

Physik II

Welle-Teilchen Dualismus:

Photon:

Energiequantisierung:

- Amplitude der EM-Welle nimmt nur diskrete Werte an

- Energie ist quantisiert

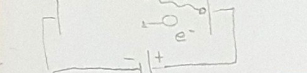
- Energie eines Photons $E = h \cdot \nu$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4.136 \cdot 10^{-15} \text{ eV/Hz}$
Planck'sche Konstante

Photoelektrische Effekt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2 = h\nu - W_{\text{aus}} \quad W_{\text{aus}} = e\phi_A$$

Ausbreitungsarbeit $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Ausbreitungsenergie $\nu = c/\lambda$



- Strahlungsdruck: $P = I/c = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$

- Intensität: $I = \frac{E}{A \cdot \Delta t}$ N : # Photonen A : absorbierte Fläche

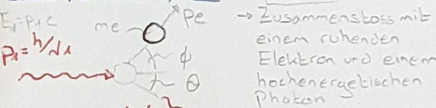
- Impuls des Photons: $p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$

- Zusammenhang: $P = \frac{N \cdot h \cdot \nu}{A \cdot \Delta t}$

Relativistische Energie eines Teilchens:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} \quad m \rightarrow 0: E = pc$$

Compton-Effekt:



- Impulserhaltung: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_e$
Energieerhaltung: $E_1 + E_{e,1} = E_2 + E_{e,2}$

$$p_1^2 = p_2^2 + p_e^2 - 2 p_2 p_e \cos(\theta) \quad p_e^2 = p_1^2 - 2 p_1 p_2 + p_2^2 + 2(p_1 - p_2) m_e c$$

Compton-Wellenlänge:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{1 + E_1/(m_e c^2) (1 - \cos(\theta))}$$

Lauss Kombination von Impuls- und Energieerhaltung als Fkt. der Photonenenergie

$$\lambda_{\text{Compton}} = \frac{h}{m_e c} = 0.00243 \text{ nm}$$

- Wellenlängenverschiebung ist unabhängig von der Ausgangswellenlänge

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_{\text{Compton}} \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{90^\circ}{1 + E_1/(m_e c^2)}$$

Materiewellen:

Merkmale eines Teilchen	Merkmale einer Welle
- eindeutige Energie/Impuls	- zeigt Interferenz & Beugungseffekte
- punktförmig	- räumlich ausgedehnt

De Broglie Beziehung:

- De Broglie Frequenz: $\nu = E_{\text{kin}}/h$

- De Broglie Wellenlänge: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m E_{\text{kin}}}}$

Wahrscheinlichkeitsinterpretation:

Wahrscheinlichkeit $P(x)$, dass das Teilchen am Ort x auftrifft, ist durch das Betragsquadrat der Wellenfunktion gegeben

$$P(x) = |\psi(x)|^2$$

- Normierungsbedingung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

- Erwartungswert:

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \cdot a(x) \psi(x) dx$$

- Standardabweichung:

$$\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

- Bsp.: Ebene Welle

$$\langle x \rangle = 0; \quad \sigma_x = \infty; \quad \langle p \rangle = p; \quad \sigma_p = 0$$

- Impulsoperator:

$$\hat{p}: -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x,t) = p \psi(x,t)$$

- Energieoperator:

$$\hat{E}: i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = E \psi(x,t)$$

Heisenbergsche Unschärferelation:

$$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \hbar/2 \quad \sigma_E \cdot \sigma_t \geq \hbar/2$$

- für das gaussförmige Wellenpaket gilt die Relation exakt

Energieebenen:

Zeitabhängige Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + E_{\text{pot}}(x) \cdot \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

- Wellengleichung für Materie

- "Herleitung":

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E \quad (\cdot \psi(x,t)) \quad E_{\text{kin}} \hat{=} \text{Impuls}$$

$$\frac{p^2}{2m} \psi(x,t) + E_{\text{pot}} \psi(x,t) = E \psi(x,t)$$

- Einsetzen der Operatoren

Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + E_{\text{pot}}(x) \cdot \psi(x) = E \cdot \psi(x)$$

- Wellen mit konstanter Energie

$\omega = E/\hbar \rightarrow$ nur eine Frequenz bestehende Wellen

Teilchen mit Wellenverhalten:

- Freies Teilchen: (z.B. Elektronenstrahl)

- Wellenpaket, ebene Welle, TDSE

- Gebundenes Teilchen: (z.B. Elektron in Atomhülle)

- stehende Wellen, $E_{\text{tot}} = \text{konst.}$, TISE

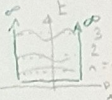
Zusammenhänge Compton-Effekt:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos(\theta)) = \lambda_{\text{Compton}} (1 - \cos(\theta))$$

Teilchen im Potentialtopf:

- gebundenes Teilchen

$$E_{\text{pot}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < x < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$



- TISE:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = E \cdot \psi(x)$$

- Ansatz:

$$\psi(x) = \psi_{0,1} \sin(kx) + \psi_{0,2} \cos(kx)$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

- Randbedingungen:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0; \quad k_n = \frac{\pi}{L} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bestehende Welle einer eingespannten Seite

- Normierungsbedingung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \rightarrow \psi_{0,1} = \sqrt{2/L}$$

- Lösung:

$$\psi_n(x) = \sqrt{2/L} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Energieebenen:

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 n^2}{8mL^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

↳ Quantenzahl

- nur diskrete Energiewerte

- pro Freiheitsgrad eine Quantenzahl

- $n=1$: Grundzustandsenergie, Nullpunktsenergie > 0

- Energieminimumsprinzip: bevorzugt im tiefsten Energiezustand

Beugungseffekte:

- treten auf, wenn das Gitter die gleiche Größenordnung wie die Wellenlänge des Teilchens hat

Unschärfe Unterschied:

$$\Delta p = \hbar \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta \lambda} \right) = \frac{\hbar \Delta \lambda}{\lambda(\lambda + \Delta \lambda)} \approx p \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

Atomphysik:

Bohr'sches Atommodell:

Allgemeines:

- Elektronen sind durch das 3D-Coulombpotential des Atomkerns gebunden $\rightarrow$ kugelsymmetrisch

Kreisbahnbedingung:

$$F_{\text{Coulomb}} = F_{\text{Zentripetal}}$$

$$-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{m_e v^2}{r}$$

Z : Kernladungszahl

Energiebeziehung:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad E_{\text{pot}} = -2E_{\text{kin}}$$

$$E_{\text{pot}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Postulate:

1) Elektronen können sich nur in bestimmten Umlaufbahnen aufhalten $\rightarrow$ muss einem Vielfachen der de-Broglie Wellenlänge entsprechen

2) Umlaufbahnbewegung erfolgt ohne Energieverlust $\rightarrow$ strahlungsfrei

3) Wechselt ein Elektron zwischen 2 Bahnen, so wird Energie von außen auf- oder abgegeben $\rightarrow$ Energieerhaltung

Folgerungen aus den Postulaten:

Elektronenbahnradius:

$$2\pi r_n = n\lambda = \frac{nh}{p_n} \quad n=1,2,3,\dots$$

$$r_n = \frac{n^2}{Z} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} \right) = \frac{n^2}{Z} a_0$$

Radius im Grundzustand

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 0.0529 \text{ nm}$$

$n=Z=1$
→ Bohrradius

Drehimpuls:

→ ganzzahliges Vielfaches

$$L_n = p_n r_n = n \frac{h}{2\pi} = n \hbar = m_e v_n r_n$$

Energie:

$E = E_{kin} + E_{pot}$

$$E_n = -E_{kin} = -\frac{1}{2} m_e v_n^2 = -\frac{1}{2m_e} \left(\frac{L_n}{r_n} \right)^2 = -\frac{1}{2m_e} \left(\frac{n\hbar}{r_n} \right)^2$$

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \left(\frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \right) = -\frac{Z^2}{n^2} E_R$$

E im Grundzustand des H-Atoms:

$$E_R = \frac{me^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} = -\hbar e^2 E_H = 13.6 \text{ eV}$$

R_H : Rydbergkonstante

Zusammenhänge: $\lambda(nm) = \frac{1240}{E(eV)}$

Wellengleichung des Eielektronenatoms:

Schrödingergleichung in Polarkoordinaten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi(r, \theta, \varphi) + E_{pot}(r) \psi(r, \theta, \varphi) = 0$$

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

Lösung:

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} e^{-r/na_0} P_l^{m-1} \left(\frac{r}{na_0} \right) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

radiale Wellenfunktion $R(r)$
L: Laquer-Polyom
winkelabhängige Wellenfunktion $Y_l^m(\theta, \varphi)$

Schlussfolgerungen:

→ Energie hängt nur von der radialen Quantenzahl n

→ Bohr und QM (Schrödinger) liefern die selben Ergebnisse

ψ im Grundzustand:

$$\psi_{100} = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} \cdot e^{-r/a_0}$$

Quantenzahlen des Eielektronenatoms:

	radiale QZ	Drehimpuls QZ	Magnetische QZ
Symbol	n	l	m_l
mögliche Werte	$n=1,2,3,\dots$	$l=0,1,\dots,n-1$	$m_l = -l, -(l-1), \dots, (l-1), l$
assoziierte Polarkoordinate	r → radialer Anteil von ψ	θ → winkelabhängiger Anteil von ψ	φ → Winkel
assoziierte physikalische Größen	Energie: $E_n = -E_R Z^2/n^2$	Drehimpuls: $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$ (Betrag)	Drehimpuls l_z -Komponente: $L_z = m_l \hbar$ Magnetischer Dipol: $m_z = \mu_B m_l$
Merkmale in Wellenfunktion	gleich der Knoten # radial + ebenen	gleich der # Knoten-ebenen	bestimmt die Lage der Knoten-ebenen

Quantenzahlen:

→ pro Raumdimension eine (n, l, m_l)

Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$P(r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin\theta dr d\theta d\varphi |\psi(r, \theta, \varphi)|^2$$

$$= 4\pi r^2 |\psi(r, \theta, \varphi)|^2 = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

→ Wahrscheinlichkeit das Elektron in einem bestimmten Abstand r vom Zentrum zu finden

Orbitalmodell:

Bohr + QM

Maximum der Wahrscheinlichkeitsdichte:

$r = a_0$ für ψ_{100} (H-Atom im Grundzustand)
≠ Erwartungswert → $P = (0|0|0)$

Orbitalsymbole:

$2p_x$	a: Quantenzahl n b: Quantenzahl l c: Quantenzahl m_l	$l=0$ $l=1$ $l=2$ $l=3$	s p d f
--------	--	----------------------------------	--------------------------

Magnetische Quantenzahl

Coulombpotential ist kugelsymmetrisch:

l_z ist irgendeine Richtung

→ Kreisbewegung des Elektrons um den Atomkern entspricht einem Kreisstrom I mit magnetischen Dipol $\vec{m}$

$$\vec{m} = I \pi r^2 \hat{n} = \frac{1}{2} (e) (\vec{r} \times \vec{v}) = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

→ Bohr-Magneton: $\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$

Unterschiede Bohr/Orbital:

- Bohr: nur 1 QZ: l (stehende Wellen)

- keine Entartung bei Bohr

- Grundzustand: Bohr: $L = \hbar$, QM: $L = 0$

Spin: (Eigendrehimpuls)

- Elektronenspin: $S = \sqrt{\frac{3}{4}} \hbar = \sqrt{s(s+1)} \hbar$

l_z -Komponente: $S_z = m_s \hbar = \pm \frac{1}{2} \hbar$

→ $S = 1/2$ (Drehimpulsquantenzahl)

$l_z m_s = \pm 1/2$ (magnetische Quantenzahl)

Pauli-Prinzip: (Spin-Statistik-Theorem)

→ 2 identische Teilchen mit halbzahligem Spin s können nie in allen Quantenzahlen übereinstimmen

→ Elektron: $S = 1/2$ $m_s = \pm 1/2$ ↑↓

→ nur genau 2 Elektronen können sich im selben Zustand (n, l, m_l) befinden

Periodensystem:

n	l	m_l	n^2	n^2
1	0	1s	0	1
2	0	2s	0	1
	1	2p	-1, 0, 1	3
3	0	3s	0	1
	1	3p	-1, 0, 1	3
	2	3d	-2, -1, 0, 1, 2	5
4	0	4s	0	1
	1	4p	-1, 0, 1	3
	2	4d	-2, -1, 0, 1, 2	5
	3	4f	-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3	7

n : Schale

l : Form der Orbitale

m_l : Orientierung der Orbitale

①: # Orbitale in der Unterschale

②: # Gesamtzahl der Orbitale in der Schale

2 Elektronen pro Orbital

Magnetischer Dipol eines Elektrons:

$$m_z = -g_e \frac{e\hbar}{2m_e} m_l \quad m_s = -g_e \mu_B m_s$$

$g_e \approx 2.002$
→ Korrekturfaktor SQT

Absorption & Emission von Licht:

Atomspektren:

→ Absorptions-/Emissionsbedingung eines Atoms: $E_2 - E_1 = E_{photon} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$

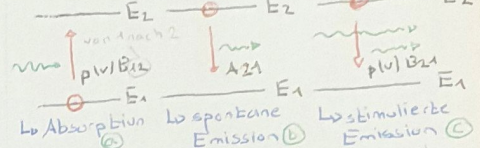
→ Rydbergformel für Eielektronenatome:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H Z^2 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad R_H = \frac{E_R}{hc} = 1.1 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

R_H : Rydbergkonstante

→ $E_2 - E_1 \propto E_{photon}$ → Photonen regen in Festkörpern mehrere Elektronen an

Einstein'sche Koeffizienten:



ein Photon regt die Emission eines weiteren an

→ kinetische Gleichungen:

$$\frac{dN_1}{dt} = -p(\nu) B_{12} N_1 + p(\nu) B_{21} N_2 + A_{21} N_2$$

$$\frac{dN_2}{dt} = p(\nu) B_{12} N_1 - p(\nu) B_{21} N_2 - A_{21} N_2$$

N_1 : # Atome mit E_1 $E_2 > E_1$
 N_2 : # Atome mit E_2 $N_1 + N_2 = N$
 $\Delta N = N_2 - N_1$

→ Einstein'sche Koeffizienten:

$$B_{21} = B_{12} \quad [B_{12}] = \text{J}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-1} \quad [A_{21}] = \text{s}^{-1}$$

→ Energiedichte des EM-Feldes:

$$p(\nu) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \nu^2 \quad |E|: \text{Amplitude des E-Feldes}$$

$p(\nu) \sim N_p \sim \# \text{ Photonen}$

$A(r)$: spektrale Energiedichte des EM-Feld

→ Planck'sches Strahlungsgesetz:

$$p(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3 (e^{h\nu/k_B T} - 1)} \quad N_2 = N_1 e^{-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}} = N_1 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

Laser:

$N_2 \leq N_1$ (Boltzmann-Statistik im Gleichgewicht)

Akronym:

Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Grundprinzip:

→ oberes Energieniveau wird künstlich mit Elektronen aufgefüllt

→ Kettenreaktion von stimulierter Emission

→ Besetzungsinversion: (Laserbedingung)

→ Bedingung für die Kettenreaktion

→ obere Energieniveaus muss mehr Elektronen enthalten als das Untere

→ man braucht min. ein 3-Niveau-System

Dreinevelaser:

→ kinetische Gleichungen:

$$\frac{dN_1}{dt} = \Gamma_B N_p (N_2 - N_1) + \Gamma_A N_2 - R_p N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\Gamma_B N_p (N_2 - N_1) - \Gamma_A N_2 + \Gamma_{32} N_3$$

$$\frac{dN_3}{dt} = R_p N_1 - \Gamma_{32} N_3$$

$\Gamma_A = A_{21}$ $\Gamma_B = B_{21}$
 Γ_{32} ist die Rate des strahlungslosen, schnellen Übergangs von $3 \rightarrow 2$ → $N_3 \approx 0$

R_p : Pumprate
→ Gleichgewicht: $\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0$

$$\frac{dN_1}{dt} = \Gamma_B N_p (N_2 - N_1) + \Gamma_A N_2 - R_p N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\Gamma_B N_p (N_2 - N_1) - \Gamma_A N_2 + R_p N_1$$

Besetzungsinversion bei 3-Niveau Laser:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{R_p - T_A}{2\Gamma_R N_p + R_p + T_A} > 0$$

- $\Delta N = N_2 - N_1 > 0 \quad N \approx N_2 + N_1$
- netto mehr Emission als Absorption
- $R_p > T_A \quad k_3 \ll k_2$

Eigenschaften von Laserlicht:

- kohärent (alle Photonen haben die gleiche Wellenlänge, Frequenz & Phase)

- polarisiert

- räumlich gerichtet

- gaussförmiges Intensitätsprofil

Aufbau:

- Pumpmechanismus: (Energiequelle)

- Stöße zwischen Gasmoleküle - el. Energie
- Anregung durch Blitzlichtlampen
- anderer Laser - chemische Reaktion

Lasermedium:

- Medium, in welchen die stimulierte Emission stattfindet

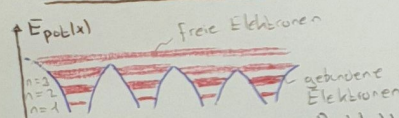
- Kriterien: effiziente stimulierte Emission, schwache spontane Emission, kein radioaktiver Zerfall → Gase, Farbstoffe, Halbleiter

Laserhohlraum (Cavity):

- nicht zwingend nötig
- Laser wird reflektiert und löst wiederholte stimulierte Emission aus (resonante Verstärkung)
- bilden stehende Wellen

Festkörper:

Bändermodell:



- Anordnung der Energiebänder: Bandstruktur

- je höher das ursprüngliche Energieniveau, desto breiter das Energieband

Gebundene Elektronen:

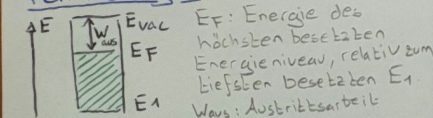
- spüren fast nichts von den anderen Atomen

- geringe Aufspaltung der Energieniveaus

Valenzelektronen: - freie Elektronen

- können sich über den gesamten Festkörper bewegen

Fermienergie:



Festkörper hat M Elektronen

- untersten M/2 sind besetzt

Fermienergie - 1D Kastenpotential:

$$E_F = \frac{\hbar^2 (M/2)^2}{8m_e L^2} = \frac{\hbar^2 M^2}{32m_e L^2} = \frac{\hbar^2 n}{32m_e}$$

$n = M/L$: 1D-Teilchendichte

Fermienergie - 3D Kastenpotential:

$L_x = L_y = L_z = L \quad N \approx \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} N^3 \text{ tot}$

$$N^2_{\text{tot}} = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{3M}{\pi L^3} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left(\frac{3n}{\pi} \right)^{2/3}$$

$n = M/L^3$: 3D-Teilchendichte

- Verteilung von M über 1/8 des

Kugelvolumens

Zustandsdichte:

$$g(E) \sim \frac{N(E + \Delta E) - N(E)}{\Delta E} = \frac{\Delta N}{\Delta E} g(E) F(E)$$

→ 3D:

$$N = \left(\frac{2m E_F}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{8\pi}{n^2}$$

$$g(E) = 4\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

$$n = \int_0^{E_F} g(E) dE = \int_0^{E_F} g(E) F(E) dE$$

Besetzungswahrscheinlichkeit:

- $T = 0$: $F(E) = 1$, falls $E \leq E_F$
 $= 0$, falls $E > E_F$

$$T > 0: F(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T}\right)}$$

Fermi-Dirac-Verteilung

Fermienergie:

Energie, bei der $F(E) = 0.5$ ist

Fermitemperatur:

- $T_F = \frac{E_F}{k_B}$
- Temperatur, bei der das Pauli-Prinzip keine grosse Rolle mehr spielt

Fermigeschwindigkeit:

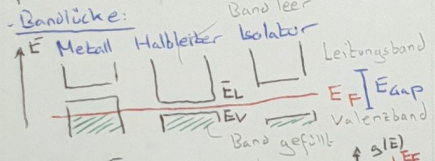
- $v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_e}}$
- beschreibt die Häufigkeit von Zusammenstößen zwischen Elektronen und Gitterkernen

Elektrische Leitfähigkeit:

- durch das E-Feld nimmt die kinetische Energie in Bewegungsrichtung zu

- nur e^- mit $E \approx E_F$ tragen zum Stromfluss bei
- mit E-Feld - ohne E-Feld

Bandlücke:



- Metall: $E_{\text{gap}} = 0$

- Halbleiter: $0 \text{ eV} < E_{\text{gap}} < 4 \text{ eV}$

- E_F liegt zwischen 2 Bändern

- Isolator: $E_{\text{gap}} > 4 \text{ eV}$

- Bandlücke ist gross

Ionisierungsenergie: (IE)

Energie, welche benötigt wird, um das oberste Elektron ins Vakuum zu überführen

- $IE = \chi = W_{\text{aus}}$

- Metall: $IE = \chi = W_{\text{aus}}$

- mit Bandlücke: $IE = \chi + E_{\text{gap}}$

Elektronenaffinität: X

Energie, welche benötigt wird, um das oberste Elektron eines einfach negativ geladenen Atoms / Festkörpers zu entfernen

Elektrische Leitfähigkeit:

Drude-Modell:

Abschätzen der Driftgeschwindigkeit aus der Häufigkeit von Zusammenstößen mit Gitterkernen

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_D = \vec{v}_0 - \frac{e}{m_e} \vec{E} \tau$$

$\vec{v}_0$: Geschwindigkeit nach dem Stoss

$\tau = \langle t \rangle$: mittlere Zeit zwischen 2 Stößen

Mittlere freie Weglänge:

$$\lambda = \langle |\vec{v}| \rangle \tau \approx \langle |\vec{v}_0| \rangle \tau \quad \langle |\vec{v}_0| \rangle = |\vec{v}_F|$$

→ Strecke, die das e^- in der Zeit τ zurücklegt

effektive Ladungsträgerdichte:

$$n_e \sim g(E_F) = \frac{\partial n}{\partial E} \bigg|_{E_F}$$

Spezifische Leitfähigkeit nach Drude:

$$\sigma = \frac{e^2 \tau n_e}{m_e} = \frac{e^2 \tau n_e}{m_e v_F} \propto \frac{e^2 n_e(E_F)}{m_e v_F}$$

Streuung von Leitungselektronen:

Gitterschwingung:

- Potential ist zeitabhängig → Energieverluste

$$\lambda_{\text{osc}} = \frac{v_{\text{ion}}}{\omega_{\text{ion}}} = \frac{1}{n_{\text{ion}} \omega_{\text{ion}}} \quad \omega_{\text{ion}} = \frac{v_{\text{ion}}}{\lambda_{\text{osc}}}$$

$$\lambda_{\text{ion}} = \pi x_0^2 = \pi \frac{\hbar^2}{m_e k_B T} = \frac{\pi \hbar^2 k_B T}{m_e \omega_{\text{ion}}^2}$$

$$\lambda_{\text{osc}} = \frac{m_{\text{ion}} \omega_{\text{ion}}^2}{n_{\text{ion}} \pi \hbar^2 k_B T}$$

k_B : Federkonstante

- ideales Metallgitter: ω -Leitfähigkeit

Fehlstellen:

$$\lambda_{\text{ss}} = \frac{1}{n_{\text{ss}} \lambda_{\text{ss}}} = \frac{1}{n_{\text{ss}} \pi \hbar^2 k_B T}$$

Matthiessen's Regel:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{\text{osc}}} + \frac{1}{\lambda_{\text{ss}}} \quad \rightarrow \text{Addition von Widerständen}$$

Leitfähigkeit nach dem Bändermodell:

$$\sigma = \frac{e^2 n_e}{m_e v_F} \left(\frac{n_{\text{ion}} \pi \hbar^2 k_B T}{m_{\text{ion}} \omega_{\text{ion}}^2} + \frac{n_{\text{ss}} \pi \hbar^2 k_B T}{n_{\text{ss}} \pi \hbar^2 k_B T} \right)^{-1}$$

- σ ist unabhängig vom E-Feld

- σ ist proportional zu $g(E_F)$

- hohe Temperaturen:

- Gitterschwingungen dominieren $\sigma \sim \frac{1}{T}$

- tiefe Temperaturen:

- Störstellen dominieren $\sigma \sim \frac{1}{n_{\text{ss}}}$

- σ : temperaturunabhängig

σ (Halbleiter) $T \downarrow \rightarrow \sigma \downarrow$

Weniger e^- nehmen am Stromfluss teil!

σ (Metall) $T \downarrow \rightarrow \sigma \uparrow$

↳ Gitterionen bewegen sich weniger

Halbleiter:

Leitfähigkeit kann durch Dotierung und Feldeffekte um Größenordnungen ändern

Dotierung:

- Fremdatome einpflanzen mit ± 1 Valenzelektron

- Donator: $\rightarrow e^-$ -Dotierung $\rightarrow n$ -Dotierung

- mehr Valenzelektron $\rightarrow$ gibt ein e^- ab

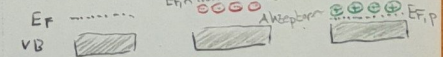
- zusätzliches Leitungselektron

- Akzeptor: $\rightarrow$ hole-dotierung $\rightarrow p$ -Dotierung

- weniger Valenzelektron $\rightarrow$ nimmt ein e^- auf

- gibt ein Loch ab $\rightarrow$ kann man Materialien, die nur bei sehr hohen T leitfähig sind, leitend machen

keine Dotierung n-Dotierung p-Dotierung

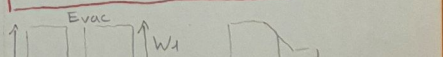


Kontaktpotential:

- Ladungsträger fließen vom Leiter mit der höheren Fermienergie zur tieferen

$$E_{\text{kontak}} = \Delta E = W_2 - W_1 \quad W: \text{Austrittsarbeit}$$

$$U_{\text{kontak}} = \frac{E_{\text{kontak}}}{e} = \frac{W_2 - W_1}{e}$$



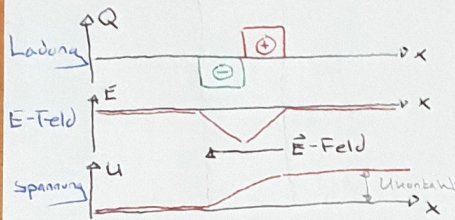
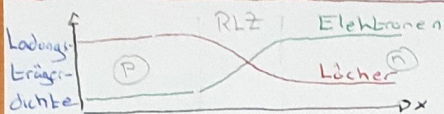
→ ein Loch beschreibt die Gesamtzahl in einem nahezu vollständig gefüllten Valenzband

- Summe aus freien e^- & Löchern ist nicht konstant in einem dotierten Halbleiter

pn-Halbleiterübergang:

- 2 unterschiedlich dotierte Halbleiter erzeugen ein Kontaktpotential

$$E_{\text{Kontakt}} = E_{Fp} - E_{Fn} = e \cdot U_{\text{Kontakt}}$$



- Kontaktpotential wird durch Ladungsträger ausgeglichen
- in der Raumladungszone RLZ rekombinieren die Elektronen mit den Löchern
- keine Ladungsträger → nicht leitend

Diode:

Leitfähigkeit des pn-Übergangs wird durch eine Spannung verändert

→ Vorwärtsspannung (Forward bias)

- positive Spannung an die p-Seite
- Kontaktpotential wird kleiner
- RLZ wird kleiner
- Strom kann fließen
- Rückwärtsspannung: (reverse bias)
- negative Spannung an die p-Seite
- Kontaktpotential wird größer
- RLZ wird größer
- kein Strom kann fließen

→ Durchschlag:

- E-Feld ist so gross, dass der Strom wieder zu fließen beginnt

→ ideale Diode → reale Diode → Zenerdiode



Solarzelle:

- e^- auf der p-Seite wird durch ein Photon vom VB auf das LB angeregt

$$E_{\text{Photon}} = h\nu > E_{\text{Gap}}$$

- in der Nähe des pn-Übergangs wird das e^- durch die Potentialdifferenz auf die n-Seite beschleunigt
- es baut sich eine Spannung auf

Photodiode:

- ähnlicher Aufbau wie die Solarzelle
- zusätzliches anlegen einer Rückwärtsspannung
- schnellere Reaktion auf das absorbierte Photon → direkte Messung der Lichtintensität

Leuchtdiode (LED): light emitting diode

- Inverse einer Photodiode
- anlegen einer Vorwärtsspannung
- es entstehen e^- auf der p-Seite & Löcher auf der n-Seite
- Rekombinieren in der RLZ unter Aussendung eines Photons

$$\lambda = hc / E_{\text{Gap}}$$

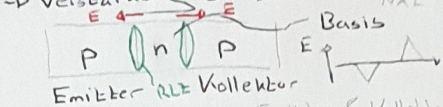
Transistor:

- 2 Halbleiterübergänge (npn / pnp)

- Schalten / Verstärken von el. Strömen

→ Bipolartransistor:

- Verstärkung von Strömen



- Spannung zwischen Emitter & Kollektor
- Spannung an die Basis

- Ladungsträger wandern in den p-Bereich
- Blockade wird aufgelöst

→ Feldeffekttransistor: FET

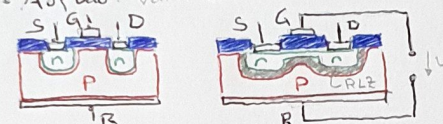
- ein- & ausschalten von Spannungen

Varianten:

- Gate-gesteuerter npn / pnp Übergang
- Gate-gesteuerter nin / pip Übergang
- i: intrinsisch, undotiert

- undotierter Halbleiter: Ladungsträger durch äußeres Feld

Aufbau: Variante 1



S: Source, G: Gate, D: Drain, B: Bulk

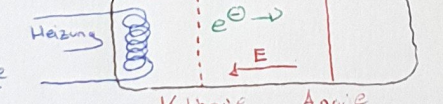
- durch Anlegen einer Spannung zwischen Gate & Bulk entstehen Ladungsträger unterhalb des Gates

- beim Anlegen einer Spannung zwischen Source & Drain fließt nun Strom

- durch das Gate fließt kein Strom

- FET kann stromlos geschaltet werden

Vakuumröhre:



- durch die Heizung entsteht eine Sättigung

Supraleiter:

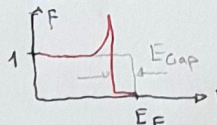
Mikroskopische Erklärung:

→ BCS-Theorie

- Elektronen ziehen sich an, da durch die Gitteratome eine anziehende Kraft entsteht → Cooper-Paar
- Cooper-Paar hat Gesamtspin 0, weil die beiden e^- jeweils entgegengesetzten Spin haben → Pauli-Prinzip gilt somit nicht mehr

→ Besetzung:

- Wahrscheinlichkeit im supraleitenden Zustand:



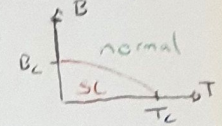
$$E_{\text{Gap}} = 3.52 k_B T_c$$

- ab einer kritischen Feldstärke B_c werden die Cooper-Paare aufgebrochen

- es kann nur eine kritische Stromstärke I_c erreicht werden → erzeugt sonst ein zu starkes Magnetfeld

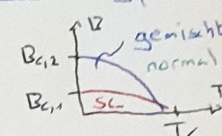
Supraleiter 1. Art: Typ I

- im SC Bereich wird das Magnetfeld komplett aus dem Material verdrängt



Supraleiter 2. Art: Typ II

- im gemischten Bereich bilden sich Flussschläche "vortices"
- zylinderförmige Regionen, in denen die Flusslinien den Supraleiter hindurchlaufen können
- magnetische T-Fluss durch vortices ist $\Phi_0 = h/2e$ → Fluxquantum
- el. Widerstand ist immer noch 0
- # vortices nimmt mit B zu



Elemente ~ oft Typ I

Verbindungen ~ oft Typ II

Hochtemperatursupraleiter: HTCL

Beispiel: YBCO, $T_c = 93^{\circ}\text{K}$

→ Rekord: 130°K

→ flüssiger Stickstoff: $T = 77^{\circ}\text{K}$

Nützliches:

Y	Z	E	P	T
Yotta	Zetta	Exa	Peta	Tera
10^{24}	10^{21}	10^{18}	10^{15}	10^{12}

G	M	k	h	da
Giga	Mega	Kilo	hekto	Deka
10^9	10^6	10^3	10^2	10^1

d	c	m	u	n
Dezi	Zenti	Milli	Mikro	Nano
10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

P	F	a	z	y
Piko	Femto	Atto	Zepto	Yokto
10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}

$$1 \text{ \AA} = 1 \text{ \AA} \text{ngstr\AA}m = 10^{-10} \text{ m}$$

Effektivwert:

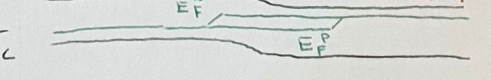
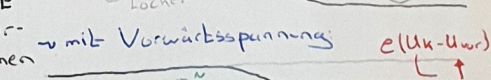
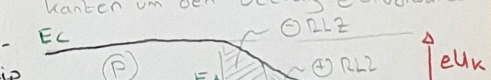
$$\sin^2(\omega t) = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$$

$$\hookrightarrow \sin(\omega t) = 1/\sqrt{2}$$

Bandstruktur von pn-Übergängen:

- eine Vorwärtsspannung reduziert den Potentialunterschied der Valenzbandkanten um den Betrag $eU_{\text{Vorw\AA}rts}$

- mit Vorwärtsspannung $e(U_K - U_{\text{Vorw\AA}rts})$

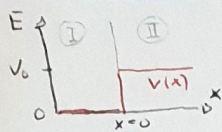


Kugel:

$$\text{Oberfl\AA}che: 4\pi r^2 \rightarrow \text{Volumen: } \frac{4}{3}\pi r^3$$

Beispielaufgaben:

Potentialstufe:



Wellenzahl:

Ansatz: $\psi(x) = A e^{ik_1 x}$ in TISE einsetzen

$$+\frac{\hbar^2}{2m} A k_1^2 e^{ik_1 x} + E_{\text{pot}} A e^{ik_1 x} = E A e^{ik_1 x}$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m} k_1^2 + E_{\text{pot}} = E_{\text{tot}}$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x))}$$

Reflexionsgrad:

einlaufende & transmittierte Welle:
reflektierte Welle:

$$\psi_I = a e^{ik_1 x} + r e^{-ik_1 x} \quad \psi_{II} = t e^{ik_2 x}$$

Stetigkeitsbedingung:

$$\psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0) \rightarrow a + r = t$$

$$\psi_I'(x=0) = \psi_{II}'(x=0) \rightarrow ik_1(a-r) = ik_2 t$$

$$R = \frac{|r|^2}{|a|^2} = \frac{|k_1 - k_2|^2}{|k_1 + k_2|^2}$$

2D-TISE:

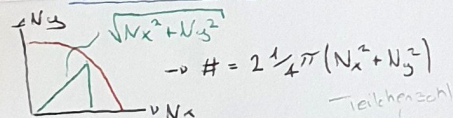
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi(x,y) \right) + E_{\text{pot}}(x,y) \psi(x,y) = E \psi(x,y)$$

Lösung: Separationsansatz: $\psi(x,y) = X(x)Y(y)$

Entartung:

2 unterschiedliche Zustände haben dieselbe Energie

Teilchen mit $E < E_0$ im 2D Potentialtopf:



Fermienergie - 2D Kastenpotential:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8mL^2} \frac{2M}{\pi} = \frac{\hbar^2 2n}{8m\pi} = \frac{\hbar^2 n}{4\pi m}$$

Leiterladungsdichte:

e^- pro Volumen (Valenz- e^-)

Fermi-Dirac-Verteilung:

$$E_2 - E_1 = \ln \left(\frac{1/f(E_2) - 1}{1/f(E_1) - 1} \right)$$

Maxwell-Boltzmann-Verteilung:

$$E - E_F \gg k_B T \rightarrow f(E) \approx e^{\frac{E_F - E}{k_B T}}$$

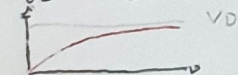
freier Ladungsträger:

e^- mit $E = E_F \rightarrow n_e = N(E_F)$

Bewegungsgleichung e^- :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e\vec{E} - \frac{\vec{p}}{\tau} \rightarrow \text{Gleichgewicht} \quad \vec{p} = m\vec{v}_D = -e\vec{E}\tau$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m_e} \vec{E} - \frac{\vec{v}}{\tau} \rightarrow v(t) = \vec{C} e^{-t/\tau} - \frac{e\tau}{m_e} \vec{E}$$



für sehr kleine Besetzungswahrscheinlichkeit wird das Pauli-Prinzip unwichtig & die e^- können sich ihre Zustände unabhängig voneinander aussuchen

Vereinfachung von Donatoren als wasserstoffähnlich: modifizierter Bohrradius

gültig bis $n_D \approx 1/(a_0^3)$
Da Donatoren beginnen zu überlappen

Austrittsarbeit:

$$\varphi_n = \chi + \delta_n \rightarrow \delta_n = E_C - E_F$$

$$\varphi_p = \chi + E_a - \delta_p \rightarrow \delta_p = E_F - E_V$$

E-Feld in der RLZ berechnen:

Poissonsgleichung

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\Delta}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{e N_D}{\epsilon_r \epsilon_0}$$

Integrieren:

$$E(x) = \frac{e N_D}{\epsilon_r \epsilon_0} x + C_1$$

RR: $E(x=x_n) = 0$

$$C_1 = -\frac{e N_D}{\epsilon_r \epsilon_0} x_n \quad E(x) = -\frac{e N_D}{\epsilon_r \epsilon_0} (x - x_n)$$

$$V(x) = -\int E(x) dx + C$$

$$\textcircled{1}: E(x) = \frac{e N_D}{\epsilon_r \epsilon_0} (x - a + x_{n1})$$

$$\textcircled{2}: E(x) = -\frac{e N_A}{\epsilon_r \epsilon_0} (x - a - x_{p1})$$

Radiale Wahrscheinlichkeit:

$$P(r < R) = \left[\frac{1}{a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right) (a_0^2 + 2ra_0 + 2r^2) \right]_0^R$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{a_0^3} \exp\left(-\frac{2R}{a_0}\right) (a_0^2 + 2Ra_0 + 2R^2) \right]$$

Zustandsdichte $g(E)$:

$$\rightarrow 1D: \quad g(E) = \frac{\sqrt{2m}}{\pi} \frac{2\pi}{\hbar} \quad \rightarrow 2D: \quad g(E) = \frac{4\pi m e}{h^2}$$

$$\int \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$$