mathcal{G}(\mathcal{F}(x)) = (\mathcal{G} \circ \mathcal{F})(x)$

$[x]_\mathcal{B} \longmapsto [\mathcal{F}(x)]_\mathcal{C} \longmapsto [\mathcal{G}(\mathcal{F}(x))]_\mathcal{D}$

$\qquad\quad \overset{\shortparallel}{A[x]_\mathcal{B}} \qquad \overset{\shortparallel}{B(A[x]_\mathcal{B})} = \boxed{(BA)[x]_\mathcal{B}}$

Lineare Abbildungen II

Kern und Bild:

Kern: $\ker(f) = \{x \in V : f(x) = 0\}$
Bild: $\mathrm{im}(f) = \{F(x) : x \in V\}$

$b \in \mathrm{im}(A) \Leftrightarrow Ax = b$ ist lösbar
$\mathrm{im}(A) = \mathrm{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
$x \in \mathrm{kern}(A) \Leftrightarrow Ax = 0$
$\mathrm{kern}(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$
$\mathrm{im}(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$

$$\boxed{\begin{aligned} &\dim(\mathrm{kern}(A)) + \dim(\mathrm{im}(A)) = n \\ &\dim(\mathrm{im}(A)) = \dim(\mathrm{im}(A^T)) = \mathrm{Rang}(A) \end{aligned}}$$

n: dim (Definitionsbereich)

Im(A) finden:

1. Rang r von A bestimmen
2. r lin. unab. Spalten von A bestimmen

Lineare Abbildungen und Skalarprodukte:

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ x \mapsto Ax$
$G: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \ y \mapsto A^T y$

$\mathrm{im}(A)$ und $\mathrm{kern}(A^T)$ spannen $\mathbb{R}^m$ auf
$\langle Az, y \rangle = \langle z, A^T y \rangle, \ \forall z \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$
$\mathrm{im}(A) \perp \mathrm{kern}(A^T)$
$\dim(\mathrm{im}(A)) + \dim(\mathrm{kern}(A^T)) = m$

Fredholm Alternative:

$Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des adjunkten Systems $A^T y = 0$ steht

Lineare Selbstabbildung:

$x \mapsto F(x)$, heisst invertierbar, falls $\forall y \in V^n$ ein eindeutiges $x \in V^n$ existiert mit $F(x) = y$
$x \mapsto Ax$ ist invertierbar $\Leftrightarrow A$ regulär $\Leftrightarrow F^{-1}$ ist linear $\Leftrightarrow F^{-1}(x) = A^{-1}x$

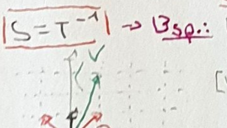
Koordinatentransformation / Basiswechsel:

$$\boxed{[v]_{B'} = \underbrace{([b_1]_{B'} \cdots [b_n]_{B'})}_{\text{Übergangsmatrix } T} [v]_B}$$

$$[v]_B = \underbrace{([b'_1]_B \cdots [b'_n]_B)}_{S} [v]_{B'}$$

$\boxed{S = T^{-1}}$ → **Bsp.:** $B = (b_1, b_2) = (e_1, e_2)$
$B' = (b'_1, b'_2) = (e_1 + e_2, e_2 - e_1)$

$$[v]_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[v]_{B'}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$



Zusammenhang Darstellungsmatrix / Übergangsmatrix:

$[F]_B$: Darstellungsmatrix von F bzgl. der Basis B
$[F]_{B'}$: Darstellungsmatrix von F bzgl. der Basis B'
T: Übergangsmatrix von B nach B'
S: Übergangsmatrix von B' nach B

$$\begin{tikzcd}
{[v]_B} \arrow[r, mapsto, "F"] \arrow[d, "T"] & {[F]_B [v]_B} \arrow[d, "T"] \\
{T[v]_B = [v]_{B'}} \arrow[r, mapsto, "F"] & {[F]_{B'} [v]_{B'} = T[F]_B [v]_B}
\end{tikzcd}$$

$$[F]_{B'} T [v]_B$$

$$\boxed{[F]_B = \underbrace{T^{-1}}_{S} [F]_{B'} \underbrace{T}_{S^{-1}}} \quad \boxed{[F]_{B'} = \underbrace{T}_{S^{-1}} [F]_B \underbrace{T^{-1}}_{S}}$$

Bsp.: gleiche Basis wie zuvor
$[F]_B = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ $[F]_{B'} = S^{-1}[F]_B S$
$= 1/2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bsp.: Kern und Bild $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$
$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ x \mapsto Ax$
→ Was ist n, m? → $n = 4, m = 3$
→ Basis vom Bild von A:
$\xrightarrow{\text{Gauss}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Rang $= 2 = r$
→ r beliebige lin. unab. Spalten von A auswählen

Ähnlichkeit bei Darstellungsmatrizen:

linear
$F: V^n \to V^n$: Darstellungsmatrizen von F bzgl. verschiedener Basen sind ähnlich
→ Darstellungsmatrizen bzgl. Eigenbasis sind diagonal
→ Übergangsmatrix von B nach B' ist die Darstellungsmatrix der Identitätsabbildung

Bsp.: Projektion entlang einer Gerade
$P: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ entlang von $(1, 1, 1, -2)^T$ auf den Unterraum mit $x_4 = 0$

$$P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \to \alpha = 1/2 \to P_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quadratische Form:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, symmetrisch   → quadratisches Polynom in den Variablen $x_1, \dots, x_n$

$$\boxed{q_A(x) = \langle x, Ax \rangle = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}$$

Bsp.: $q(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1 \to A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

rein quadratisch: (Normalform)

es treten keine Mischterme $x_1 x_2$ auf

Bsp.: $x^T A x = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$

Hauptachsentransformation:

$\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ Standardbasis in $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{B} = (t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(n)})$ orthonormale Eigenbasis von A
$T = ([t^{(1)}]_{\mathcal{E}} \dots [t^{(n)}]_{\mathcal{E}})$ Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$
$\underbrace{[x]_{\mathcal{E}}}_{x} = T \underbrace{[x]_{\mathcal{B}}}_{y} \to x = Ty$ $T^{-1}AT = D$; $T^{-1} = T^T$

$$\boxed{q_A(x) = x^T A x = y^T T^T A T y = y^T D y = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2}$$

→ rein quadratische Form
→ $\mathcal{B}$ ist das Hauptachsensystem der quadratischen Form q_A
→ T muss orthogonal sein

1.) EW und EV von A finden
2.) T aus EV orthogonal wählen
3.) $x = Ty$ (eventuell einsetzen)
4.) $q_A(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$ → $T^T A T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Kegelschnitt:

Niveaulinie $\{x \in \mathbb{R}^2 : q_A(x) = 1\}$ für eine symmetrische 2×2 Matrix ist ein Kegelschnitt
→ Hauptachsentransformation durchführen, um mit der rein quadratischen Form zu arbeiten

Quadrik:

Niveaufläche $\{x \in \mathbb{R}^3 : q_A(x) = 1\}$ für eine symmetrische 3×3 Matrix ist eine Quadrik

Bemerkungen:

- Manchmal muss nach einer Hauptachsentransformation noch quadratisch Ergänzt werden, was einer Translation entspricht
- Nach einer Hauptachsentransformation muss der Kegelschnitt im neuen Koordinatensystem, bei dem die orthonormalen EV von A die Achsen sind, eingezeichnet werden

Maximum von quadratischen Formen:

Maximum der Menge $\{q_A(x) : \|x\| = 1\}$
→ $\|x\|_2 = \|Ty\|_2 = \|y\|_2$

$$\max_{\|x\|_2 = 1} q_A(x) = \max_{\|y\|_2 = 1} q_A(y) = \max_{\|y\| = 1} \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 = \max_{1 \le i \le n} d_i$$

→ Analogie Notenmaximierung durch beliebiges Platzieren der Notengewichtung

Bsp.: Quadratische Form / Hauptachsen-transformation
Quadratische Form $q(x)$ mit $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, Kegelschnitt Q mit
$Q = q(x) + a^T x = 0$; $a = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$
→ Transformieren Sie den Kegelschnitt durch eine Hauptachsentransformation.

1) EW von A: $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$
→ $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 7$
2) EV von A: $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $E_7 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Gram-Schmidt)
3) $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ → normalisiert → senkrecht, da A symmetrisch
4) $Ty = x$ in die Kegelschnittgleichung setzen
$q(Ty) + a^T Ty = (Ty)^T A (Ty) + a^T Ty = y^T \underbrace{T^T A T}_{\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)} y + a^T Ty$
$= 2y_1^2 + 7y_2^2 + \frac{20}{\sqrt{5}} y_1 = 0$ → $4\sqrt{5}\, y_1$
5) quadratisch ergänzen:
$2(y_1 + \sqrt{5})^2 + 7y_2^2 - 10 = 0$
$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \to \frac{z_1^2}{5} + \frac{7z_2^2}{10} = 1$
→ Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{10/7}$ in z-Koordinaten

Hauptachsen einer Quadrik:

- Hauptachsen sind parallel zu einem EV
  → nur die Richtung ist relevant
  → beliebig skalierbar
- schneiden $\hat{=}$ $q(v) = a$ hat eine Lösung
  → v ist ein EV → $Av = \lambda v$ → $q(v) = v^T A v = v^T \lambda v = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2 = a$ hat
- schneiden $\hat{=}$ für welche EV $q(v) = \lambda \|v\|^2 = a$ eine Lösung

Bsp.: $q(x) = x^T \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x = 9$

→ Welche Hauptachsen schneiden die Quadrik?
→ EW → $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -3$
$\|v\|^2 = \frac{9}{\lambda}$ muss eine Lösung haben
$\lambda = -3$ → keine Lösung, $\lambda = 2, 3$ hat eine Lösung

Lokale Extrema:

Signatur (p, n, z) von A:

A ist symmetrisch, $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$
p: # positive EW; n: # negative EW
$z = m - n - p$ → alg. Vf. des EW 0
m: # Zeilen = # Spalten

Trägheitssatz von Sylvester:

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ symmetrisch, $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ regulär
Signatur(A) = Signatur$(W^T A W)$

$$W^T A W = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{z})$$

Definitheit:

Die quadratische Form $q(x) = x^T A x$ respektive die Matrix A heisst:
positiv definit $\Leftrightarrow q_A(x) > 0 \ (\forall x \neq 0) \Leftrightarrow$ alle EW > 0
negativ definit $\Leftrightarrow q_A(x) < 0 \ (\forall x \neq 0) \Leftrightarrow$ alle EW < 0
indefinit $\Leftrightarrow q_A(x)$ positiv und negativ $\Leftrightarrow \pm$ EW
positiv semidefinit $\Leftrightarrow q_A(x) \geq 0 \ (\forall x) \Leftrightarrow$ alle EW ≥ 0
negativ semidefinit $\Leftrightarrow q_A(x) \leq 0 \ (\forall x) \Leftrightarrow$ alle EW ≤ 0

Folgerungen:

$D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ positiv definit $\Leftrightarrow$ alle $\alpha_i > 0$
$A = A^T$ positiv definit $\Leftrightarrow W^T A W$ positiv definit, $\forall W$ regulär

Kriterium von Hurwitz:

$A = A^T$ positiv definit $\Leftrightarrow$ $\forall$ Hauptuntermatrizen H_i: $\det(H_i) > 0$

$$\begin{array}{c} H_1 \quad H_2 \qquad\qquad H_n \\ \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \end{pmatrix} \end{array}$$

Extrema:

$\mathrm{grad}\, F(a) = 0$; Hesse Matrix $H_F(a) = \left(\frac{\partial^2 F(a)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{ij}$
$H_F(a)$ positiv definit ⇒ a ist ein lokales Minimum
$H_F(a)$ negativ definit ⇒ a ist ein lokales Maximum
$H_F(a)$ indefinit ⇒ a ist ein Sattelpunkt

Ausgleichsrechnung und QR-Zerlegung:

Fehlergleichung:

$\boxed{Ax - c = r}$ ⊳ Residuenvektor (Messfehler)

↳ gemessene Werte

↳ tatsächliche Werte

↳ Zusammenhänge zwischen den Werten

Methode der kleinsten Quadrate

$\|r\|_2 = \|Ax - c\|_2$ ⊳ minimal

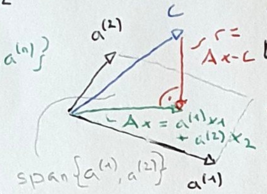
$\|r\|_2 = \text{minimal}$

$\iff r \perp \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$

$\iff A^T r = 0$

$\iff A^T(Ax - c) = 0$

$\iff A^TAx = A^Tc$



Normalgleichung:

$\boxed{A^TAx = A^Tc}$

Lösungen des Minimalproblems $\|Ax - c\|_2 \stackrel{!}{=} \min$ stimmen mit den Lösungen der Normalgleichung überein

Lösung eindeutig $\iff \text{Rang}(A) = n$ ($= \dim(x)$)

Bsp.: Winkel eines Dreiecks

Messwerte: $\alpha = 31°, \beta = 62°, \gamma = 90°$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 31 \\ 62 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 31 \\ 62 \\ 90 \end{pmatrix}$

$Ax - c = r$ $\quad A^Tc = \begin{pmatrix} 121 \\ 152 \end{pmatrix}$

$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121 \\ 152 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 30° \\ x_2 = 61° \end{matrix}$

QR-Zerlegung:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n; \; Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonal

⊳ weil orthogonal

$\|r\|_2 = \|Q^T r\|_2 = \|Q^T(Ax - c)\|_2 = \|\underbrace{Q^TA}_{R}x - \underbrace{Q^Tc}_{d}\|_2$

$\boxed{A = QR \mid Q^Tc = d}$ $\quad s$

$\|r\|_2 = \text{minimal} \iff \|s\|_2 = \text{minimal}$

$R \cdot x - d = s$

$\begin{pmatrix} R_0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix}$

⊳ R_0 ist eine obere Dreiecksmatrix

$\text{Rang}(A) = n$

$\iff R_0$ regulär

$\iff \text{Rang}(R_0) = n$

$\|s\|_2^2 = \|s_0\|_2^2 + \|s_1\|_2^2 = \|R_0x - d_0\|_2^2 + \|d_1\|_2^2 \stackrel{!}{=} \min$

unabhängig von x

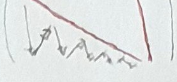
Vorgehen:

⊳ Lösung von $\|Ax - c\|_2 \stackrel{!}{=} \min$

1) QR-Zerlegung von A ⊳ $R = Q^TA$
2) $d = Q^Tc$
3) $R_0 x = d_0$ (Lösung durch Rückwärtseinsetzen)
4) Der Wert des Minimums ist $\|d_1\|_2$, wobei d_1 die unteren $m-n$ Zeilen sind (des Residuenvektors)

Strategie, um Q zu finden

⊳ Mache nach und nach in den Spalten unter der Diagonalen alle Einträge zu 0



Bsp.: QR-Zerlegung

$\begin{array}{c} 1 \to \\ \\ 3 \to \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}}_{U_{31}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ -\sin\varphi + \cos\varphi & * \end{pmatrix}$

$1\uparrow \quad 3\uparrow$ ↳ Position 3,1 ↳ $= 0$

$-\sin\varphi + \cos\varphi = 0 \to \varphi = \pi/4$

$U_{31}^T A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = A_1$

$\begin{array}{c} \\ 2 \to \\ 3 \to \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \\ 0 & -\sin\psi + \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$2\uparrow \quad 3\uparrow$ ↳ $a_{3,2}$ ↳ $= 0$

$-\sin\psi + \frac{\cos\psi}{\sqrt{2}} = 0 \to \sin\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$U_{32}^T A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{R} = \underbrace{U_{32}^T U_{31}^T}_{Q^T} A$

Regression:

Lösung der Normalgleichung:

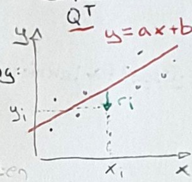
$a = \frac{\langle x - e\bar{x}, y - e\bar{y} \rangle}{\|x - e\|^2}$

↳ Vektor der x-Komponenten

$b = \bar{y} - a\bar{x}$ $\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\langle e, x \rangle; \; \bar{y} = \frac{1}{n}\langle e, y \rangle$

$y = ax + b$ ⊳ Mittelwerte der Daten x_i, y_i

⊳ Regressionsgerade geht durch den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ ⊳ $e = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$



Givens Rotationen:

⊳ Drehung um die x-Achse

$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

⊳ Drehung um die y-Achse

$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$

⊳ Drehung um die z-Achse

$R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⊳ Drehsinn: Rechte-Hand-Regel (von der Spitze des Vektors, um den gedreht wird)

Kurven und Flächen:

Normalform für Kegelschnitte:

⊳ $\text{Rang}(A) = 2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Kreis/Ellipse

⊳ Steigung Asymptote: $\pm \frac{b}{a}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Hyperbel

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ leere Menge

$x^2 + b^2y^2 = 0$ Punkt ↳ Nullstellen $= \pm a$

$x^2 - b^2y^2 = 0$ sich schneidendes Geradenpaar

⊳ $\text{Rang}(A) = 1$ ↳ nach y auflösen

$x^2 - cy = 0$ Parabel

$x^2 - a^2 = 0$ paralleles Geradenpaar

$x^2 + a^2 = 0$ leere Menge

$x^2 = 0$ Gerade

Normalform für Quadriken:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Ellipsoid

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ einschaliges Hyperboloid

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ zweischaliges Hyperboloid

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - cz = 0$ hyperbolisches Paraboloid ⊳ Pass

Lineare Differentialgleichungen:

Homogene lineare DGL 1. und 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

DGL	$y' = ay$	$y'' = -a^2y$
Allg. Lsg.:	$y(x) = Ce^{ax}$	$y(x) = C_1\cos(a_1x) + C_2\sin(a_2x)$
Spez. Lsg.:	$y(x) = e^{ax}y_0$	$y(x) = y_0\cos(a_1x) + y_0\sin(a_2x)$

⊳ AWP mit $y(0) = y_0$ und $y'(0) = y_0$

⊳ Die Lösungsmenge $\{y \in C^1 : y' = ay\}$ ist ein eindimensionaler UR von C^1

Homogene lineare Systeme von DGL 1. und 2. Ordnung mit konst. Koeff.:

$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \dots + a_{1n}y_n(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + a_{22}y_2(x) + \dots + a_{2n}y_n(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \dots + a_{nn}y_n(x) \end{cases}$

⊳ AWP mit $Y(0) = Y_0$

→ $\boxed{Y'(x) = AY(x)}$ ⊳ $\boxed{Y(x) = e^{Ax}Y_0}$

⊳ Lösungsmenge $\{Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \Rightarrow Y' = AY\}$ ist ein n-dimensionaler VR, aufgespannt von den Spalten der Matrix e^{Ax}

⊳ A diagonalisierbar:

$T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$

⊳ $Y = e^{Ax}Y_0 = T\,\text{diag}(e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x})T^{-1}Y_0$

⊳ Kochrezept: (2. Ordnung)

- Substitution: $y = Tz$ ($y' = Ay \iff Tz' = ATz \iff z' = T^{-1}ATz = Dz$)
- Berechne y mit $y = Tz$
- Anfangsbedingungen einsetzen

⊳ Lösungsformel: (1. Ordnung)

$\boxed{y(x) = C_1e^{\lambda_1 x}v_1 + \dots + C_ne^{\lambda_n x}v_n}$

⊳ mit λ_i EW, v_i EV, C Konstante

Bsp.: DGS 1. Ordnung

$y' = Ay, \; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \; y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

1.) EW: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$

2.) EV: $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y(x) = C_1e^{0x}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{x}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_3e^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.) AWP: LGS $TC = y_0$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$y(x) = \begin{pmatrix} -1 + 1e^x \\ 1 + e^x \\ 2 - e^x \end{pmatrix}$ ⇒ T: Spalten bestehen aus den EV von A

Homogene lineare DGL höherer Ordnung

⊳ Rückführung auf ein DGS 1. Ordnung

$\boxed{y^{(n)} = a_0y + a_1y' + a_2y'' + \dots + a_{n-1}y^{(n-1)}}$

⊳ Substitution:

$y_0 := y$
$y_1 := y'$
$y_2 := y''$
$y_{n-1} := y^{(n-1)}$

$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ a_0y_0 + a_1y_1 + \dots + a_{n-1}y_{n-1} \end{pmatrix}$

$\underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}'}_{Y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}}_{Y}$

⊳ funktioniert auch bei nicht konst. Koeff.

Ableitung von e^{Ax} ↳ nur bis zur n-1-ten Ableitung

$\boxed{\frac{d}{dx}e^{Ax} = Ae^{Ax}}$

Lineare Differentialgleichungen (Fortsetzung):

Inhomogene lineare Systeme

$\underline{Y}'(x) = A(x)\underline{Y}(x) + B(x)$ (I)

$\underline{Y}'(x) = A(x)\underline{Y}(x)$ (H)   ↳ Inhomogenität

↳ zugehörige Homogene System

$\rightarrow y = y_h + y_p \qquad \underline{Y}: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\rightarrow \forall a_0 \in (a,b), \forall c = \mathbb{R}^n$ existiert eine eindeutige Lösung mit $\underline{Y}(a_0) = c$

Lösungsraum von (H) – S_H:

$\underline{\Phi}_1, \dots, \underline{\Phi}_n$ sind Lösungen von H

$\Leftrightarrow (\underline{\Phi}_1, \dots, \underline{\Phi}_n)$ ist eine Basis von S_H

$\Leftrightarrow \forall x \in (a,b)$ gilt: $(\underline{\Phi}_1(x), \dots, \underline{\Phi}_n(x))$ ist eine Basis $\mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow \exists x \in (a,b)$ so, dass $(\underline{\Phi}_1(x), \dots, \underline{\Phi}_n(x))$ Basis von $\mathbb{R}^n$

Komplexe Lösungen:

$\underline{Y}$ ist eine komplexe Lösung von (H)

$\Rightarrow Re(\underline{Y})$ und $Im(\underline{Y})$ sind reelle Lösungen von (H)

$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$

$Y_i = e^{a+ib} v_i = e^a \cdot e^{ib} \cdot v_i = e^a[\cos b + i \sin b]\, v_i$

$Y_{i,1} = Re(Y) = e^{at}[\cos bt\, Re(v_i) - \sin bt\, Im(v_i)]$

$Y_{i,2} = Im(Y) = e^{at}[\sin bt\, Re(v_i) + \cos bt\, Im(v_i)]$

Bsp.:

$y_1' = 0 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3$
$y_2' = -2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3$
$y_3' = -4 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 - i \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 + i \\ 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 2 \pm 2i$
$\rightarrow$ komplex konjugiert

$\underline{Y}_{2,1}(t) = Re(\underline{Y}_2(t)) = e^{2t}\left[\cos(2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2t)\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$\underline{Y}_{2,2}(t) = Im(\underline{Y}_2(t)) = e^{2t}\left[\sin(2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2t)\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$\underline{Y}(t) = C_1 \cdot e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\left[(C_2\cos(2t) + C_3\sin(2t))\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - (C_2\sin(2t) - C_3\cos(2t))\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

Lineare DGL höherer Ordnung mit Variablen Koeffizienten

$y^{(n)} - a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \dots - a_0(x)y = b(x)$ (I)

$y^{(n)} - a_{n-1}(x)y^{(n-1)} - \dots - a_0(x)y = 0$ (H)

Spezielle Lösungen des Systems $\underline{Y}' = A\underline{Y}$:

$\boxed{Ay_0 = \lambda_0 y_0}$; y_0 ist ein EV von A zum EW λ_0

$\boxed{y(x) = e^{\lambda_0 x} y_0}$; $\rightarrow$ Lösung von $\underline{Y}' = A\underline{Y}$

Zusammenhang Lösungsräume S_I, S_H:

$\rightarrow \boxed{S_H \cap S_I \text{ ist leer}}$

Bsp.: DGL höherer Ordnung

$y'' = xy + y' + e^x z$
$z'' = y + x^2 y' + \sin(x) z'$

$\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ z' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x^2 & 0 & \sin(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \\ z \\ z' \end{pmatrix}$

$\rightarrow \dim(\text{Lösungsraum}) = 4$

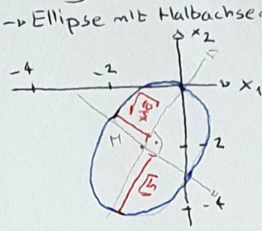
Beispielaufgaben:

Kegelschnitt im ursprünglichen Koordinatensystem skizzieren:

$\frac{z_1^2}{5} + \frac{7z_2^2}{10} = 1 \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$

$x = Ty \qquad T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{10/7}$



1.) Mittelpunkt
$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$
$\rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.) grosse Halbachse
$z = y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\rightarrow$ 2. Halbachse $\perp$ zur 1. Halbachse

Untervektorräume:

$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T\} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$
$V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T\} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$

$u \in U \Leftrightarrow u_1 = u_2 = u_3 \Rightarrow u_1 - 2u_2 + u_3 = 0$
$\Leftrightarrow u \in V \rightarrow U \subset V$

$\rightarrow$ immer prüfen, ob es sich um Unterräume handelt

$\rightarrow$ Jede linear unabhängige Gleichung reduziert die Dimension um 1

$\rightarrow U: x_1 = x_2; x_2 = x_3 \quad \rightarrow \dim(U) = 2$
$\rightarrow \dim(V) = 3$

$\rightarrow$ Alternative: als Matrix schreiben

$Ax = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ← $x_1 - x_2 = 0$ ← $x_2 - x_3 = 0$

↳ $Kern(A) = U$ ↳ $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

↳ $\dim(Im(A)) + \dim(Kern(A)) = n$
$Rang(A) + \dim(Kern(A)) = 2 + \dim(U) = 4$

$\rightarrow U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\rightarrow V = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Basiswechsel nach Gram-Schmidt:

$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} x, \quad e_3 = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} x^2 - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}$

$B = \{1, x, x^2\}$

$\rightarrow$ Koordinaten von B auf die von Gram-Schmidt

$\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} x \\ \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} x^2 - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} \end{array} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{2}} (-1) = \frac{1}{3} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

Aufgaben zu Bild und Kern:

$\rightarrow$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, deren Bild von a_1 und a_2 aufgespannt werden:

$\rightarrow A = (a_1\ a_2\ 0)$ oder $(a_1\ a_2\ u)$
↳ $u \in span\{a_1\ a_2\}$

$\rightarrow$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, deren Kern von a_1 und a_2 aufgespannt wird:

$\dim(Kern(A)) = 2 \rightarrow \dim(Im(A)) = 3 - 2 = 1$
$= Rang(A) = 1$

$\rightarrow$ Vektor, der senkrecht auf a_1 und a_2 steht
$\rightarrow$ Kreuzprodukt: $u = a_1 \times a_2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EV komplexer EW:

$A = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -8 & 4-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$

$-\lambda x_1 + x_2 = 0 \xrightarrow{x_2 = \lambda} x_1 = \frac{\lambda}{\lambda}$

$E_{2+2i} = span\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2+2i} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \frac{2-2i}{4+4} \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1-i \\ 4 \end{pmatrix}$

Inhomogenes DGLS:

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ↳ Inhomogenität

$\rightarrow y' = 0 \rightarrow$ stationäre Lösung

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Gauss

senkrechte Unterräume:

$U = span\{(1,0,1,0)^T, (2,2,2,1)^T\}$
↳ Unterraum von $\mathbb{R}^4$

$U^\perp$: alle Vektoren, die $\perp$ auf U sind

$U = im(U) \perp kern(U^T)$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow x_1 = -x_3$
$\rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} x_4$

$U^\perp = span\{(1,0,-1,0)^T, (0,1,0,-2)^T\}$

Umformungen:

$A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$\rightarrow Av = av$ und $Bv = bv$

$\rightarrow ABv = A(bv) = bAv = bav = abv$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = 0$

$e^A = \mathbb{I}_3 + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Nützliches:

Inverse berechnen:

→ 2×2:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

→ 3×3:

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$

Koordinatenvektor bzg. ONB:

ONB: $\{b_1, b_2, b_3\}$, Vektor w

$(\langle w, b_1\rangle, \langle w, b_2\rangle, \langle w, b_3\rangle)^T$

Permutationsmatrix:

→ Vertauschungsmatrix
→ in jeder Zeile/Spalte ist genau ein Eintrag 1, alle anderen sind 0

Quadratische Form: (3×3)

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ $\quad a x_1^2 + d x_2^2 + f x_3^2 + 2b x_1 x_2 + 2c x_1 x_3 + 2e x_2 x_3$

EW von Dreiecksmatrizen:

EW sind Diagonalelemente

invertierbar:

alle EW müssen $\neq 0$ sein

EW und EV:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2 \rightarrow (0,1,0,0)$; $\lambda_2 = 1 \rightarrow (1,-1,1,1)$; $\lambda_{3,4} = 0 \rightarrow (0,0,1,0), (0,0,0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2 \rightarrow (1,1,0,0)$; $\lambda_2 = 1 \rightarrow (1,0,0,0)$; $\lambda_{3,4} = 0 \rightarrow (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda_1 = 2 \rightarrow (-1,-1,0,0)$; $\lambda_2 = 1 \rightarrow (1,0,0,0)$; $\lambda_{3,4} = 0 \rightarrow (0,0,1,0), (0,0,0,1)$

Skalarprodukt:

$\langle x, y\rangle := x^T A y, \quad A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

→ A muss symmetrisch und positiv definit sein

Drehmatrix: $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

→ R ist orthogonal
→ min. ein EW ist 1
→ EW können komplex sein
→ alle EW $\neq 0$

Inverse Diagonalmatrix:

→ Einträge auf der Diagonalen invertieren $\quad D = \mathrm{diag}(-1, 1, 3)$, $D^{-1} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1/3)$

Invertierbare Matrix:

$\det(A) = \det(A^n) \neq 0$

$\ker(A) = \ker(A^n)$

$\mathrm{im}(A) = \mathrm{im}(A^n)$

EW vom Vielfachen einer Matrix:

$B = -2A$

A: EW → 0, −1, −2

B: EW → 0, 2, 4