

Regelungstechnik

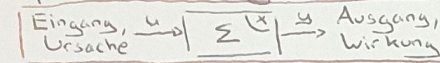
Systemdefinition:

Signal:

Funktion der Zeit, z.B. $u(t), y(t)$

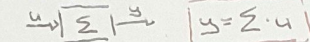
System:

Operator, der ein Signal ändert

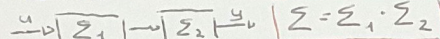


Schaltung von Systemen:

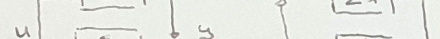
→ direkt:



→ seriell:



→ parallel:



Systemklassifikation:

SISO (Single Input Single Output):

→ genau ein Eingang und ein Ausgang

MIMO (Multiple Input Multiple Output):

→ mehrere Eingänge und Ausgänge

→ $u(t), y(t) \in \mathbb{R}^n, n > 1$

Linearität:

$$\Sigma(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \Sigma(u_1) + \beta \Sigma(u_2)$$

→ linear:

$$y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \alpha \cdot u(t)$$

→ Kausalität:

→ akausal:

abhängig vom Jetzt/

Vergangenheit

$$y(t) = u(t-T), T \geq 0$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

→ alle physikalischen Systeme sind kausal

Dynamik:

→ dynamisch:

enthält Speicher

$\frac{d}{dt}$ oder $\int$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = u(t-T), T \neq 0$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = \cos(u(t))$$

Zeitabhängigkeit:

→ zeitvariant:

Koeff. hängt von t ab

$$y(t) = \sin(t) u(t)$$

$$y(t) = u(t) + t$$

→ zeitinvariant: Koeff. unabhängig von t

$$y(t) = 3 u(t)$$

$$y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

→ Ordnung: # Speichergrößen / Zustandsvariablen

→ höchste Ableitung einer OGL

Bsp.: Klassifizierung von Systemen:

$$\frac{dy(t)}{dt} = a^2 y(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} u(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

→ SISO, ZV, I, D, 1.

$$y(t) = L \sin(u(t)), u(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$$

→ MIMO, ZI, nI, S, 0.

$$\frac{dx(t)}{dt} = t^2 x(t) + b u(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \cos(t) x(t) + d u(t)$$

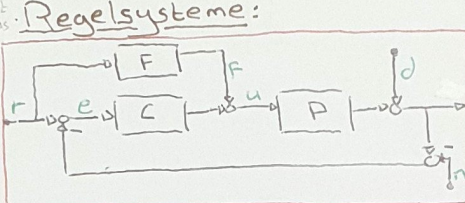
→ SISO, ZV, I, D, 1.

$$\frac{dx(t)}{dt} = M(t)x(t) + N u(t)$$

$$y(t) = O x(t) + P u(t)$$

→ MIMO, ZV, I, D, 1.

Regelsysteme:



r: Sollwert: Position im Raum, Geschwindigkeit

F: Feedforward: basierend auf Erfahrung, Wissen

C: Controller/Regler: Computerchip, Tempomat, Gehirn

D: Plant/Strecke: physikalisches System, das man regeln will → Sign, Motor, Fahrzeug

Aktuator: Bauteile, die die Signale umsetzen

d: Störung: Wind, Steigung, halber Motor

Sensoren: Neigungsmesser, Thermometer

y: Ausgangsgröße, Ist-Wert: aktuelle Position

n: Rauschen: Gänsehaut beim Duschen

e: Regelfehler u: Stellgröße

Gründe für Feedback:

→ Stabilisierung von instabilen Systemen

→ Auswirkungen von Modellierfehler reduzieren

→ Entgegenwirken von nicht-messbaren äußeren Störungen

Aufgaben von Regelsystemen:

→ reference Tracking $r \rightarrow y$

→ Störunterdrückung d

→ Stabilisierung durch Feedback

MIMO Systeme:

outputs > # inputs: Ausgänge

können nicht unabhängig voneinander angesteuert werden

outputs < # inputs: einige Eingänge

sind redundant → zusätzliche Freiheitsgrade können zur Systemoptimierung verwendet werden, beispielsweise Effizienz

Blockdiagramme:

Das ganze System kann für gewisse Werte gegen Unendlich streben, obwohl die einzelnen Blöcke finite Wachstums aufweisen

Unterschied Störung - Rauschen:

→ Störung d wirkt sich direkt auf die Ausgangsgröße aus, Rauschen nicht

→ verst. durch das Messen von y wird das Signal durch den Messfehler n korruptiert → durch Feedback wird n in den Controller zurückgeführt

→ falls C nicht gut designed ist, taucht n im wahren Output auf

Modellierung:

Vorgehen:

1.) Systemgrenzen identifizieren

→ Was gehört dazu?

→ Was sind die Zuflüsse/Abflüsse?

2.) Reservoirs, relevante Speicher identifizieren

→ Masse, Energie, Ladung

3.) Zugehörige Pegelvariablen/level state variable auffinden

4.) OGL für alle Speicher aufstellen

$$\frac{d}{dt} (\text{Speicherinhalt}) = \Sigma \text{Zuflüsse} - \Sigma \text{Abflüsse}$$

5.) Algebraische Relationen zwischen Zu- und Abflüssen als Funktion der Pegelvariablen formulieren

6.) Unbekannte Systemparameter durch Experimente bestimmen

7.) Modell mit neuen Daten validieren

Physik:

→ Energien:

$$\text{Federenergie: } E = 1/2 k(x-x_0)^2$$

$$\text{Kinetische Energie: } E = 1/2 m \dot{x}(t)^2$$

$$\text{Potentielle Energie: } E = m \cdot g \cdot (x-x_0)$$

$$\text{Rotationsenergie: } E = 1/2 I \omega(t)^2$$

→ Kräfte:

$$\text{Federkraft: } F = k(x-x_0)$$

$$\text{Dämpferkraft: } F = d \cdot \dot{x}$$

→ Leistungen:

$$\text{translatorische Leistung: } P = F \cdot \dot{x}(t)$$

$$\text{rotatorische Leistung: } P = M \cdot \dot{\varphi}(t)$$

→ Erhaltungssätze:

$$\text{Impulserhaltung: } \Sigma_i \vec{F}_i^{\text{ext}} = M \cdot \ddot{\vec{x}}_{CM} = \ddot{\vec{P}}$$

$$\text{Drehimpulserhaltung: } \Sigma_i \vec{M}_i^{\text{ext}} = I_B \cdot \ddot{\varphi}$$

$\ddot{\varphi}$: momentane Winkelbeschleunigung

I_B : Trägheitsmoment

Bsp.: Modellierung:

1) Zufluss: Kraft durch den Wind

2) $E = E_{\text{pot, Masse}} + E_{\text{pot, Feder}} + E_{\text{kin, Masse}}$

$$= -m g z(t) + 1/2 k z(t)^2 + 1/2 m \dot{z}(t)^2$$

3) z und $\dot{z}$ sind die Regelvariablen

$$4) \frac{d}{dt} E(t) = -m g \dot{z} + k z \dot{z} + m \dot{z} \dot{z} = -F_{\text{Wind}} \cdot \dot{z} = -F_k(\dot{z} + v(t)) \cdot \dot{z}$$

$$5) m \ddot{z} = m g - k z - F_k(\dot{z} + v(t))$$

→ Alternative: Impulserhaltung

$$m \ddot{z} = F_g - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Wind}}$$

$$= m g - k z - F_k(\dot{z} + v(t))$$

→ Integrale entsprechen Speicher

Variablen Klassifikation:

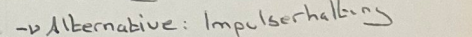
→ algebraisch/schnell

→ reagieren so schnell, dass sie als Funktion f angenommen werden können

→ dynamisch/relevant

→ stabilisch/langsam

→ werden als konstant angenommen



Normierung:

Zustandsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z}(t), v(t)) \quad \vec{z} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$w(t) = g(\vec{z}(t), v(t)) \quad w \in \mathbb{R}$$

$\vec{z}(t)$: Zustandsvektor

↳ physikalische Größen als Spaltenvektor

$v(t)$: Input/Eingang

$w(t)$: Ausgang/Regelgröße

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Anwendung:

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix}$$

↳ Bsp.: Feder

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = \vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix}$$

Gleichgewichtspunkt:

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = 0 \rightarrow \vec{z} = \vec{z}_e = 0 \rightarrow z_{eq}, v_{eq}$$

$$0 = f(z_{eq}, v_{eq}); w_{eq} = g(z_{eq}, v_{eq})$$

Normierungsschritt:

↳ keine Einheiten mehr, ausser Zeit

↳ einfachere Interpretation der Daten

↳ Vorbeugen von numerischen Problemen

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

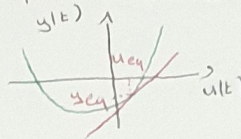
↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

↳ Bit-Auflösung Speicher

Linearisierung:

↳ Linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $\{x_{eq}, u_{eq}\}$ (Koordinatentransformation)



$$\dot{x} = f_0(x, u)$$

$$y = g_0(x, u)$$

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx + du$$

↳ der Fehler durch die Linearisierung ist grösser je weiter man vom GGP entfernt ist

↳ gewisse Informationen können verloren gehen

↳ z.B. Dämpfung in gewissen Fällen

↳ Vorgehen:

Taylorentwicklung 1. Ordnung

$$\dot{x} = f_0(\delta x + x_{eq}, \delta u + u_{eq})$$

Jacobi-Matrizen:

$$A = \frac{\partial f_0}{\partial x} \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_e, u=u_e} \quad b = \frac{\partial f_0}{\partial u} \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_e, u=u_e}$$

$$c = \frac{\partial g_0}{\partial x} \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_e, u=u_e} \quad d = \frac{\partial g_0}{\partial u} \bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_e, u=u_e}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial u} \\ \vdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$c = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{0,1}}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial g_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial g_{0,2}}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

$$d = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{0,1}}{\partial u} \\ \frac{\partial g_{0,2}}{\partial u} \\ \vdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

$$\vec{x} = \vec{x}_e, u = u_e$$

Systemanalyse:

Jedes lineare System besteht aus Teilsystem 1. und 2. Ordnung

Testsignale:

System 1. Ordnung:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{1}{T} x(t) + k \cdot u(t) \quad y(t) = x(t)$$

↳ 2. Freiheitsgrade:

- Zeitkonstante $T > 0$

- Verstärkung $k > 0$

Impulsantwort:

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

↳ Dirac Delta Funktion

$$y(t) = e^{-t/T} (x_0 + k/T)$$

Sprungantwort:

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

↳ Heaviside Funktion

$$y(t) = e^{-t/T} x_0 + k(1 - e^{-t/T})$$

Rampenantwort:

$$v(t) = r(t) = t \cdot h(t)$$

$$y(t) = e^{-t/T} x_0 + k(t + (e^{-t/T} - 1) \cdot T)$$

Harmonische Antwort:

$$u(t) = c(t) = \cos(\omega t) \cdot h(t)$$

$$y(t) = m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

$$m(\omega) = k / \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Zeitkonstante bei Impuls- und Sprungantwort:

T ist gleich der Zeit, bei der die Tangente an den Graphen zur Zeit $t=0$ den finalen Wert $y(\infty)$ erreicht

Verstärkung bei Impuls- und Sprungantwort:

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = k$ - Wert gegen den y konvergiert

Sprungantwort mit $T < 0$:

↳ System ist instabil

Signalflussbild:

Ordnung des Systems: # Integratoren

Zustandsraumdarstellung:

Lineares zeitinvariantes (LTI) System:

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x} + b \delta u$$

$$\delta y = c \vec{x} + d \delta u$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A \vec{x}(t) + b u(t)$$

$$y(t) = c \vec{x}(t) + d u(t)$$

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = c e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t c e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + d u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{c e^{A(t-t_0)} \vec{x}(t_0)}_I + \underbrace{\int_{t_0}^t c e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau}_{II} + \underbrace{d u(t)}_{III}$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

$$y(t) = I + II + III$$

Bemerkung:

Falls die Gleichgewichtspunkte $\equiv 0$

sind -> Maximal oder Mittelwerte

Für die Normierung verwenden

Bsp.: Feder

$$z_{1,0} = p; z_{2,0} = h; v_0 = v_{max}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} 1/p \cdot h \cdot x_2 \\ 1/h \cdot m \cdot (m g - k p x_1 - f_k(h x_2 + v_{max} u)) \end{bmatrix}$$

Strecke - Controller Interface:

normieren

Controller

entlinearisieren

linearisieren für lineares System

linearisieren für lineares System

linearisieren für lineares System

linearisieren für lineares System

linearisieren für lineares System

linearisieren für lineares System

I: natürliche Antwort des Systems

↳ unabhängig von der Eingangsgrösse u

II: Systemdynamik (Faltung)

III: Feedthrough Term

Trajektorien-darstellung:

$x(t)$ kann als Kurve

in einem n -dimensionalen Vektorraum

dargestellt werden

dargestellt werden

dargestellt werden

dargestellt werden

dargestellt werden

Übertragungsfunktion:

Herleitung:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t); y(t) = c x(t); x(0) = 0$$

→ Laplace Transformation

$$sX(s) = AX(s) + bU(s); Y(s) = cX(s)$$

Definition:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d$$

$$= c \cdot \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \cdot b + d = b_m \prod_{j=1}^m (s - \xi_j) / \prod_{i=1}^n (s - \pi_i)$$

→ $\xi_j, \pi_i \in \mathbb{C}$

Anmerkungen:

- bei physikalischen Systemen: $n \geq m$
- Nenner entspricht der charakteristischen Gleichung der Matrix A → $\det(sI - A)$
- Stabilitätseigenschaften der GAP lassen sich am Nenner ablesen
- $Z(s)$ beschreibt nur I/O-Verhalten
- $L(|x(t)|) = \Sigma(s)$ → Übertragungsfunktion eines Systems ist gleich der LP-Transform seiner Impulsantwort
- Tipp: Nicht ganz $(sI - A)^{-1}$ berechnen
- 0 in b löscht Spalten, 0 in c löscht Zeilen

LinAlg:

Adjunkte:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)$$

$$[\text{Adj}(A)]_{ij} = [(-1)^{i+j} \det(A_{ji})]^T$$

→ $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$: Streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte von A

2x2 Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3x3 Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \text{eifhch-bi-bf-ce} \\ \text{fg-di-ai-cg-cd-af} \\ \text{gh-egbg-ah-ae-b} \end{pmatrix}$$

Pole und Nullstellen:

π_i : Pole; ξ_j : Nullstellen

Pol $\pi_i \Rightarrow$ Eigenwert $\lambda_i A$

→ π_i : Nullstellen und Pole können sich kürzen

Transferfunktion für I/O-Darstellung:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Überblick Systemdarstellungen:

	Zeitbereich	Frequenzbereich
SP	$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + bu(t)$ $y(t) = cx(t) + du(t)$	$Y(s) = [c(sI - A)^{-1} b + d] U(s)$
I/O	$y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_0 u(t)$	$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} U(s)$

Zusammenhänge Laplace:

DGL: $\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t) + \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t)$ → ZD → Lösung: $\frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t)$

algebraische Gl.: $sY(s) = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t) + \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t)$ → Lösung: $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t)$

→ $\frac{1}{s} Y(s) = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t)$ → Lösung: $Y(s) = \frac{1}{s} \frac{d}{dt} x(t)$

BIBO Stabilität:

→ Bounded Input bounded output

$$\text{BIBO stabil} \Leftrightarrow \int_0^\infty |h(t)| dt < \infty$$

→ $\text{Re}(\pi_i) < 0 \forall i$ → Pole

Unterschied BIBO - Lyapunov:

→ Bibo bezieht sich auf das I/O-Verhalten von $\Sigma(s)$

→ Lyapunov bezieht sich auf das Gleichgewicht der Zustände

Zusammenhänge BIBO - Lyapunov:

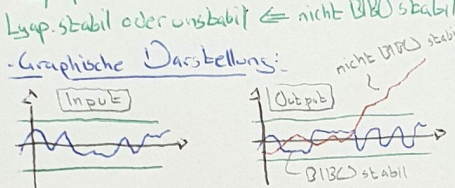
→ minimales System: asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ BIBO stabil

Lyap. stabil oder instabil $\Leftrightarrow$ nicht BIBO stabil

→ nicht minimales System: asymptotisch stabil $\Rightarrow$ BIBO stabil

Lyap. stabil oder instabil $\Leftrightarrow$ nicht BIBO stabil

Graphische Darstellung:



→ nicht beobachtbare oder steuerbare Zustände haben keinen Einfluss auf BIBO

Pole und Nullstellen:

Systeme 2. Ordnung:

$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}; \Sigma(0) = 1$$

→ statische Verstärkung von 1

→ Pole:

$$\pi_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1} \cdot \omega_0$$

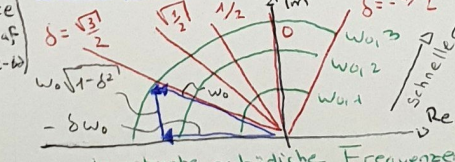
→ Parameter:

δ : Dämpfungsparameter

$\omega_0 = 2\pi/T_0$: natürliche Frequenz des Systems

T_0 : natürliche Periode

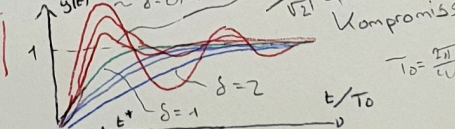
Pole auf der komplexen Ebene:



ω_0, n : konstante natürliche Frequenzen

δ : konstante Dämpfungsparameter

Sprungantwort:



0 < delta < 1: Unterdämpft

→ komplexe Pole, schwingendes Verhalten

→ überschiesst das Ziel um den Überschuss $\hat{e}$

$$\hat{e} = e^{-\delta T / \sqrt{1-\delta^2}}, \text{ bei } t^* = \pi / \omega_0 \sqrt{1-\delta^2}$$

$$y(t) = h(t) \cdot [1 + e^{\delta t} \cdot (\frac{b_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \cos(\omega_1 t))]$$

delta > 1: Überdämpft

→ reelle Pole, keine Schwingung

→ überschiesst nicht ein Pol konvergiert viel schneller

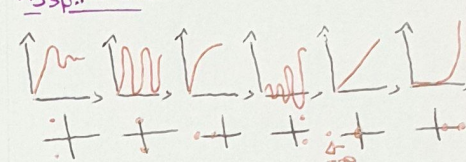
$$Z(s) = \omega_0^2 / [(s + \pi_1)(s + \pi_2)] \approx \frac{\pi_1}{s + \pi_1}$$

$$y(t) = h(t) \cdot [1 + e^{\delta_0 t} \cdot (\frac{b_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \cos(\omega_1 t))]$$

delta = 1: (kritische Dämpfung)

→ 2 reelle Pole an der selben Stelle $\pi_1 = \pi_2 = \omega_0$ → schnellstmögliche Konvergenz ohne Überschwingen

Bsp.: Pole



Eigenschaften:

2. Ordnung: Gradient $t=0$ ist 0

1. Ordnung: Steigung $\neq 0$

→ der Output wird mit der natürlichen Frequenz skaliert

→ Für $\delta > 1$: Sprungantwort wird durch den Pol, welcher näher beim Ursprung ist dominiert

Nullstelleneinfluss: (Sprungantwort)

Je näher die Nullstelle am Ursprung ist, desto stärker ist ihr Einfluss

→ größerer Überschuss

→ eine Nullstelle nahe bei einem Pol

unterdrückt dessen Einfluss auf den Output

→ $\delta = 1/2$

→ $\xi < 0$

→ $\xi > 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

→ $\xi = \pm \infty$

→ $\xi = 0$

Systemanalyse (Fortsetzung):

Lyapunov Stabilität:

Stabilitätskonzept bei Zustandsraumdarstellung
(Stabilitätsanalyse von GGP)

Analysiert das Verhalten des Zustandes $x(t)$ mit $x(0) \neq 0$ und $u(t) = 0$

Definition: $\det(nI - A) = 0 \rightarrow n_i$

→ asymptotisch stabil: (i)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(n_i) < 0 \quad \forall i$$

→ (grenz-)stabil: (ii)

$$\|x(t)\| < \infty \quad \forall t \Leftrightarrow \operatorname{Re}(n_i) \leq 0 \quad \forall i$$

→ System ist instabil, falls mehrfache $\operatorname{Re}(n_i) = 0$ und A nicht diagonalisierbar

→ instabil: (iii)

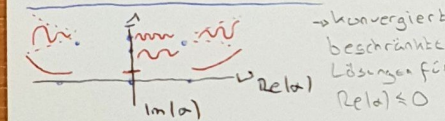
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty \Leftrightarrow \exists i \text{ mit } \operatorname{Re}(n_i) > 0$$

Stabilitätsprinzip:

Falls die Stabilität des GGPeines linearisierten Systems den Fällen (i) oder (iii) entspricht, gilt dies auch für die Stabilität desselben GGPeines nichtlinearen System

→ gilt nicht für grenzstabile Systeme

Verhalten von e^{Ax} :



Herleitung:

→ Entkopplung der einzelnen Zustände

→ Diagonalisieren mit $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(n_1, n_2, \dots, n_n)$

Steuerbarkeit:

Ein Punkt $x_c \in \mathbb{R}^n$ ist steuerbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor in endlicher Zeit zum Ursprung ($x(t) = 0$) bringt.

Erreichbarkeit:

Ein Punkt $x_r \in \mathbb{R}^n$ ist erreichbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor in endlicher Zeit T zum Zustand x_r bringt.

Steuerbarkeitsmatrix R :

Für LTI Systeme sind die Teilräume der erreichbaren und steuerbaren Zustände identisch

$$R = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\operatorname{Rang}(R) = n \Leftrightarrow \det(R) \neq 0 \Rightarrow$ System ist vollständig steuerbar/erreichbar

alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ sind steuerbar $\Leftrightarrow$ System heißt vollständig steuerbar
alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ sind erreichbar $\Leftrightarrow$ System heißt vollständig erreichbar

Beobachtbarkeit:

Ein System ist vollständig beobachtbar, wenn man mit der Messung des Ausgangssignals $y(t)$ eindeutig auf den Anfangszustand $x(0)$ schließen kann.

Beobachtbarkeitsmatrix O :

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \operatorname{Rang}(O) = n &\Leftrightarrow \\ \det(O) \neq 0 &\Rightarrow \\ \text{LTI System ist} & \\ \text{vollständig beobachtbar} & \end{aligned}$$

Allgemeines:

Steuerbarkeit, Erreichbarkeit, Beobachtbarkeit sind strukturelle Eigenschaften des Systems und sind unabhängig von der spezifischen Wahl von $u(t)$ oder der Messmethode von $y(t)$

Stabilisierbarkeit:

→ potentiell stabilisierbar:

alle nicht steuerbaren Zustandsvariablen sind asymptotisch stabil
→ Stabilisierbarkeit ist eine schwächere Bedingung als Steuerbarkeit

Detectierbarkeit:

alle nicht beobachtbaren Zustandsvariablen sind asymptotisch stabil
→ Detectierbarkeit ist eine schwächere Bedingung als Beobachtbarkeit

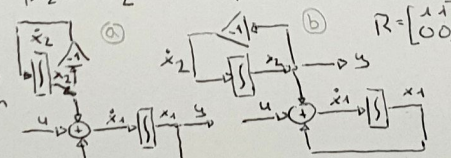
Schlussfolgerung:

Ein (unstabiles) System ist stabilisierbar, wenn es potentiell stabilisierbar und detectierbar ist

Bsp.: Systemanalyse

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow y = x_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow y = x_2$$



→ $\operatorname{Rang}(R) = 1 < n = 2 \rightarrow$ System ist nicht vollständig steuerbar/erreichbar

→ Zustand x_2 ist unabhängig von $u(t)$

→ $\det(nI - A) = 0 \rightarrow n_1, n_2 = 1, -1$

→ EV zum EW -1 ist $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

→ $\operatorname{Re}(n_{x_2}) = \operatorname{Re}(-1) < 0 \rightarrow$ asymptotisch stabil

→ potentiell stabilisierbar

→ $\operatorname{Rang}(O) = n = 2$

→ System ist vollständig beobachtbar

→ System a ist stabilisierbar

→ $\operatorname{Rang}(O) = 1 < n$

→ System ist nicht vollständig beobachtbar

→ x_1 ist nicht asymptotisch stabil

→ $\operatorname{Re}(n_{x_1}) = \operatorname{Re}(1) > 0$

→ System b ist nicht detectierbar und stabilisierbar

→ Werkzeugbereich/Spaltenvektoren spannen den steuerbaren Unterraum auf

Koordinatentransformation:

$$x(t) = T \tilde{x}(t) \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = T^{-1} A T \tilde{x}(t) + T^{-1} b u(t)$$

$$y(t) = c T \tilde{x}(t) + d u(t)$$

→ Fundamentale Systemeigenschaften (Stabilität, Steuerbarkeit, I/O-Verhalten) sind Transformationsinvariant

I/O Darstellung:

Input/Output Darstellung

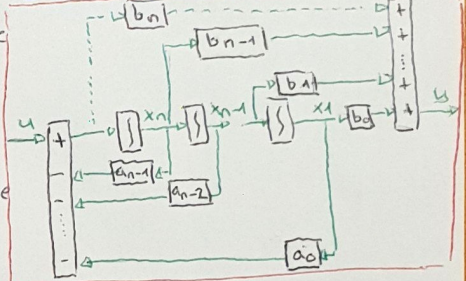
→ Zusammenhang zwischen $u(t) \rightarrow y(t)$

→ keine physikalischen Koordinaten

→ alle Anfangsbedingungen sind 0

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1u'(t) + b_0u(t)$$

I/O Diagramm:



Zustandsraum:

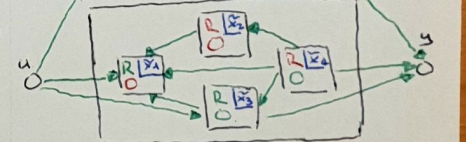
Zustandsraum Normalform:

→ unendlich viele Möglichkeiten Koordinaten für den Übergang I/O → Zustandsraum zu wählen

Regler normalform:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Zustandsraum Zerlegung:



R: steuerbar, O: beobachtbar, R: nichtst., O: nicht beob.

→ I/O Verhalten eines Systems lässt sich nur durch die Zustände $\tilde{x}$ beschreiben

→ gleichzeitig erreichbar und beobachtbar

→ # Zustände im Unterraum $\tilde{x}_2$ entspricht der minimalen # Zustände zur Beschreibung des I/O-Verhaltens

minimale Ordnung:

$\min\{\operatorname{Rang}(O), \operatorname{Rang}(R)\}$

→ keine Pole und Nullstellen kürzen sich kürzen von Termen in $\tilde{X}(s)$

→ nicht beobachtbare oder steuerbare Zustände minimal $\Leftrightarrow$ vollständig steuer- & beobachtbar

→ ∞-viele Darstellungen

Frequenzantworten:

Input: (harmonische Schwingung)

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

α : Amplitude ω : Frequenz in rad/s
 φ : Phasenverschiebung

Output: (asymptotisch stabiles LTI-System)

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_{\text{ss}}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\text{ss}}(t)$$

$$y_{\text{ss}}(t) = m(\omega) \cdot \alpha \cdot \cos(\omega t + \varphi + \angle Z(i\omega))$$

$$y_{\text{ss}}(t) = |Z(i\omega)| \cdot \alpha \cdot \cos(\omega t + \varphi + \angle Z(i\omega))$$

↳ verstärkter und phasenverschobener Cosinus mit der gleichen Frequenz

↳ LTI-Systeme generieren keine neuen Frequenzen

↳ Koeffizienten

$$m(\omega) = |Z(i\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle Z(i\omega) = \arctan(-b/a)$$

Herleitung:

↳ Cosinus in komplexer Exponentialform schreiben
 ↳ Realteil konvergieren, da $\omega < 0$
 ↳ nur Imaginärteil bleibt bei $t \rightarrow \infty$ erhalten $\rightarrow i\omega$ in $Z(s)$ einsetzen

Komplexe Zahlen:

↳ Euler'sche Identität:

$$z = a + ib = |z| [\cos(\angle z) + i \sin(\angle z)] = |z| e^{i \angle z} \Rightarrow |z(i\omega)|_{\text{dB}} = |Z_1|_{\text{dB}} + |Z_2|_{\text{dB}}$$

↳ Betrag: $\angle z = \arctan(b/a)$ $\angle z = \arctan(b/a)$

$$\left| \frac{(a+ib)^x}{(c+id)^y} \right| = \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^x}{(\sqrt{c^2+d^2})^y}$$

↳ Phase:

$$\angle \left(\frac{(a+ib)^x}{(c+id)^y} \right) = x \angle (a+ib) - y \angle (c+id)$$

$$= x \arctan(b/a) - y \arctan(d/c)$$

↳ Am Einheitskreis überlegen in welchem Quadranten sich z befindet

Bsp.: Frequenzantwort

$$Z(s) = \frac{s+8}{(s+2)(s+4)} \quad u(t) = \cos(8t)$$

$$y_{\text{ss}} = |Z(8i)| \cdot \cos(8t + \angle Z(8i))$$

$$|Z(8i)| = \frac{|18j+8|}{|(18j+2)(18j+4)|} = 0.1534$$

$$\angle Z(8i) = \angle(8i+8) - \angle(8i+2) - \angle(8i+4)$$

Bode Diagramm:

Magnitudenverlauf und Phasenverlauf werden über einer logarithmischen Frequenzskala eingezeichnet

dB-Skala:

$$x_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(x) \quad x = 10^{\frac{x_{\text{dB}}}{20}}$$

$$\left| \frac{1}{x} \right|_{\text{dB}} = -(x_{\text{dB}}) \quad (x \cdot y)_{\text{dB}} = x_{\text{dB}} + y_{\text{dB}}$$

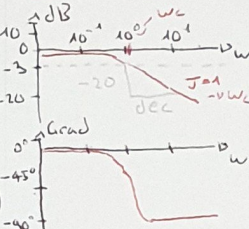
Bsp.: $-12 \text{ dB} = -6 \text{ dB} - 6 \text{ dB} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

wert	dB	0.1	20	$\sqrt{2}$	3	1000	60
0	-∞	0.5	0.6	2	0.6		
0.001	-60	$\frac{1}{2}$	0.3	5	0.14		
0.01	-40	1	0	10	20		
0.2	-14			100	40		

Bode Diagramm: System 1. Ordnung

$$Z(s) = \frac{1 \cdot k}{Js + 1}$$

↳ Eckfrequenz (cutoff frequency): $\omega_c = 1/J$



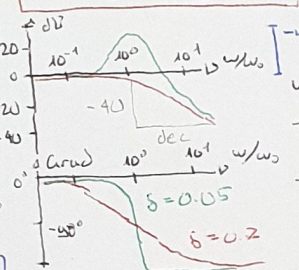
↳ Merkmale:

↳ reagiert auf tiefe Frequenzen $\angle \omega_c$

↳ Magnitude bei $\omega_c = 1/J$

Bode Diagramm: System 2. Ordnung

$$Z(s) = \frac{\omega_0^2 \cdot k}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}$$



↳ Resonanz-überhöhung:

$$\omega_{\text{max}} = \omega_0 \sqrt{1-2\delta^2}$$

↳ delta klein $\rightarrow \omega_{\text{max}} \approx \omega_0$

↳ delta > 1/sqrt(2) $\rightarrow$ kein resonantes Verhalten

Bode Diagramm zeichnen:

Nützliche Eigenschaften:

$$|Z(i\omega)| = |Z_1(i\omega)| \cdot |Z_2(i\omega)|$$

$$\angle Z(i\omega) = \angle Z_1(i\omega) + \angle Z_2(i\omega)$$

$$\angle (Z_{\text{tot}}) = \angle (Z_1 \cdot Z_2) = \angle Z_1 + \angle Z_2$$

Vorgehen:

↳ $Z(s)$ in elementar Funktionen aufspalten

Term	Magnitude	Phase
Konstante K	$20 \log_{10}(K)$	$K > 0: 0^\circ$ $K < 0: \pm 180^\circ$

reeller Pol:	$\omega < \omega_0: 0 \text{ dB}$ $\omega > \omega_0: -20 \text{ dB/dec}$	$\omega < \omega_0: 0^\circ$ $\omega > \omega_0: -90^\circ$
--------------	--	--

reelle Nullst.	$\omega < \omega_0: 0 \text{ dB}$ $\omega > \omega_0: +20 \text{ dB/dec}$	$\omega < \omega_0: 0^\circ$ $\omega > \omega_0: +90^\circ$
----------------	--	--

Pol am Ursprung	-20 dB/dec durch $P(0, \omega=1)$	$-90^\circ \forall \omega$
-----------------	--	----------------------------

Nullstelle am Ursprung	$+20 \text{ dB/dec}$ durch $P(0, \omega=1)$	$+90^\circ \forall \omega$
------------------------	--	----------------------------

schwach gedämpfter Pol	$\omega < \omega_0: 0 \text{ dB}$ $\omega > \omega_0: -40 \text{ dB/dec}$ ↳ Peak bei ω_0 mit $20 \log_{10}(2\delta)$	$\omega < \omega_0: 0^\circ$ $\omega > \omega_0: -180^\circ$
------------------------	---	---

schwach gedämpfte Nullst.	$\omega < \omega_0: 0 \text{ dB}$ $\omega > \omega_0: +40 \text{ dB/dec}$ ↳ Dip bei ω_0 mit $20 \log_{10}(2\delta)$	$\omega < \omega_0: 0^\circ$ $\omega > \omega_0: +180^\circ$
---------------------------	--	---

Zeitzeit e^{-st}	keine Änderung	180° WT $\frac{\pi}{\omega_0} \text{ s}$
--------------------	----------------	--

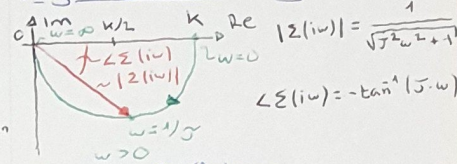
↳ Vielfachheit größer 1: Verstärkung und Phasenänderung muss mit n multipliziert werden

stabiler Pol: -90° bei ω_c ; minimalphasige NS: $+90^\circ$

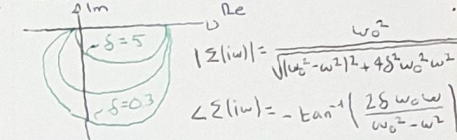
instabiler Pol: $+90^\circ$ bei ω_c ; nicht-minimalphasige NS: -90°

Nyquist Diagramme:

Systeme 1. Ordnung:



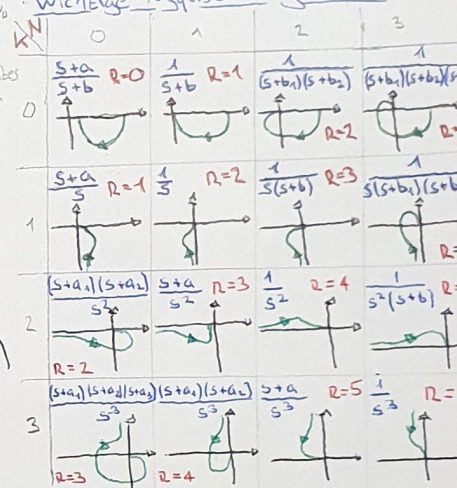
Systeme 2. Ordnung:



Eigenschaften:

Darstellung des Frequenzganges (Magnitude und Phase über die Anregungsfrequenz ω) in der komplexen Ebene $\rightarrow$ Symmetrie zur Realen-Achse

Wichtige Nyquist Diagramme



↳ Totzeit: $N: 4$ Asymptoten

e^{-st} : Spiralen um den Ursprung

Vorgehen: $\rightarrow$ Bsp. $Z(s) = \frac{3}{s+1}$

$$1) \lim_{\omega \rightarrow 0} Z(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{3}{i\omega+1} = 3$$

$$2) \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{3}{i\omega+1} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[3i \frac{\omega}{\omega^2+1} - \frac{3}{\omega^2+1} \right] = 0 - 0 = 0$$

↳ mit konjugiert komplex erweitern

$$3) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle Z(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle \left(\frac{3}{i\omega+1} \right) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

4) evtl. Schnittpunkte Imaginär-Achse

5) evtl. Schnittpunkte Reelle-Achse

6) Phasenverlauf betrachten:

↳ Phase fällt streng monoton ab

7) evtl. Spiegeln an der Reellen-Achse

Tipps:

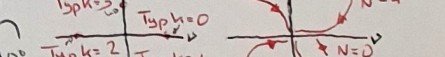
↳ Pol am Ursprung (offener Integrator)

↳ Betrag geht für $\omega \rightarrow 0$ gegen Unendlich

↳ negatives Vorzeichen verändert Durchlaufsin (Faustregel)

Beginn:

↳ Einheitskreis:



↳ siehe Tabelle oben für n und k

Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten:

Übertragungsfunktion:

$$Z(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^k (s^{n-k} + a_{n-1} s^{n-k-1} + \dots + a_1 s + a_0)}$$

Systemtyp k:

offener Integratoren, $1/s^k$

Pole bei $s=0$

→ k im Bode-Diagramm:

bei tiefen Frequenzen erkennbar

$$\angle Z(0) = \begin{cases} -k \cdot \pi/2, & \text{sgn}(b_0/a_0) > 0 \\ -\pi - k \cdot \pi/2, & \text{sgn}(b_0/a_0) < 0 \end{cases}$$

Relativer Grad $r = n - m$:

Steigung im Amplitudenplot bei hohen Frequenzen

$$\frac{\partial |Z(j\omega)|_{dB}}{\partial \log(\omega)} = -r \cdot 20 \text{ dB/decade}$$

Systemidentifikation:

White box model:

explizite Darstellung der Physik des Systems mit bekannten Parametern

Grey box model:

explizite Darstellung der Physik des Systems mit unbekannten Parameterwerten

Black box model:

keine explizite Darstellung der Physik des Systems → Systemverhalten muss durch empirische Datenanalyse ermittelt werden

Anwendung:

Physik des Systems nicht bekannt oder zu komplex zum Modellieren

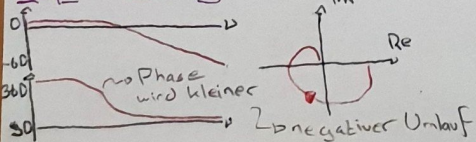
Bemerkung:

- man kann vom Modell nicht auf das echte physikalische System schließen
- Funktioniert gut bei Systemen mit relativ kleiner Ordnung
- Abstand zwischen den Zeitkonstanten sollte genug gross sein

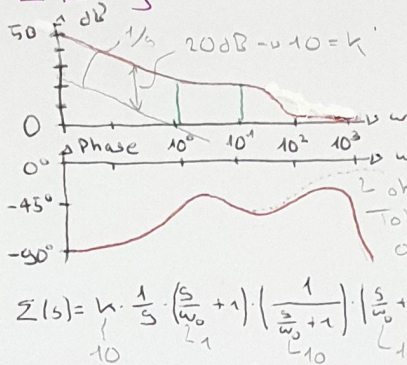
Vorgehen Systemidentifikation:

- 1.) System wird mit einem bekannten harmonischen Eingangssignal angeregt
- 2.) Verstärkung und Phase werden gemessen → Bode-Diagramm
- 3.) Typ und relativen Grad identifizieren
- 4.) zuerst tiefe Frequenzen analysieren
- 5.) Standardelemente verwenden um eine Übertragungsfunktion zu bestimmen → + Gain!

Bsp.: Phasenregel



Bsp.: Systemidentifikation



Modellunsicherheit:

Nichtparametrische Unsicherheit:

→ maximal zu erwartende Unsicherheit beim Entwurf des Reglers berücksichtigen

→ wahre Übertragungsfunktion $Z_t(s)$ liegt in der Menge S :

$$S = \{Z(s) \cdot (1 + \Delta W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi]\}$$

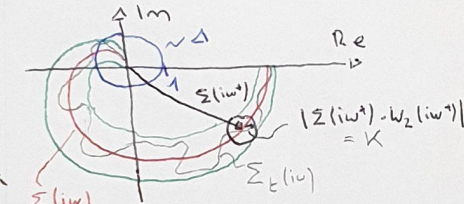
$Z(s)$: Nominelle Übertragungsfunktion

→ durch Systemmodellierung

Δ : Unsicherheitsgenerator

→ Kreis in der komplexen Ebene

$W_2(s)$: Übertragungsfunktion der Unsicherheit



→ bei jeder Frequenz w^* liegt die wahre Übertragungsfunktion $Z_t(jw^*)$ innerhalb eines Kreises K um die nominelle Übertragungsfunktion $Z(jw^*)$

Unsicherheitsübertragungsfunktion:

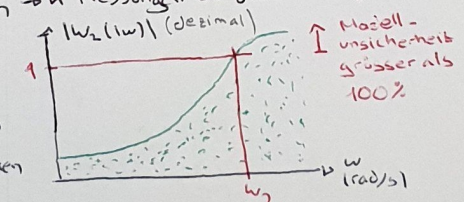
$W_2(s)$ wird mit Hilfe von Messungen am realen System abgeschätzt

→ Unsicherheit steigt bei hohen Frequenzen

→ $W_2(s)$ enthält keine Phaseninformation

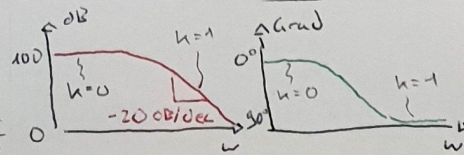
$$\left| \frac{Z(j\omega, k)}{Z(j\omega)} - 1 \right| < |W_2(j\omega)|, k \in [1, K], \omega \in [0, \infty]$$

→ k Messungen bei jeder Frequenz w_j



Gesetz von Bode:

Der Gradient des Plots der Magnitude ($k \cdot 20 \text{ dB/dec}$) bestimmt die Phasenverschiebung ($k \cdot \pi/2$)



Wichtige Übertragungsfunktionen:

Beziehung zwischen 2 Signalen:

Grundlage: Linearität der Regelstruktur und unkorrelierte Eingängen

→ Ausgangsgrösse als Funktion...

→ des Referenzwerts $R(s)$:

$$Y_R(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} R(s) = T(s) R(s)$$

→ des Rauschens $N(s)$:

$$Y_N(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} N(s) = T(s) N(s)$$

→ der Störung der Eingangsgrösse u :

$$Y_U(s) = \frac{D(s)}{1 + P(s)C(s)} U(s) = \frac{D(s)}{S(s)} U(s)$$

→ der Störung der Ausgangsgrösse y :

$$Y_O(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} D(s) = \frac{1}{S(s)} D(s)$$

Kreisverstärkung

$$L(s) = P(s) \cdot C(s) \quad e \rightarrow y$$

Sensitivität:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad d \rightarrow y, r \rightarrow e$$

Komplementäre Sensitivität:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad r \rightarrow y, n \rightarrow y$$

Gesamte Übertragungsfunktion:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_U(s) + Y_N(s) + Y_O(s) = S(s) [D(s) + P(s) \cdot W(s)] + T(s) [R(s) + N(s)]$$

Zusammenhang:

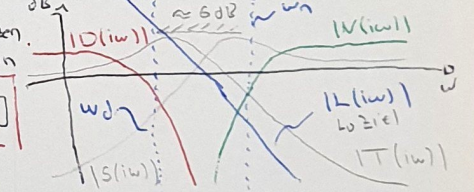
$$|L(s)| \gg 1 \Rightarrow S(s) \approx \frac{1}{L(s)}; T(s) \approx 1$$

$$|L(s)| \ll 1 \Rightarrow T(s) \approx L(s); S(s) \approx 1$$

$$T(s) + S(s) = 1, \forall s \in \mathbb{C}$$

Störung d : niederfrequentes Signal

Rauschen n : hochfrequentes Signal



tiefe Frequenzen: ca. 20 dB/dec
hohe Frequenzen: → Rausch-Unterdrückung Band

Stabilität eines geschlossenen Regelkreises:

intern stabil $\Leftrightarrow$ alle Übertragungsfunktionen asymptotisch stabil

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s)C(s) & S(s) \\ S(s)P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s)P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

Ausgänge

→ $S(s), T(s), S(s) \cdot C(s), S(s) \cdot P(s)$ dürfen nur asymptotisch stabile Pole haben
 $\text{Re}(p_i) < 0, \forall p_i$

Alternative: closed loop asymptotically stable
 $L(s)$ nur Nullstellen mit Realteil < 0

Nyquist Theorem:

Grundvoraussetzung:

keine Nullstellen von instabilen Polen mit nicht-minimalphasigen Nullstellen in $L(s)$

Aussage:

Die asymptotische Stabilität eines geschlossenen Regelkreises $T(s)$ kann durch Analyse seiner Kreisverstärkung $L(s)$ (offener Regelkreis) bestimmt werden

Theorem: (Nominelles Stabilitätskriterium von Nyquist)

Der geschlossene Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil, wenn für $L(s)$ gilt:

$$n_c = \frac{1}{2} n_o + n_+$$

n_c : # Umrundungen von $L(i\omega)$ um den Punkt $(-1 + i0)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$

n_o : # Pole von $L(s)$ mit Realteil $= 0$
 n_+ : # Pole von $L(s)$ mit Realteil > 0

Annahme: keine Modellunsicherheit
 man braucht $L(s)$ nicht explizit, sondern nur die Frequenzantwort
 $L(s)$ muss nicht BIBO stabil sein

Robustheitsmasse:

Kritische Abstand μ :

Kleinste Distanz zwischen $(-1 + i0)$ und $L(i\omega)$

$$\mu = \min_{\omega} |1 + L(i\omega)| = \frac{1}{\max_{\omega} |S(i\omega)|}$$

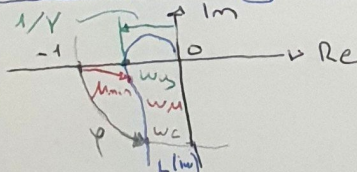
Verstärkungsreserve γ :

Inverse des Betrag von $L(i\omega)$ bei -180°

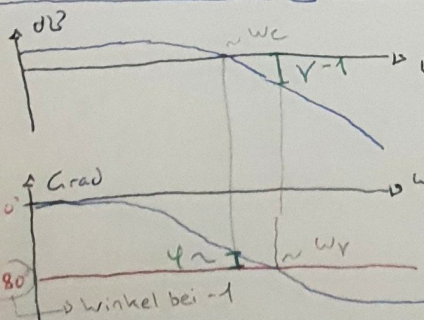
Phasenreserve φ :

Winkel, bei dem $L(i\omega)$ den Einheitskreis schneidet

Größen im Nyquist-Diagramm:



Größen im Bode-Diagramm:



Stabilitätsbedingungen:

Phasenfehler $\alpha < \varphi$
 Verstärkungsfehler $k < \gamma$
 nur ein Fehler jeweils, da φ und γ eindimensionale Größen sind

Robustes Nyquist Theorem:

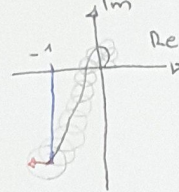
wahre Kreisverstärkung $L(s)$ ist Teil der Menge

$$S_L = \{P(s)C(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \Delta \in [-\pi, \pi]\}$$

$L(s)$ und $L(s)$ haben die selbe Anzahl instabiler und stabiler Pole

schlimmster Fall $|\Delta| = 1$
 $L(s) = L(s) + L(s) \cdot W_2(s)$

$$|L(i\omega) \cdot W_2(i\omega)| < |1 + L(i\omega)|, \forall \omega \in [0, \infty)$$



Berechnung μ :

$$\mu = \min_{\omega \in [0, \infty)} |L(i\omega) - (-1)| = \min_{\omega \in [0, \infty)} \frac{|1|}{|S(i\omega)|} = \min_{\omega \in [0, \infty)} \frac{|1|}{|L(i\omega) + 1|}$$

Beschränkung der Sensitivität:

Frequenzgang der Sensitivität kann lokal durch den Regler beeinflusst werden
 Global gilt folgendes:

$$\int_0^\infty \ln |S(i\omega)| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n_+} \pi_i^+ = 0$$

n_+ : # instabiler Pole p_+ von $L(s)$

Verringerung der Sensitivität in einem Frequenzband wird durch eine Erhöhung in einem anderen kompensiert

Beschränkung der Durchtrittsfrequenz:

Durchtrittsfrequenz ω_c :

$$|L(i\omega_c)| = 0 \text{ dB} = 1 \quad |T(i\omega_c)| = |S(i\omega_c)|$$

Bandbreite des geschlossenen Regelkreises ω_b :

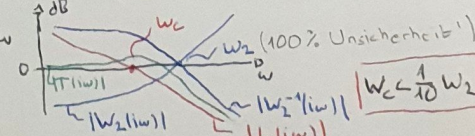
$$|T(i\omega_b)| = -3 \text{ dB} = 1/\sqrt{2} \approx 0.7 \quad \omega_b \approx \omega_c$$

Mass für die höchste Frequenz des Eingangssignals, die der geschlossene Regelkreis verfolgen kann

Beschränkung durch Modellunsicherheit W_2 :

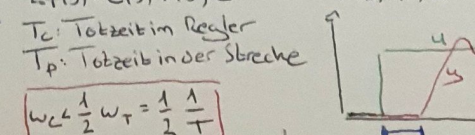
Herleitung: $|L(i\omega) \cdot W_2(i\omega)| < |1 + L(i\omega)|$

$$\Rightarrow \frac{|L(i\omega)|}{|1 + L(i\omega)|} < \frac{1}{|W_2(i\omega)|} \Rightarrow |T(i\omega)| < |W_2(i\omega)|$$



Beschränkung durch Totzeit:

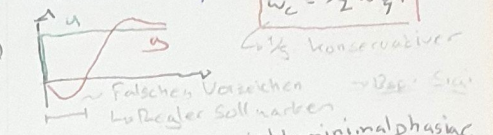
Kreisverstärkung mit Verzögerung
 $L_T(s) = C(s)P(s)e^{-T_C + T_P s} = (s)P(s)e^{-T_s}$



$$\omega_c \leq \frac{1}{2} \omega_T = \frac{1}{2} \frac{1}{T}$$

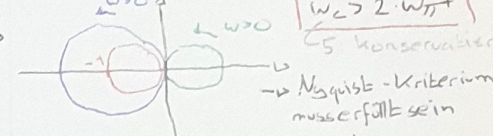
$1/5$ ist konservativer
 Regler soll etwas warten

Beschränkung durch nicht-minimalphasige Nullstellen ω_T :



ω_T : langsamste nicht-minimalphasige Nullstelle: kleinster positiver Realteil

Beschränkung durch instabile Pole π_+ :



System muss genügend schnell reagieren
 $|k|$ muss gross sein und $\text{sign}(k)$ negativ

ω_{π_+} : schnellste instabile Pol von $L(s)$
 ω_{π_+} : grösster positiver Realteil

mit Modellunsicherheit:
 $|W_2(\pi_+)| < 1 \quad \forall i$

Zusammenfassung:

$$\min \left\{ \frac{1}{10} \omega_n, \frac{1}{10} \omega_b, \frac{1}{2} \omega_T, \frac{1}{2} \omega_{\pi_+} \right\} > \omega_c > \max \{ 10 \omega_D, 2 \omega_{\pi_+} \}$$

ω_n : noise, ω_D disturbance

Statischer Nachlauffehler:

Definition: Differenz e_∞ zwischen Sollwert r und Istwert y nach Einschwingen

Herleitung:

$$E(s) = E_R(s) + E_U(s) + E_W(s) = S(s) \cdot [R(s) + N(s) - D(s) - P(s) \cdot W(s)]$$

Referenz und Störung als Sprünge $n(t)$
 $\rightarrow$ Flauschen $n(t)$ ist im Mittelwert 0
 $\rightarrow h(t) = 1, t \geq 0 \rightarrow H(s) = 1/s$

Endwerttheorem:
 $e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot S(s) \cdot 1/s$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = S(0) = 1 - T(0)$$

e_∞ einer Sprungantwort:

$$e_\infty = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)} \quad k = T_{\text{Typ}}$$

$k = 0$: $L(0) = b_0/a_0 \rightarrow e_\infty = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$
 $k > 0$: $L(0) = \infty \rightarrow e_\infty = 0$

e_∞ einer Referenz höherer Ordnung:

$$r_m(t) = \frac{1}{m!} \cdot t^m, \quad t \geq 0, m \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$m < k: e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^m (1 + L(s))} = 0$$

$$m > k: e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^m (1 + L(s))} = \infty$$

$$m = k: e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(s)}{s^k} \neq \{0, \infty\}$$

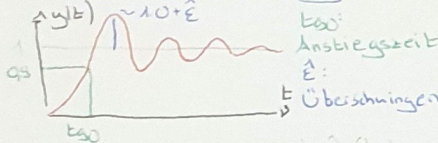
e_{max} einer Sprungantwort:

Input Signal	$r(t), d(t), n(t)$	$u(t)$
statischer Fehler ist tolerierbar	$\frac{1}{ 1 + P(0) \cdot C(0) } \leq e_{\text{max}}$	$\frac{P(0)}{ 1 + P(0) \cdot C(0) } \leq e_{\text{max}}$

statischer Fehler ist nicht tolerierbar
 $e_\infty = 0$
 $P(s)$ oder $C(s)$ müssen T_{Typ} haben
 $C(s)$ muss T_{Typ} haben

Spezifikationen basierend auf Systemen 2. Ordnung:

Graphische Darstellung:



→ Viele Systeme können als 2. Ordnung approximiert werden indem nur die dominanten Pole (Realteil nahe bei 0) berücksichtigt werden

Anforderungen an FD-CL:

$$\delta = \frac{-\ln(\xi)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\xi)}}; \omega_0 = (0.14 + 0.45) \frac{2\pi}{t_{90}}$$

Anforderungen an FD-OL:

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{4\delta(\xi)^4 + 1 - 2\delta(\xi)^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_c / \omega_0}{2 \cdot \delta(\xi)}\right)$$

→ Vereinfachung für $0.45 < \delta < 1$:

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{90}} \quad \varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \xi$$

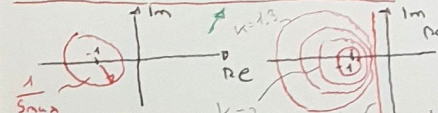
Spezifikationen im Frequenzbereich:

Beschränkung der Auswirkung der Störung und des Rauschens:

$$\|S\|_{\infty} < S_{max} \quad \|T\|_{\infty} < T_{max} \quad S_{max}, T_{max} > 1$$

$$\|S\|_2 < S_{max}$$

$$L(j\omega) \in \{1 + z \mid 1/S_{max} \leq |z| \leq 1, z \neq -1\}$$



$$\|T\|_{\infty} < T_{max}$$

$$L(j\omega) \neq \left\{ \frac{T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1} + z \mid \frac{T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1} \leq |z| \leq \frac{T_{max}^2}{T_{max}^2 - 1} - 1 \right\}$$

Gewünschte Eigenschaften eines Controllers:

- kein statischer Fehler
- schnelle Reaktion/Anspruch
- kein Überschwingen (oder nur ein wenig)
- Robust, stabil
- Stör- und Rauschenunterdrückung

Bsp: Systemantwort einer sprunghaften Störung mit Betrag 1

$$P(s) = \frac{1}{s+1} \quad C_1 = 2 \quad C_2(s) = 2 \cdot (1 + 1/s)$$

$$y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s+1} = 1$$

$$S_1 = 1/3, S_2 = 0 \quad e_{\infty} = r - y_{\infty}$$

$$e_1 = 0 - 1/3 = -1/3$$

$$e_2 = 0 - 0 = 0$$

Bsp: Bedingung Durchtrittsfrequenz

$$|S(j\omega)| = 1 \quad \text{des soll gelten: } 0.4 \leq \phi < 60^\circ$$

$$\omega_1 \leq \omega_c < \omega_2$$

PID-Regler:

P-Term: (proportionales Verhalten)

- Handeln des Reglers ist proportional zum momentanen Regelfehler
- schnelle Reduktion des Regelfehlers
- statischer Nachlauf Fehler kann entstehen

$$u_P(t) = k_P \cdot e(t) \quad |U_P(s) = k_P \cdot E(s)|$$

I-Term: (integratives Verhalten)

- Handeln des Reglers ist proportional zum bereits kummulierten Fehler $\int e(t) dt$
- langsam, aber eliminiert statische Nachlauf Fehler vollständig
- kann zu großem Überschwingen führen

$$U_I(t) = k_{PI} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad |U_I(s) = k_{PI} \cdot \frac{1}{s} E(s)|$$

D-Term: (derivatives Verhalten)

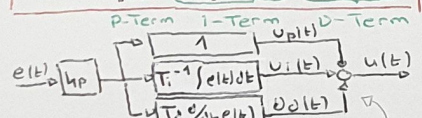
- Handeln des Reglers ist proportional zur Änderung des Regelfehlers
- wirkt antizipierend
- nicht dämpfend gegen eine schnelle Änderung des Fehlers

$$U_D(t) = k_{PD} \frac{d}{dt} e(t) \quad |U_D(s) = k_{PD} \cdot s \cdot E(s)|$$

$$e = r - y, \quad y = L + D \Rightarrow \frac{d}{dt} e = \frac{d}{dt} r - \frac{d}{dt} L - \frac{d}{dt} D$$

PID-Regler im Zeitbereich:

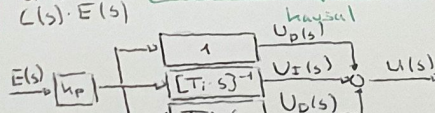
$$u_{PID}(t) = k_P [e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{d}{dt} e(t)]$$



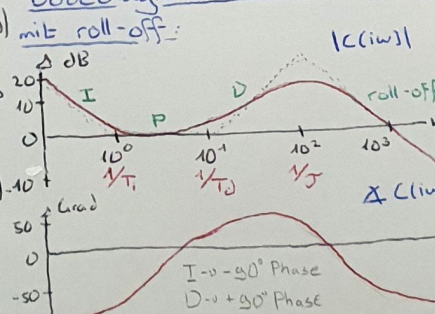
PID-Regler im Frequenzbereich:

$$C_{PID}(s) = k_P \left(\frac{T_D \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s} \right) \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T)^2}$$

$$U(s) = C(s) \cdot E(s)$$



Bodediagramm eines PID-Reglers mit roll-off:

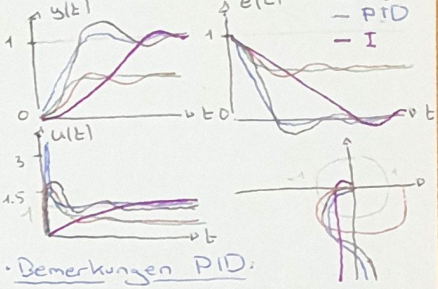


roll-off-Term:

- D-Term verstärkt rauschen
- im Frequenzbereich kann man hohe Frequenzen unterdrücken, indem man eine hochfrequente Nullstelle hinzufügt
- ohne roll-off-Term bräuhete man Zukunftswerte -> aukausal

Regelung eines Systems

2. Ordnung:



Bemerkungen PID:

- Integrator nur nötig falls die Strecke kein Integrator aufweist
- einfache Anforderungen: D kann weggelassen werden
- nicht zu hohe Bandbreiten ansprechen

PID Parameter Tuning nach

Ziegler Nicholas:

→ Voraussetzung: Strecke kann als System 1. Ordnung mit relativer Totzeit approximiert werden

$$|P(s)| \approx \frac{k}{T_s + 1} \cdot e^{-Ts} \quad \frac{T}{T_s + 1} < 0.3 \quad T < 0.4 T_s$$

→ es muss kein Modell der Strecke vorhanden sein

→ Experimente mit dem closed-loop System

Vorgehen:

- man beginnt mit einem reinen P-Regler
- man erhöht k_P bis der geschlossene Regelkreis grenzstabil wird
- k_P System oszilliert → k_P^*, T^*

→ Tabelle: $\frac{T}{T_s} < 0.3$ Periode $T^* = \frac{2T_s}{\omega^*}$

Typ	k_P	T_I	T_D
P	$0.5 k_P^*$	∞T^*	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 k_P^*$	$0.85 T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 k_P^*$	∞T^*	$0.15 T^*$
PID	$0.6 k_P^*$	$0.5 T^*$	$0.125 T^*$

→ $L(j\omega) = P(j\omega) \cdot C(j\omega)$ muss durch den Punkt $(-1, 0)$ gehen, wobei $C(j\omega) = k_P^*$

Zusammenhang:

$$P(j\omega^*) k_P^* = -1 \Rightarrow P(j\omega^*) = -1/k_P^*$$

→ Der kritische Punkt bei einem nachteiligen ausgelassen PI-Regler wird nach $(-0.45 + j0.044)$ verschoben

$$\angle P(j\omega^*) = -180^\circ - \pi \quad |k_P^*| = 1/|P(j\omega^*)|$$

Inversion der Regelstrecke:

Weghinweise:

- Strecke muss asympt. stabil und minimalphasig sein
- keine instabilen Pole oder nicht-minimalphasige Nullstellen kürzen
- Nominelle und wahre Strecke müssen die gleiche # instabile Pole und NHP Nullstellen haben → mit Vorsicht verwenden

$$L(s) = P(s) \cdot P(s)^{-1} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T)^2}$$

$$C(s) = \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T)^2}$$

$$T_i = \omega_c^{-1} \quad \omega_c < T_i \quad \omega_c < \omega_2$$

$$Y(s) = \frac{1}{T_i \cdot s + 1} R(s) + \frac{T_i \cdot s}{T_i \cdot s + 1} D(s)$$

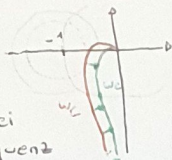
$$Y(s) = \frac{T_i \cdot s}{T_i \cdot s + 1} P(s) W(s)$$

→ c: relativer Grad

Iteratives Loop Shaping:

Ziel:

- gewisse Frequenzbänder abzuändern
- mehr Phasenreserve bei gleicher Durchtrittsfrequenz



Lead-Lag Element 1. Ordnung:

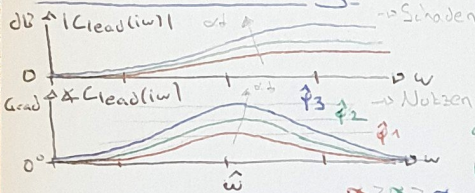
$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha, T \in \mathbb{R}^+$$

↳ ω_c oder ω_0 ablesbar

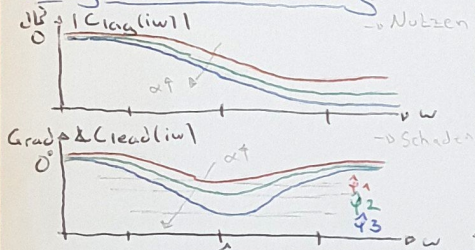
$0 < \alpha < 1 \Rightarrow$ Lead $\rightarrow$ Phasenreserve erhöhen, lokaler Differenziator
 $1 < \alpha \Rightarrow$ Lag $\rightarrow$ Folgeregelung, Stör-Unterdrückung, lokaler Integrator
 $\hat{\varphi}$: gewünschte Phasenverschiebung
 $\hat{\omega}$: gewünschte Frequenz

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\hat{\varphi}) \right)^2 \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \sqrt{\alpha}}$$

Lead Element 1. Ordnung:



Lag Element 1. Ordnung:



- Lag-Element mit $\hat{\varphi}$ entspricht einer Spiegelung des Magnituden- und Phasendiagramms des Lead-Elements mit $\hat{\varphi}$

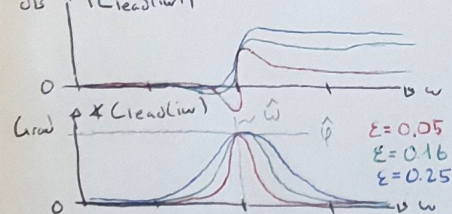
Lead-Lag Element 2. Ordnung:

$$C(s) = k \frac{s^2 + 2\zeta \cdot \varepsilon (1-\varepsilon) \omega_0 s + (1-\varepsilon)^2 \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \cdot \varepsilon (1+\varepsilon) \omega_0 s + (1+\varepsilon)^2 \omega_0^2}$$

$$k = \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2} \quad \zeta = \frac{\cot(\hat{\varphi}/2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

ε : Breite des Frequenzbandes
 - Element 2. Ordnung isolieren den Effekt stärker auf die gewünschte Frequenz

Lead Element 2. Ordnung:



Anti-Reset-Windup ARU:

- Aktuatoren haben eine beschränkte Leistung, was bei Reglern mit Integrator-Anteil zu Problemen führen kann
 - Output u muss beschränkt werden

Nützliches:

Tiefpass: $\rightarrow$ lässt tiefe Frequenzen durch



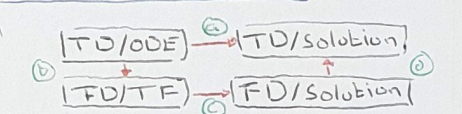
Hochpass: $\rightarrow$ lässt hohe Frequenzen durch



Bandpass: lässt gewisse Frequenzen durch



Weitere Zusammenhänge TD-FD:



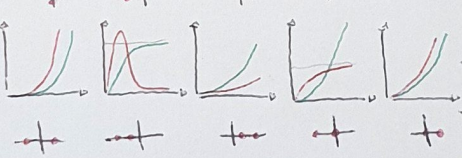
$$a: y(t) = c e^{At} x(0) + \int_0^t c e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau + d u(t)$$

$$b: \Sigma(s) = c(sI - A)^{-1} \cdot b + d$$

$$c: Y(s) = \Sigma(s) \cdot U(s)$$

$$d: y(t) = [2\pi i]^{-1} \oint Y(s) \cdot e^{st} ds$$

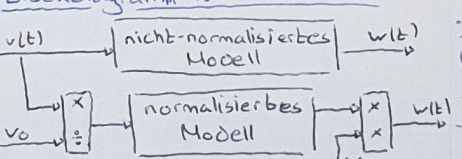
Auswirkung der Lage von Polen auf die Systemantwort:



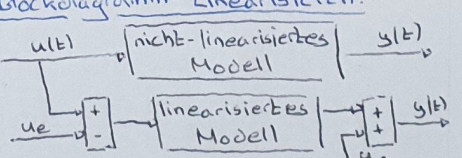
- Impulsantwort

- Sprungantwort

Blockdiagramm-Normalisieren:



Blockdiagramm-Linearisieren:



Auswirkung des relativen Grades auf die Sprungantwort:

$r=0 \Rightarrow$ Sprung bei $t=0$
 $r=1 \Rightarrow$ positive Steigung bei $t=0$
 $r>1 \Rightarrow$ Steigung von 0 bei $t=0$
 $r<0 \Rightarrow$ System nicht realisierbar und nicht simulierbar

Schwingendes Verhalten:

System muss mindestens 2. Ordnung sein

Tipps Systemklassifikation:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t) \cdot u(t) \quad x(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$$

$$y(t) = c(t) \cdot x(t) + d(t) \cdot u(t)$$

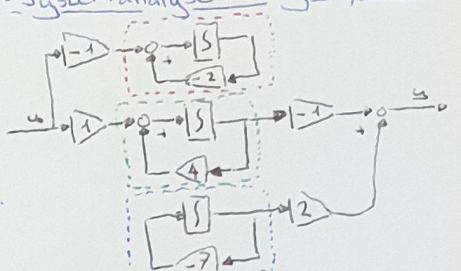
$\rightarrow$ MIMO, ZV, l, d, 1.
 $\rightarrow$ Koeffizienten hängen von t ab $\rightarrow$ ZV

$$\frac{d}{dt} x(t) = A \cdot x(t) + b \cdot u^*(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^4$$

$$y(t) = c \cdot x(t) \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}^1$$

$\rightarrow$ SISO, nl, zi, d, 1.
 $\rightarrow$ x und u dürfen von t abhängen $\rightarrow$ zi
 $\rightarrow$ nur u & y sind relevant für SISO/MIMO

Systemanalyse im Signalflussbild:



$\rightarrow$ diagonalisiertes System
 - Pole können direkt abgelesen werden

$\rightarrow$ $\pi: -7, -2, 4 \rightarrow$ instabil

$\rightarrow$ asymptotisch stabil

$\rightarrow$ nicht beobachtbar

$\rightarrow$ steuerbar

$\rightarrow$ instabil, beobacht- & steuerbar

$\rightarrow$ asymptotisch stabil

$\rightarrow$ beobachtbar

$\rightarrow$ nicht steuerbar

$\rightarrow$ System ist potentiell stabilisierbar und detektierbar

Aussagen zu BIBO/Lyapunov:

- Wenn der Ausgang für $t \rightarrow \infty$ nicht divergiert und nicht zu Null konvergiert, dann ist das System Lyapunov stabil $\times$

- Wenn der Ausgang für $t \rightarrow \infty$ divergiert, dann ist das System Lyap. instabil $\checkmark$

- Wenn der Ausgang für $t \rightarrow \infty$ zu Null konvergiert, dann ist das System Lyap. asymp. stabil $\times$

Spezielle Phasenreserve:

$$\angle L(i\omega_c) = 250^\circ \rightarrow 360^\circ - 250^\circ = -110^\circ$$

$$\rightarrow \varphi = 70^\circ$$

Systemklassifikation einer Übertragungsfunktion:

- linear, zeitvariant, dynamisch, SISO

$$\rightarrow$$
 Dsp: $\Sigma(s) = e^{-sT}$