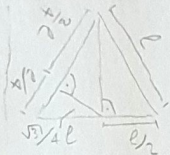


• Trigonometrie:

Grad	0°	30°	45°	60°	90°
Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan \alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\vec{v} = \vec{s} \cdot \vec{e} \quad \vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$s = |\vec{v}| = v$$



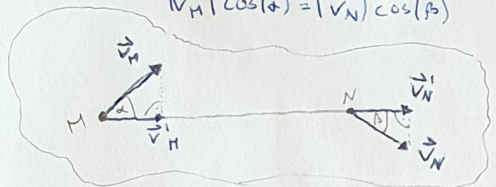
• Koordinatentransformation:

Kartesisch	Zylindrisch	sphärisch
x	$= \rho \cos(\varphi)$	$= r \sin(\theta) \cos(\varphi)$
y	$= \rho \sin(\varphi)$	$= r \sin(\theta) \sin(\varphi)$
z	$= z$	$= r \cos(\theta)$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	$= \rho$	$= r \sin(\theta)$
$\arctan(y/x)$	$= \varphi$	$= \varphi$
z	$= z$	$= r \cos(\theta)$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$= \sqrt{\rho^2 + z^2}$	$= r$
$\arctan(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z})$	$= \arctan(\rho/z)$	$= \theta$
$\arctan(y/x)$	$= \varphi$	$= \varphi$

• Satz der projizierten Geschwindigkeiten:

$$\vec{v}'_M = \vec{v}'_N \quad \vec{v}_M \cdot \vec{MN} = \vec{v}_N \cdot \vec{MN}$$

$$|\vec{v}_M| \cos(\alpha) = |\vec{v}_N| \cos(\beta)$$



• materieller Punkt / Bewegung:

	Ortsvektor $\vec{r}$	Geschwindigkeit $\vec{v}$
Kart.	$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$
Zylindr.	$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$	$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$
Sphär.	$\vec{r} = r\vec{e}_r$	$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

• Translation:

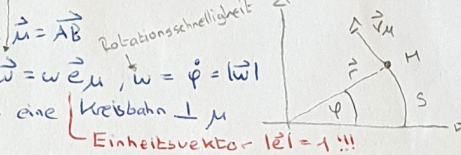
$$\vec{v}_M = \vec{v}_N$$

$$\vec{\omega} = \vec{0}$$

• Rotation:

min 2 Punkte in Ruhe
 Rotationsachse μ , $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_\mu$, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
 alle $P \notin \mu$ beschreiben eine Kreisbahn $\perp \mu$

Winkelgeschwindigkeit / Rotationsgeschwindigkeit



• Kreisbewegung:

1 Punkt in Ruhe
 momentane Rotation um
 eine momentane Rotationsachse

$$\vec{e}_\mu = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}$$

• Allgemeine Bewegung / Schraubung:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{BA}$$

→ Zentralachse ξ

$$\vec{v}_z = \vec{v}_w = (\vec{v}_B \cdot \vec{\omega}) \cdot \vec{\omega} \cdot \frac{1}{(|\vec{\omega}|)^2}$$

$$\vec{v}_w = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{Bz}$$

→ Abstand zur Zentralachse

$$d_{H2} = \frac{|\vec{v}_B \perp \vec{\omega}|}{|\vec{\omega}|}$$

$$\vec{v}_B \cdot \vec{\omega} = 0$$

• $\vec{\omega} = \vec{0}$ → reine Translation

• $\vec{v}_B = \vec{0}$ → momentane Rotation um μ , $B \in \mu$

• $\vec{v}_B \perp \vec{\omega}$ → momentane Rotation um μ , $B \notin \mu$

→ $\vec{v}_B \cdot \vec{\omega} \neq 0$: Schraubung

• Beweis SdpG:

$$\frac{d}{dt}(\vec{AB} \cdot \vec{AB}) = 0 \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \text{const} \rightarrow \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 0$$

$$= 2\vec{AB} \cdot \dot{\vec{AB}} = 2(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AB} = 0 \quad \vec{u}(t) = \vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t) \rightarrow \vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 0$$

$$= 2(\vec{v}_B - \vec{v}_A) \cdot \vec{AB} = 0 \quad \vec{u} \cdot \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \times \frac{d\vec{u}}{dt} \right) = 0$$

$$\vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \vec{e}_y - \sin\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_r = \sin\theta \vec{e}_\rho + \cos\theta \vec{e}_z$$

• Kinematik:

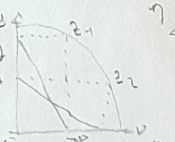
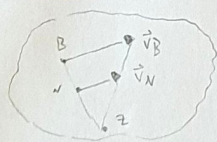
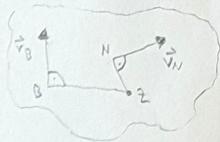
$$\{\vec{v}_B, \vec{\omega}\}$$

→ Translationsgeschw.
 → Rotationsgeschw.

• Momentanzentrum:

• Gleiten: $v \perp$ zur Berührungsfäche = 0

• Rollen: v im Berührungspunkt = 0



• Ebene Fachwerke:

$$-v = \omega r$$

→ Polbahnen

1. Identifikation aller starren Körper (Dreiecke, Stäbe, Platten)

2. Identifikation der Lagerungen (drehbar/verschiebbar)

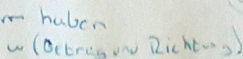
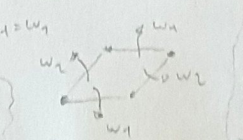
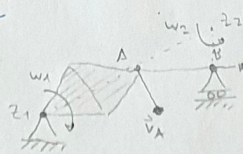
3. w_1 und z_1 bestimmen $w_2 = w_1$; $z_2 = z_1$

→ Satz vom Momentanzentrum

→ $v = \omega r$

→ SdpG

→ parallele Stäbe im Parallelogramm haben die gleiche Rotationsgeschwindigkeit ω (Betrag und Richtung)



Kräfte:

- punktgebundener Vektor $\{A, \vec{F}\}$
- Wirkungsline, Richtung, Angriffspunkt
- Betrag $[N] = kg \cdot m/s^2$
- Ursache für Beschleunigung, Deformation

Reaktionsprinzip:

Jede Aktiv erzeugt eine Reaktion

Kontaktkraft:

Wechselwirkung durch Berührung,
Angriffspunkt im gleichen Ort,
z.B.: Reibung, Normalkraft

Fernkraft:

Wechselwirkung ohne Berührung,
Angriffspunkt im Schwerpunkt,
z.B.: Gravitations-/Lorenzkraft

Innere Kraft:

Reaktion innerhalb des betrachteten Systems

Aussere Kraft:

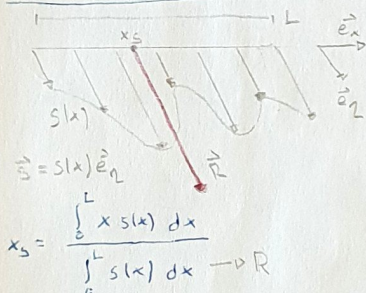
Reaktion ausserhalb des betrachteten Systems

- SK: Kräfte dürfen entlang ihrer Wirkungsline verschoben werden

- Resultierende $\vec{R} = \sum \vec{F}_i = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z$
→ keine Kraft, nur Hilfsvektor

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad | \quad \vec{F} = p \cdot \vec{A}$$

Linienverteilte Kräfte:



gleichförmige Verteilung:

$$x_s = \frac{L}{2}; \quad R = L \cdot s_0; \quad s(x) = \frac{ZF}{L}$$

Dreiecksverteilung:

$$x_s = \frac{2L}{3}; \quad R = \frac{L \cdot s_0}{2}$$

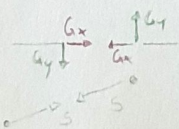
Aufgaben der Statik:

- 1.) System abgrenzen/freischneiden
→ Lagerkräfte/-momente einführen
- 2.) Geeignetes Koordinatensystem
→ Koordinatenachsen // zu Lagerreaktionen
- 3.) Statische Bestimmtheit prüfen
→ falls nötig, Systembremsung
- 4.) Gleichgewichtsbedingungen
→ $\vec{R} = 0$
→ $\vec{M}_A = 0$
→ Momentenbedingung, dort wo sich möglichst viele Wirkungslinien schneiden

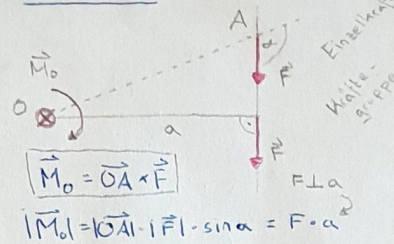
- 5.) Kräfte ermitteln/Diskussion
→ Abheben, Kippen, Einheiten!

Gelenk:

Pendelstabs:



Momente: $[Nm]$



Moment bezüglich einer Achse:

- 1.) System aus der Achsenrichtung betrachten
- 2.) Kräfte verschieben bis $F \perp a \rightarrow M = F \cdot a$
- 3.) Vorzeichen: Rechter Daumen in Achsenrichtung

$$\vec{M}_z = \vec{M}_0 \cdot \vec{e}_z \quad \vec{M}_0 = \sum \vec{OA}_i \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_P = \vec{M}_0 + \vec{R} \times \vec{OP} \quad P = w \cdot M_z$$

Reduktion einer Kräftegruppe:

$\{G\}$ kann immer auf ihre Dynam $\{\vec{R}, \vec{M}_B\}$ reduziert werden

1. Invariante: $\vec{R}$

2. Invariante: $\vec{R} \cdot \vec{M}_B = \vec{R} \cdot \vec{M}_H$

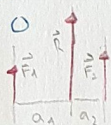
Reduktion auf eine Einzelkraft:

$$\vec{M}^{(R)} = 0 \quad \vec{R} \cdot \vec{M} = 0$$

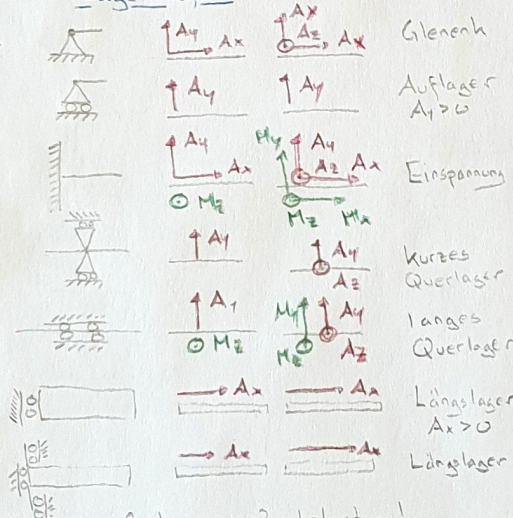
→ // Kräfte mit $\vec{R} \neq 0$

→ Hebelgesetz

$$|\vec{F}_1| \cdot a_1 = |\vec{F}_2| \cdot a_2$$



Lagerkräfte:



→ Selb: nur Zugbelastung!

→ Lager bewirken immer dort eine Kraft/Moment, wo sie eine Bewegung verhindern!

Ideale Fachwerke:

- alle Knoten sind reibungsfreie Gelenke
- Stäbe sind gewichtlos
- Knoten nur am Stabende
- Lasten greifen nur an den Knoten an

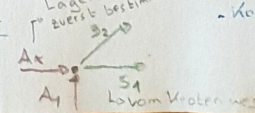
Pendelstütze:

- freigeschnittener Stab aus idealem Fachwerk
- überträgt nur Kräfte in Stabrichtung

$S > 0$: Zug, $S < 0$: Druck

Knotengleichgewicht

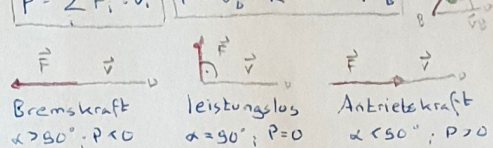
- Knoten freischneiden
- Stabkräfte als Zugkräfte
- Komponentenbedingung



Leistung: $[W] = Nm/s$ (Skalar)

$$P = \vec{F}_0 \cdot \vec{v}_0 \quad | \quad P = \vec{M}_0 \cdot \vec{\omega} \quad P = |\vec{F}_0| |\vec{v}_0| \cos \alpha$$

$$P = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i \quad | \quad P = \vec{v}_0 \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_0$$



Kräftepaar:

- zwei // entgegengerichtete Kräfte

$$\vec{R} = 0 \quad \vec{M} = \vec{A} \times \vec{F} \quad M = b \cdot F$$

Statische Äquivalenz:

$\{G\}$ stat. äqu. zu $\{G^*\}$ falls $P_G = P_{G^*}$
gleichbedeutend zu: $\vec{R} = \vec{R}^*$ und $\vec{M}_0 = \vec{M}_0^*$

im Punkt B für beliebige Punkte C

$$\vec{M}^{(R)} = (\vec{e}_\xi \cdot \vec{M}_B) \cdot \vec{e}_\xi \quad \vec{e}_\xi = \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|}$$

→ Zentralachse ξ : geometrischer Ort aller Punkte, welche die Dynam $\{\vec{R}, \vec{M}^{(R)}\}$ besitzen

$$\vec{M}_z = \vec{M}^{(R)} = \vec{M}_B + \vec{R} \times \vec{Bz} \quad \xi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \vec{R}$$

→ // Kräfte mit $\vec{R} = 0 \rightarrow$ Kräftepaar

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\vec{R} = 0 \quad \vec{M}_0 = 0$$

→ im Allgemeinen noch nicht ausreichend für bleibende Ruhe

→ Standfestigkeit: Lsg. auch für $v = \text{konstant}$

solange die Gleichgewichtsbedingungen eine resultierende Normalkraft liefern, die innerhalb der Standfläche angreift und gegen den Körper gerichtet ist
kleinste konvexe Fläche

Statische Bestimmtheit:

- m : Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen
- n : Anzahl der Bindungen L_0 2D: 3, 3D: 6
→ unbekannte Lagerkräfte und -momente
- $n > m$: (n-m)-fach statisch unbestimmt
→ Systembremsung
- $n = m$: statisch bestimmt
- $n < m$: statisch überbestimmt (Mechanismus)
- $m \rightarrow$ Gleichungen, $n \rightarrow$ Unbekannte

ideale Fachwerke:

$$2D: s + r = 2K \quad 3D: s + r = 3K$$

→ statisch bestimmt

Dreikräftechnitt:

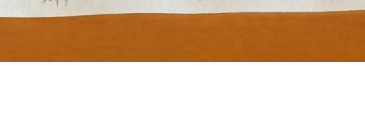
→ Lagerkräfte bestimmen

- Schnitt durch Fachwerken Stelle mit 3 unbekannten Kräften

→ nur 2 Stäbe vom gleichen Knoten
→ Stabkräfte als Zugkräfte

- Momentenbedingung am Schnittpunkt der Wirkungsline von 2 unbekannten Stabkräften

Komponentenbedingung:



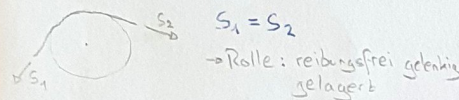
Prinzip der virtuellen Leistung: [Pohl]

Ein System ist in Ruhe, wenn die virtuelle Gesamtleistung aller Kräfte, bei jedem virtuellen Bewegungszustand null ist.

1. Einen Stab entfernen (Stabkraft als Zugkraft)
↳ keine Lagerkräfte brechen
2. Zulässigen virtuellen Bewegungszustand einführen
3. Bestimmung der Geschwindigkeit in den Knoten, in denen Kräfte wirken
↳ SdpG, $v = \omega r$, Parallelogrammregel,
Teilkomponenten
4. $P_{\text{ges}} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0$

Seil:

- Verbindungselement, deformierbar, beliebig biegsam, vernachlässigbare Verlängerung, gewichtslos, Zugkraft
- Form: Gerade, entlang der Wirkungsline
- Reibungsfreie Umlenkung:



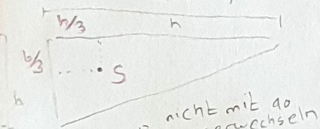
Umlenkung mit Reibung:

- Haften: $S_2 < S_1 e^{\mu \alpha}$
- Gleiten: $S_2 = S_1 e^{\mu \alpha}$
- α = Umschlingungswinkel [rad]
- ⚠ Fallunterscheidung

Schwerpunkt über Teilflächen:

$$x_s = \frac{\sum x_{si} \cdot A_i}{\sum A_i}$$

Schwerpunkt der Teilfläche
↳ Teilfläche
↳ Gesamtfläche



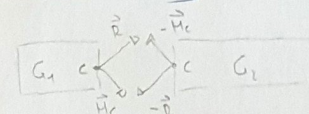
Differentialbeziehungen:

$$\begin{aligned} Q_1' &= -q_1 & Q_2' &= -q_2 \\ M_1' &= -Q_1 & M_2' &= Q_2 \\ M_2'' &= q_1 & M_1'' &= -q_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\int q_1 dx + C_1 \\ M_2 &= -\int Q_1 dx + C_2 \end{aligned}$$

↗ $\vec{e}_2$ ↘
↖ $\vec{e}_1$ ↗

Alternative Bestimmung der Beanspruchung:



↳ Reduktion der Kräftegruppe G_2 auf $L = \vec{r}_{A1}, \vec{r}_{B2}$

2. Diff.-Bez.:

$P_{\text{ges}} = Q_1(x)dx - Q_2(x)dx + q_1 dx = 0$
 $q_1 = -q_1$
 $Q_1' = -q_1$
 $Q_2' = -Q_1$
 $M_1' = -Q_1$
 $M_2' = Q_2$
 $M_2'' = q_1$
 $M_1'' = -q_2$

Reibung:

- Reibungskraft wirkt entgegengesetzt zur (vorussichtlichen) Bewegung
- unabhängig von der Auflagefläche

Haftreibung:

$$|\vec{F}_R| < \mu_0 \cdot N$$

Haftreibungskoeffizient

- ↳ μ_0, μ_1 : dimensionslos
- ↳ μ_2 : [Längeneinheit]

Gleitreibung:

$$|\vec{F}_R| = \mu_1 \cdot N$$

Gleitreibungszahl

Gelenkreibung:

$$\text{Zapfenkraft } \vec{Z}: |\vec{Z}| = \sqrt{A_z^2 + B_z^2}$$

Haftreibungsgesetz:

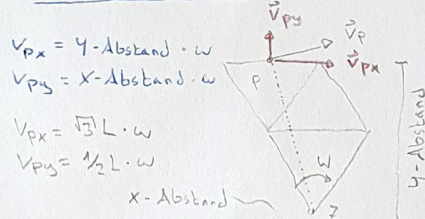
$$|\vec{M}_R| < \mu_0 r_L |\vec{Z}|$$

Lagerradius

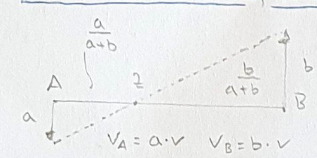
Gleitreibungsgesetz:

$$\begin{aligned} \vec{M}_R &< -\mu_1 r_L |\vec{Z}| \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} \\ \text{Gleitreibungsmoment in Längslager:} \\ M_{RL} &= \frac{2}{3} \mu_1 r_L N \end{aligned}$$

Berechnung von Teilkomponenten der Geschwindigkeit:



Momentenzentrum auf einem Stab:



Lagerart	Symbol	Q	M	N
Auflager		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N = 0$
Festlager		$Q \neq 0$	$M \neq 0$	$N \neq 0$
Einspannung		$Q \neq 0$	$M \neq 0$	$N \neq 0$
Freies Ende		$Q = 0$	$M = 0$	$N = 0$
Gelenk		$Q \neq 0$	$M = 0$	$N \neq 0$

⚠ nur in Bereichen, die integrierbar sind (stetig)
 ↳ nicht über Einzelkräfte, Einzelmomente
 ↳ Bestimmung der Integrationskonstanten aus Rand- und Übergangsbedingungen

Querkraft	Einzelmoment	Einzelkraft	gleichförmige Kraftverteilung	Δ-Verteilung
Spring	Spring	linear/knack	linear	quadratisch
Biegemoment	Spring	linear/knack	quadratisch	kubisch

Körper K mit momentaner Schraubung:

↳ momentane Bewegung vollständig beschreiben

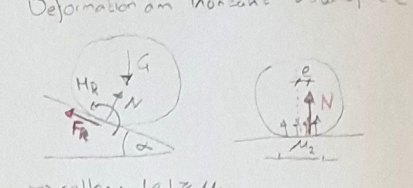
- × $\vec{v}_A$ und $\vec{v}_C$
- × Schnelligkeit in A, D, C
- × beide Invarianten
- ✓ $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ und $\vec{v}_C$
- ✓ Kinematik in A

↳ Strecke im Körper: $[B, C \neq G]$

- × $\vec{v}_A = \vec{v}_B$
- × $\vec{v}_A = \vec{v}_B - \vec{v}_C$
- ✓ $\vec{v}_A \cdot \vec{v}_C = \vec{v}_B \cdot \vec{v}_C = 0$
- ✓ $|\vec{v}_A| = \text{konst.}$
- ✓ $d/dt (\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B) = 0$

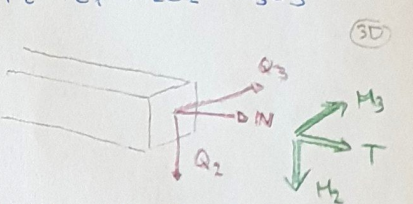
Rollreibung:

- ↳ Körper in Ruhe: $|\vec{M}_R| < \mu_2 |\vec{N}|$
- ↳ Körper rollt: $|\vec{M}_R| = \mu_2 |\vec{N}|$
- μ_2 : Rollreibungszahl
- Deformation am Kontakt ↳ Standfläche

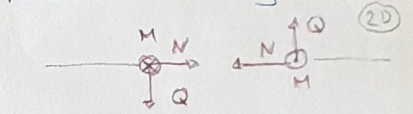


Beanspruchung:

Dyname $\{\vec{R}, \vec{M}_C\}$ der Schnittkräfte
 $\{d\vec{F}_i\}$ im Flächenmittelpunkt C des Querschnitts S_n

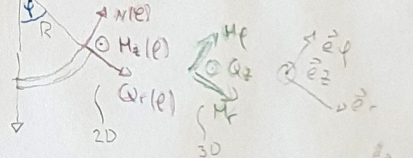
$$\begin{aligned} \vec{R} &= N \vec{e}_1 + Q_2 \vec{e}_2 + Q_3 \vec{e}_3 \\ \vec{M}_C &= T \vec{e}_1 + M_2 \vec{e}_2 + M_3 \vec{e}_3 \end{aligned}$$


N: Normalkraft ↳ $N > 0$ Zug, $N < 0$ Druck
 Q: Querkraft ↳ Schub
 T: Torsion M: Biegemomente

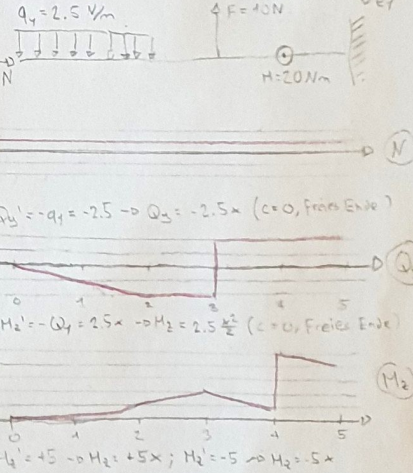


Beanspruchung in kreisförmigen Balken:

↳ Winkel phi einführen



Beanspruchungsdiagramme:



⚠ Achtung Richtung: von links nach rechts

Systemtrennung:

