

Regelungstechnik II

PID-Tuning:

→ Äström-Hägglund-Verfahren:

- Verallgemeinerung des Ziegler-Nicholas-Verfahrens → oft bessere Resultate
- Vorgehen äquivalent zu Ziegler-Nicholas

Tabelle für PI-Regler:

	$U_{min}=0.7$			$U_{min}=0.5$		
X	α_0	α_1	α_2	α_0	α_1	α_2
k_p/k_p^*	0.53	2.9	-2.6	0.13	1.9	-1.3
T_i/T^*	0.9	-4.4	2.7	0.9	-4.4	2.7
α	1.1	-0.061	1.8	0.48	0.4	-0.17

Tabelle für PID-Regler:

	$U_{min}=0.7$			$U_{min}=0.5$		
X	α_0	α_1	α_2	α_0	α_1	α_2
k_p/k_p^*	0.33	-0.31	-1	0.72	-1.6	1.2
T_i/T^*	0.76	-1.6	-0.36	0.59	-1.3	0.38
T_d/T^*	0.17	-0.46	-2.1	0.15	-1.4	0.56
α	0.58	-1.3	3.5	0.25	0.56	-1.2

Zusammenhänge:

$U_{min}=0.7 \Leftrightarrow$ konservativer, robuster
 $U_{min}=0.5 \Leftrightarrow$ aggressiver Regler

$x = \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot K} + \alpha_2 K^2$ statische Verstärkung
 $K^{-1} = 1/P(0) = k_p^* \quad x = [k_p/k_p^*, T_i/T^*, T_d/T^*]$

Direktspezifikation:

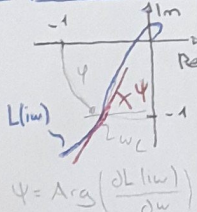
Vorgehen:

- Wahl der gewünschten und geeigneten Werte von w_c , φ und ψ (Steigung von $L(i\omega)$)
- Berechnung von k_p , T_i , T_d

Definitionen:

$P(i\omega_c) = r_p e^{i\varphi_p}$
 Magnitude (Phase)
 $r_p = \left| \frac{\partial P(i\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}$
 $\varphi_p = \left| \frac{\partial \varphi_p}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c}$

Graphische Darstellung:



Zusammenhänge:

$k_p = -\frac{1}{r_p} \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)$ in Radian
 $T_d = \frac{1}{2} \left[\tan(\varphi - \varphi_p) \left(\frac{r_p}{r_p} - \varphi_p \tan(\varphi - \varphi_p) \right) + \tan(\varphi - \varphi_p) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r_p}{r_p} \right) - \varphi_p \right]$
 $T_i = (T_d \cdot \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_p) \cdot \omega_c)^{-1}$

Bemerkungen:

- Ableitungen können durch finite Summen approximiert werden
- nicht immer sinnvolle Lösungen
- Stabilität ist nicht garantiert, in Nachhinein überprüfen
- Plausibilität z.B. mit Ziegler-Nicholas abschätzen

Prädiktiver PI-Regler:

Anwendung:

- einfache Regelstrecke 1. Ordnung mit signifikanter Totzeit $P(s) \approx \frac{k}{s+1} \cdot e^{-Ts}$
- $\frac{T}{T+1} > 0.3 \Leftrightarrow$ Totzeit signifikant

Annahmen:

- O-Term versagt bei Totzeit
- kein Regler kann die Totzeit aus dem System entfernen
- da die beiden geschlossenen Regelkreisse $T(s)$, $S(s)$ müssen die gleiche Totzeit aufweisen

Formeln:

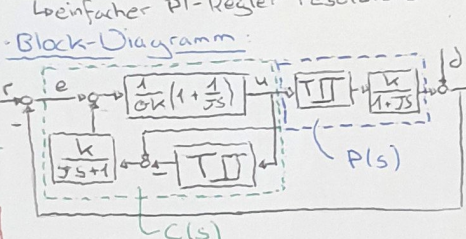
$T^*(s) = \frac{1}{sT+1} \cdot e^{-sT} = \frac{1}{1+sT}$

$(s) = \frac{s+1}{k \cdot 10 \cdot s+1} \cdot e^{-Ts}$

$U(s) = \frac{1}{0.1} \left(1 + \frac{1}{s} \right) E(s) - \frac{1}{0.1s} (1 - e^{-Ts}) U(s)$

PI-Regler prädiktive Korrektur
 $T=0$: prädiktive Korrektur wird 0
 Leinfacher PI-Regler resultiert

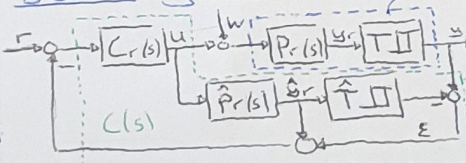
Block-Diagramm:



Smith Predictor:

Allgemeiner prädiktiver Regler

Block-Diagramm:



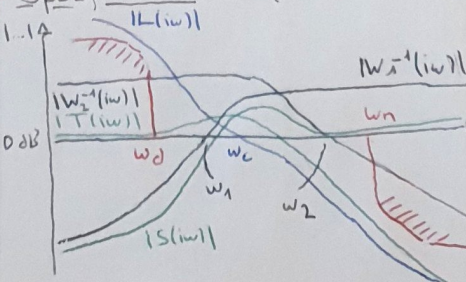
Eigenschaften:

- $P(s) = P_r(s) \cdot e^{-Ts}$
- entwerfe $C_r(s)$ als ob $P(s) = P_r(s)$
- keine Totzeit vorhanden
- kompensiert Modellfehler und Störungen

Übertragungsfunktionen:

$C(s) = \frac{1}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot (1 - e^{-Ts})}$
 $T(s) = \frac{C_r(s) P_r(s) e^{-Ts}}{1 + C_r(s) P_r(s)}$

Spezifikation: Graphisch

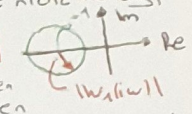


Multiplikative Spezifikation an die Sensitivität:

Nominelle Regelaufgabe:

Beschränkung für den Betrag der Sensitivität (Phase ist nicht wichtig)

$|W_1(i\omega)| < |1 + L(i\omega)|$

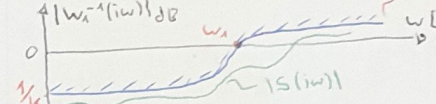


- $|L(i\omega)|$ darf nicht in den grünen Kreis eintreten
- $|W_1(i\omega)|$ ist verschieden bei unterschiedlichen Werten von ω

Konstruktion von W_1 (Beispiel)

$W_1(s) = k \frac{s+1}{s+1} \quad \gamma^2 = \frac{k^2-1}{w_1^2 (\alpha^2-k^2)}$

$|W_1(i\omega)| = 1, k > 1, \alpha > k$



Robuste Regelaufgabe:

Nyquist Theorem und Bedingungen an die Sensitivität sollen gleichzeitig erfüllt sein

$|W_1(i\omega) S(i\omega)| + |W_2(i\omega) T(i\omega)| < 1$

$|W_1(i\omega)| + |W_2(i\omega) L(i\omega)| < |1 + L(i\omega)|$

- Betrag von W_1 ist abhängig von ω

Approximative Spezifikation:

- tiefe Frequenzen:
 $\omega < 0.1 \omega_c \Rightarrow |L(i\omega)| > 1$
 $|W_1(i\omega)| + |W_2(i\omega) L(i\omega)| < |L(i\omega)|$
 $|L(i\omega)| > \frac{|W_2(i\omega)|}{1 - |W_2(i\omega)|}$

- hohe Frequenzen: $\omega > 10 \omega_c \Rightarrow |L(i\omega)| < 1$
 $|W_1(i\omega)| + |W_2(i\omega) L(i\omega)| < 1$
 $|L(i\omega)| < \frac{1 - |W_2(i\omega)|}{|W_2(i\omega)|}$

Kompatibilitätsbedingung:

$w_1 < w_c < w_2 \quad |w_1 \approx \max\{10w_d, 2w_g\}|$

$w_1 \uparrow \Leftrightarrow$ Phasenreserve $\uparrow \Leftrightarrow |G(i\omega)| \downarrow$

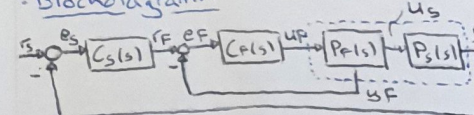
$|S(i\omega)| = [\frac{1}{2} \sqrt{1 - \cos \varphi}]^{-1}$

Kaskadierte Regelsysteme:

Anwendungsfall:

- SISO-Systeme mit einer schnellen und einer langsamen Teildynamik

Blockdiagramm:



Funktionsweise:

- innerer, schneller Regelkreis ohne Berücksichtigung des Äußeren → Speed
- äußerer, langsamer Regelkreis mit geschlossenem Inneren → Accuracy

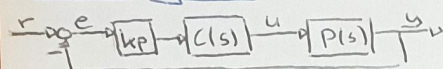
Bemerkungen:

- y_F ist oft proportional zu u_S
- $C_f(s)$: nur ein P-Regler (Speed)
- Sensoren sind deutlich günstiger als Aktuatoren

Wurzelortskurven (Root-Locus):

→ Verfahren bei dem man die Pole des geschlossenen Regelkreises nach Wunsch setzen kann

Blockdiagramm:



- $C(s)$ wird Kompensator genannt
- k_p wird vom Kompensator abgespalten
- $k_p > 0$
- $L(s)$: stabil, minimalphasig

Definition:

Wurzelortskurven entstehen, wenn man die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle k_p zeichnet

Eigenschaften:

$$T(s) = \frac{k_p \cdot L(s)}{1 + k_p \cdot L(s)} \quad \rightarrow \text{Pole: } 1 + k_p L(s) = 0$$

$$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{(s - \xi_1) \dots (s - \xi_m)}{(s - \pi_1) \dots (s - \pi_n)}$$

→ charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$$p(s, k_p) = a(s) + k_p \cdot b(s) = 0 \quad \rightarrow \text{Schar der Nullstellen}$$

→ Approximation für kleine k_p : ($k_p \rightarrow 0$)

$$p(s, k_p) \approx a(s) \quad | \quad p(s, 0) = a(s) = 0$$

→ Die Pole von $T(s)$ starten bei den Polen von $L(s)$

→ Approximation für grosse k_p : ($k_p \rightarrow \infty$)

$$p(s, k_p) \approx k_p \cdot b(s) \quad | \quad p(s, \infty) = b(s) = 0$$

→ m Nullstellen von $p(s, k_p)$ konvergieren zu den m endlichen Nullstellen von $b(s)$

→ die $n-m$ anderen Nullstellen gehen gegen unendlich entlang von senkrechten Asymptoten

⚠ Nullstellen im Unendlichen haben keinen Einfluss auf die Systemdynamik

→ Startpunkt der Asymptoten: $\sigma_a + i \cdot 0$

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\xi_i) \right)$$

→ Startwinkel der Asymptoten:

$$\delta_i = \frac{\pi}{n-m} (2(i-1) + 1) \quad [rad] \quad i=1, \dots, n-m$$

Zugehörigkeitsbest:

→ Test, ob ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ auf der Wurzelortskurve liegt

$$\sum_{i=1}^m \angle(z - \xi_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) = -\pi \pm k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

Bsp.:

$$L(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$n=3, m=1$$

$$n-m=r=2$$

$$\xi_1 = -4; \pi_1 = -1, -2, -3$$

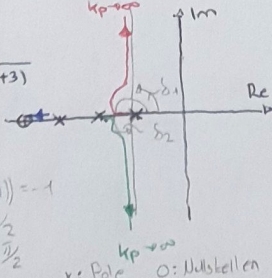
$$\sigma_a = \frac{1}{2} (-1-2-3 - (-4)) = -1$$

$$\delta_1 = \frac{\pi}{2} (2 \cdot 0 + 1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\delta_2 = \frac{\pi}{2} (2 \cdot 1 + 1) = \frac{3\pi}{2}$$

→ Test: $z = -3.5 + i \cdot 0$

$$\angle(-3.5+4) - \angle(-3.5+1) - \angle(-3.5+2) - \angle(-3.5+3) = 3\pi \quad \checkmark$$



Kompensierung mit dem Wurzelortungsverfahren:

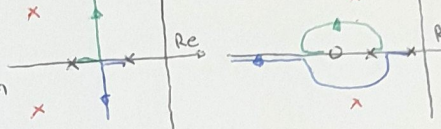
→ mit Hilfe des Zugehörigkeitsbest findet man das passende $C(s)$

→ Anwendung an einem Beispiel: von $T(s)$

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \quad \rightarrow \text{gewünschte Pole: } s_{1,2} = -4 \pm i \cdot 4$$

$$\rightarrow C_1 = 1$$

$$\rightarrow C_2 = s + \xi$$



$$L = \frac{(s+\xi)}{(s+1)(s+3)} \quad \rightarrow \Delta L = \Delta(s+\xi) - \Delta(s+1) - \Delta(s+3)$$

$$\rightarrow S = s^* \quad \rightarrow \angle(-4+4i+\xi) - \angle(-4+4i+1) - \angle(-4+4i+3) =$$

$$\angle(-4+4i+\xi) - \angle(-4+4i+1) - \angle(-4+4i+3) =$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{4}{\xi-4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4}{-1}\right) = \pi$$

$$\rightarrow \xi = -7.25 \text{ rad/s}$$

$$\gamma = -\pi + \alpha + \beta \quad \rightarrow \xi \approx 7.25 \text{ rad/s}$$

Numerische Verfahren:

Ziel:

Mit Hilfe eines Optimierungsproblem die Regelparameter bestimmen

→ für eine fixe Regelstruktur (z.B. PI)

Kostenfunktion:

$$J(k_p, T_i) = K_1 \cdot g_1 + K_2 \cdot g_2 + K_3 \cdot g_3$$

→ K_i : Tuning-Parameter, Mass für die Wichtigkeit der Grösse g_i , nur das relative Verhältnis der K_i spielt eine Rolle

→ Mass für den kumulativen Fehler:

$$g_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt \quad \rightarrow \text{Fehlerquadrat}$$

→ Mass für maximales Überschossen:

$$g_2 = \max_{t \in [0; \infty]} (y(t) - 1)$$

→ Sollwert-sprung mit Betrag 1

→ Mass für Robustheit:

$$g_3 = 1 - \min_{\omega \in [0; \infty]} |1 + L(j\omega)|$$

$$g_3 = 1 - \min_{\omega \in [0; \infty]} |1 + L(j\omega)|$$

Bemerkung:

→ Integration bis zu einem t_{stop}

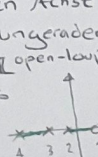
$$e(t_{stop}) \ll 1$$

→ Startwerte für Optimierung z.B.:

mit Ziegler-Nicholas bestimmen

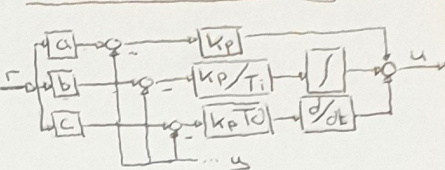
Tipps zum Zeichnen von Wurzelortskurven:

→ Der Abschnitt der reellen Achse, welcher links von einer ungeraden Zahl von P open-loop & Z open-loop steht ist Teil des Locus



PID Regler in der Praxis:

Set Point Weights:



Eigenschaften:

Referenzsignal wird für jeden Teil des Reglers mit einer separaten Verstärkung multipliziert → "r wird vermasselt"

→ a :

$0 < a < 1$, gemäss Åström Hägglund

→ b :

$b = 1$, kein statischer Nachlauffehler

→ c :

$c = 0$, schnelle Referenzen bewirken

grosse Ableitungen ($\frac{d}{dt}(r-u) \approx \frac{d}{dt}r$)

→ man will aber Änderungen des Ausgangssignal dämpfen

Saturationen & ARW:

(Anti Reset Windup)

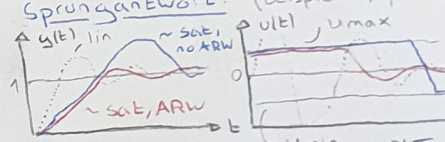
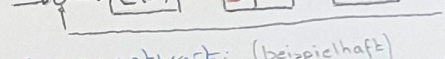
Problem:

→ Nichtlinearitäten im Regelsystem

→ Aktuatoren können in der Realität nie beliebig kleine oder grosse Sollsignale $u(t)$ umsetzen

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u_{min} & \text{falls } u(t) < u_{min} \\ u(t) & \text{falls } u(t) \in [u_{min}, u_{max}] \\ u_{max} & \text{falls } u(t) > u_{max} \end{cases}$$

Blockdiagramm:



Lösung:

→ weil das System langsamer reagiert als erwartet, kann sich der Integrator über eine längere Zeit füllen

→ Antwort überschiesst das Ziel stärker, da der Integrator sich zuerst leeren muss

$$q(t) = u(t) - \bar{u}(t)$$

→ $|u(t)| = |\bar{u}(t)|$ → nicht saturiert

$q(t) = 0$ → ARW macht nichts

→ $|u(t)| > |\bar{u}|$ → Saturation

die zu integrierende Grösse wird reduziert

→ $q(t) \neq 0$

→ man muss die Saturationpunkte der Nichtlinearität kennen

→ weil das System langsamer reagiert als erwartet, kann sich der Integrator über eine längere Zeit füllen

→ Antwort überschiesst das Ziel stärker, da der Integrator sich zuerst leeren muss

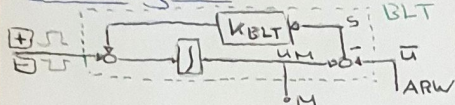
→ weil das System langsamer reagiert als erwartet, kann sich der Integrator über eine längere Zeit füllen

→ Antwort überschiesst das Ziel stärker, da der Integrator sich zuerst leeren muss

Bumples Transfer:

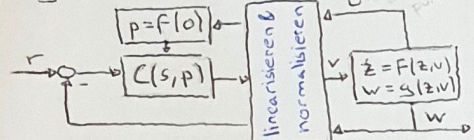
- Übergang von einem manuellen Modus (M) zu einem automatischen Modus (A) → möglichst reibungslos
- Nützlich beim Testen von Systemen

Blockdiagramm:



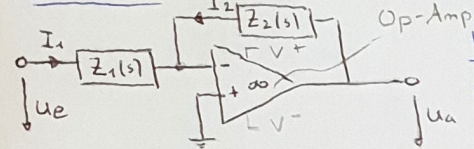
Gain Scheduling:

- Verwendung von verschiedenen linearen Regler für die unterschiedlichen Betriebspunkte, um die ein nichtlineares System linearisiert wurde



Analoge Realisierung:

Schaltbild:



Eigenschaften:

- Gain-Op-Amp $\approx \infty \Rightarrow I_1 + I_2 = 0$
- $I_1 = \frac{U_{e1}(s)}{Z_1(s)}$ $I_2 = \frac{U_{e2}(s)}{Z_2(s)}$
- $\bar{Z}(s) = \frac{U_{e1}(s)}{U_{e2}(s)} = -\frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$ System

Elemente: - keine Systeme

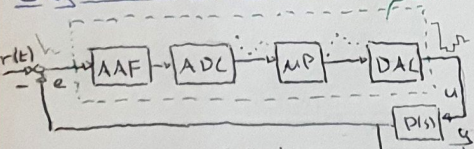
- Widerstand: $Z_R(s) = R$
- Kapazitäten: $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$
- Induktoren: $Z_L(s) = sL$
- Serie: $Z_{\text{tot}} = Z_1 + Z_2$
- Parallel: $Z_{\text{tot}} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$

Zeitdiskrete Realisierung:

Umwandlung eines kontinuierlichen Regler (s) in einen diskreten (z)

- Abtastzeit: T_s
- $t_n = n \cdot T_s = n / F_s$ Taktfrequenz $n = 0, 1, 2, \dots$

Digitales Regelsystem:



ADL: Analog to digital Converter → zeitkontinuierlich zu zeitdiskret

MP: Mikroprozessor → $u[k] = u(n \cdot T_s)$

DAL: Digital to analog Converter → zeitdiskret zu zeitkontinuierlich

AAF: Analog anti-aliasing Filter → Tiefpassfilter, da ein zeitdiskretes Signal nicht beliebig hohe Frequenzen repräsentieren kann

Zero-order-Hold: (ZOH)

- $u(t) = u(k) \quad \forall t \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s]$
- Eingang wird zwischen 2 Berechnungsschritten konstant gehalten

Gültigkeit: $T_s \ll T_c / 10 \quad \omega_c = 2\pi / T_c$

Z-Transformation:

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x(k)$$

Eigenschaften:

- Linearität: $Z\{x+y\} = Z\{x\} + Z\{y\}$
- Vorwärts-shift: $x(k+1) = Z\{X(z) - z^{-1} X_0\}$
- Rückwärts-shift: $x(k-1) = Z\{X(z) \cdot z^{-1}\}$
- Zusammenhang $s \leftrightarrow z \quad z = e^{sT_s}, s = \frac{\ln(z)}{T_s}$

Bsp. Asymptotischer Pol $z = e^{0T_s + wT_s} = e^{0T_s} = 1$

→ $0 < \alpha < 1 \Rightarrow 0 < |z| < 1 \Rightarrow |z| < 1$

Emulation: $C(s) \rightarrow C(z)$

Da der Zusammenhang zwischen s & z nichtlinear ist wird er durch eine Emulation approximiert

- Euler Forward $z = e^{sT_s} \approx 1 + sT_s \quad s \approx \frac{z-1}{T_s}$
- Euler backward $z = \frac{1}{e^{-sT_s}} \approx \frac{1}{1-sT_s} \quad s \approx \frac{z-1}{zT_s}$
- Tustin Emulation $z = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \approx \frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2} \quad s \approx \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}$

→ Eigenschaften: ganze linke-Halbebene wird in einen Kreis mit Radius kleiner 1 gemappt

Gültig für Tustin & Euler backward

Algebraische Stabilitätskriterien:

Ziel: $|1+L(s)| > 0$

Zeigen, dass ein Polynom nur Nullstellen in der linken komplexen Halbebene hat

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Hurwitz Kriterium: $a_i > 0$

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

→ alle Hauptuntermatrizen müssen positiv definit sein → alle EW > 0

Kharitonov Kriterium:

→ a_i sind nicht bekannt, aber das Intervall

$$p(s, \alpha) = [a_n, \bar{a}_n] s^n + [a_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] s^{n-1} + \dots + [a_1, \bar{a}_1] s + [a_0, \bar{a}_0]$$

$$P_1(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \dots$$

$$P_2(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \dots$$

$$P_3(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \dots$$

$$P_4(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 s + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s^3 + \bar{a}_4 s^4 + \dots$$

→ Hurwitz Kriterium für jedes Polynom

→ Ecken eines Rechtecks in der komplexen Ebene

MIMO-Systeme:

Systembeschreibung:

Zustandsraumdarstellung:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad y \in \mathbb{R}^p$$

Kreuzkopplungen:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) & \dots & P_{1,m}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) & \dots & P_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1}(s) & P_{p,2}(s) & \dots & P_{p,m}(s) \end{bmatrix}$$

$$P_{i,j}(s) = u_j \rightarrow u_i$$

Übertragungsfunktionen:

→ Reihenfolge der Multiplikation spielt eine Rolle, da es sich um Matrizen handelt

→ Stabilität nach Lyapunov:

→ identisch zu SISO

Steuerbarkeit:

$$R_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$$

→ Rang = n: voll. steuerbar

Beobachtbarkeit:

$$O_n = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^{n-1})^T C^T]^T \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$$

→ Rang = n: voll. beobachtbar

Pole & Nullstellen:

Matrix Minoren:

Determinanten aller quadratischen Submatrizen

→ auch die ganze (falls $\square$)

→ auch Einzelemente

Polstellen:

Nullstellen des kgV der Nennerpolynome aller Minoren von $P(s)$

Nullstellen:

Nullstellen des ggT der Zähler der Minoren höchster Ordnung von $P(s)$ nach der Normalisierung, bei der alle Pole von $P(s)$ im Nenner stehen

Bsp.: Pole- & Nullstellen

$$P(s) = \begin{bmatrix} 2(s+2) & 3 \\ s+1 & s+1 \\ 1 & 1 \\ s+1 & s+2 \end{bmatrix}$$

→ Pole: $\frac{2(s+2)}{s+1}, \frac{3}{s+1}, \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2s-1}{(s+1)^2}$

1) Minore:

2) kgV der Nennerpolynome: $(s+1)^2(s+2) = 0$

3) Nullstellen: $s = -1, -1, -2$

Nullstellen:

1) Minor höchster Ordnung:

2) Normalisieren: → alle Pole von $P(s)$ stehen im Nenner

3) Nullstellen des ggT der normalisierten größten Minoren

Minimale Ordnung: $\text{Ordnung} = \max\{\# \sigma, \# \pi\}$

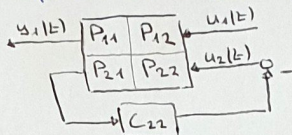
Relative Gain Array (RGA):

Nutzen:

sagt aus, wie nahe man bei einem SISO-System ist -> kann ein SISO-Regler verwendet werden

Herleitung:

(am Beispiel eines 2x2-Systemes)



-> Extremfall 1: open loop

$C_{22} = 0$, $P_{u1-u1}(s) = P_{11}(s)$

-> alle anderen Eingänge sind 0

-> Extremfall 2: closed loop

$C_{22} \rightarrow \infty$, $P_{u1-u1}(s) = P_{11} \cdot P_{22} - P_{12} \cdot P_{21}$

-> alle anderen Ausgänge sind 0

-> Relative Gain:

$$[RGA(s)]_{11} = \frac{P_{11} \cdot P_{22}}{P_{11} \cdot P_{22} - P_{12} \cdot P_{21}}$$

= open loop / closed loop

= Einfluss von u_1 auf y_1 / Einfluss von u_1 & u_2 auf y_1

-> SISO-fähiges System: $RGA \approx 1$

-> keine Kreuzkopplungseffekte
-> kann mit 2 SISO-Reglern geregelt werden

-> Nicht-SISO-fähiges System: $RGA \neq 0$

-> Kreuzkopplungseffekte
-> keine SISO-Regler anwendbar

-> Instabiles Verhalten: $RGA < 0$

-> SISO-Regler hat entgegengesetzte Wirkung -> destabilisiert das System
-> SISO & MIMO weisen unterschiedliche Vorzeichen auf

-> RGA einer 2x2 Regelstrecke $P(s)$:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -P_{12}P_{21} & P_{11}P_{22} \\ P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12} & -P_{12}P_{21} \end{bmatrix}$$

-> RGA einer allgemeineren Strecke:

$$RGA(s) = P(s) \cdot X P(s)^{-T}$$

X -> elementweise Multiplikation
 $P(s)^{-T} = [P(s)^{-1}]^T$ -> Transponierte der Inverse

-> Eigenschaften der RGA-Matrix:

-> Summe der Zeilen & Spalten = 1

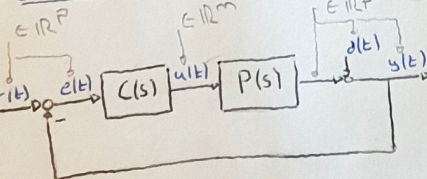
-> Invariant bezüglich

$$RGA(P_1 P_2) = RGA(P_1) \cdot RGA(P_2)$$

-> RGA einer Dreiecksmatrix ist I

-> RGA ist symmetrisch (nur bei 2x2)

-> Blockdiagramm: MIMO-System:



Singularwerte:

Lineare Abbildung:

$$y = M \cdot u, u \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^p, M \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

Matrixnorm:

$$\|M\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|Mu\|}{\|u\|} = \max_{\|u\|=1} \|Mu\| = \max \{\sigma_i(M)\}$$

Singularwerte:

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(M^T \cdot M)}$$

M^T -> Transponierte der komplex-konjugierten

$M^T \cdot M$ -> symmetrisch, hermitisch, $Q^T = Q$

$$\sigma_{\min}(M) \leq \frac{\|u\|}{\|u\|} \leq \sigma_{\max}(M)$$

Euklidische Norm:

-> komplexe Zahl: $z = a + ib$

$$\|z\|^2 = a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib) = \bar{z} \cdot z$$

-> Vektor:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 = \sum_{i=1}^n (a_i - ib_i)(a_i + ib_i) = \bar{v}^T \cdot v$$

Singularwertzerlegung (SVD):

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

$U \in \mathbb{C}^{p \times p}$, $\Sigma \in \mathbb{C}^{p \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$

Σ : Matrix mit σ_i auf der Hauptdiagonalen

-> U, V^T : unitäre, längen erhaltende Transformationsmatrizen

-> Rotation + Spiegelung

$$U \cdot U^T = I, V \cdot V^T = I, U^T = U^{-1}, V^T = V^{-1}$$

Rotationsmatrizen:

-> Drehung um x-Achse:

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

-> Drehung um y-Achse:

$$R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

-> Drehung um z-Achse:

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-> Drehung im 2D, 3 Zeile & Spalte streichen

Spiegelung:

-> x-Achse:

$$\text{diag}(-1, 1, 1)$$

-> 2. Dimension:

$$\text{diag}(1, -1, 1)$$

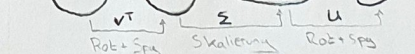
-> 3. Dimension:

$$\text{diag}(1, 1, -1)$$

-> Reihenfolge: z.B. 1.) Rot 2.) Spiegel -> $M = S \cdot R$

Graphische Darstellung:

-> SVD: Für 2 beliebige Vektoren



Singularwerte:

σ_i : Eingangsraum

$$\{u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \mid \|u\|=1\}$$

σ_i : Ausgangsraum

$$y = M \cdot u$$

-> Zusammenhang:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$$

σ_i : Eingangsrichtung

σ_i : zugehöriger Singularwert

σ_i : Ausgangsrichtung

$$x_{\max} = V \cdot e_1$$

$$x_{\min} = V \cdot e_m$$

Pole:

$$M(s)|_{s=0} = \delta_{\pi_i}$$

$$\rightarrow \infty \cdot \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

Nullstellen:

$$M(s)|_{s=0} = \delta_{\pi_i}$$

$$\rightarrow 0 \cdot \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi_i} = \delta_{\pi_i}$$

$$\delta_{\pi$$

Bsp: Frequenzantwort MIMO

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1} & \frac{0.2}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.2}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix}$$

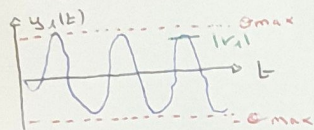
$$P(0.7i) = U \Sigma V^T =$$

$$\begin{bmatrix} -0.87 + 0.36i & 0.31 - 0.11i \\ -0.22 + 0.25i & -0.67 + 0.67i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.5 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.93 & -0.35 + 0.05i \\ 0.36 & -0.92 + 0.14i \end{bmatrix}$$

$$U_{\max} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ -0.35 + 0.05i \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Polar} \\ \text{abs} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0.93 e^{i\pi} \\ 0.36 e^{i2.93} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{abs} \\ \text{angle} \end{matrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.93 \cos(0.7t + \pi) \\ 0.36 \cos(0.7t + 2.93) \end{bmatrix}$$



Übertragungsfunktionen MIMO:

$$T(s) = [I - P(s) \cdot C(s)]^{-1} P(s) C(s)$$

$$S(s) = [I - P(s) \cdot C(s)]^{-1}$$

$$D(s) = I + P(s) C(s)$$

L: return difference

Vergleich SISO - MIMO bei

Extremalverhalten:

$$u = \min_w \{ \|1 + L(i\omega)\| \}$$

$$u = \min_w \{ \min_{\omega} \{ \|1 + L(i\omega)\| \} \}$$

$$\|S(s) W(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \{ \|S(i\omega) W(i\omega)\| \} < 1$$

$$\|S(s) W(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} \{ \max_{\omega} \{ \|S(i\omega) W(i\omega)\| \} \}$$

Zustands-Feedback

Controller:

Regulator-Problem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad u(t) = F(x, t)$$

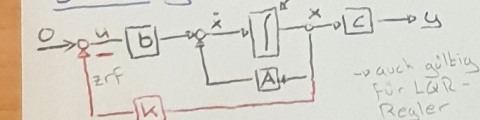
→ Regler bringt den Zustandsvektor in unendlicher Zeit in den Ursprung
→ Steuersignal ist eine Funktion des Zustandes

→ System: $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad x(0) = x_0 \neq 0$
→ LTI-System mit Anfangswert $\neq 0$

→ SISO: Eigenwert-

Platzierung:

Blockdiagramm:



$$\dot{x} = Ax + bu \quad u = -kx$$

Vorgehen:

man wählt $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ so, dass alle Eigenwerte von $A - bk$ negativen Realteil haben

$$\lambda_i \{A\} = 0$$

$$\lambda_i \{A - bk\} = \square$$

Vorgabe von uns

Voraussetzung:

System $\{A, b\}$ muss vollständig steuerbar sein $\rightarrow \det(R) \neq 0$

Methoden:

- Hurwitz-Kriterium anwenden

- Formel von Ackermann

- Formel von Ackermann:

- Wahl eines charakteristischen Polynoms:

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

- Definition des Vektors q:

$$q = [0, 0, \dots, 0, 1] \cdot R^{-1}$$

- Definition von k: $k = q \cdot \alpha(A)$

Bemerkungen:

- Robustheit kann klein ausfallen

- Ansatz funktioniert für MIMO nicht

→ MIMO: LQR:

Ansatz der einen intuitiven Trade-off zwischen Regelfehler- und Aufwand erlaubt

Nomenklatur:

LQR: linear quadratic Regulator

→ linear:

geregeltes System ist linear $\rightarrow \dot{x} = Ax + Bu$

→ quadratisch:

Definition einer quadratischen Kostenfunktion

$$J(u(t)) = \int_0^\infty x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt$$

Eindeutige Lösung

$$u^*(t) = \arg \min u^*(t)$$

Optimale Eingang $u^*(t)$

minimiert die Kostenfunktion

$$Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, Q \geq 0$$

$$R = R^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, R > 0$$

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

positiv definit

Erste Wahl von Q & R:

$$R = r \cdot I_{m \times m}, r > 0$$

$$Q = C^T C, C: \text{wahre Messmatrix}$$

$$y = Cx$$

$$\text{Interpretation von } \bar{z} = C: y = Cx$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

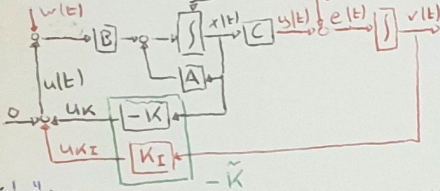
$$x^T Q x = x^T C^T C x = x^T C^T C x = y^T y = \|y\|_2^2$$

→ LQRI - Störunterdrückung:

• Ziel:

Erweiterung der LQR-Formulierung mit einem Integrator, um Störungen $w(t)$ auf das Eingangssignal $u(t)$ & Modellfehler zu kompensieren $\rightarrow y(t) = 0 = v$

• Blockdiagramm: $x(t) \neq 0$



• Lösung:

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} d\tau = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau \in \mathbb{R}$$

→ neuer Gesamtzustand: $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

→ angepasste LQR-Matrizen

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{K} = [K, -K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)} \rightarrow \tilde{K} \text{ ist stabil}$$

$$u(t) = -\tilde{K} \tilde{x}(t) = u_K + u_{KI} = -Kx(t) + K_I v(t)$$

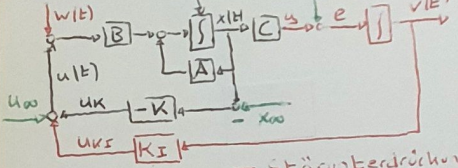
Q_I : einstellen der Stärke des Integrators

→ Folgeregelung & Störunterdrückung:

• Ziel:

Erweiterung des LQRI-Ansatz mit den Feedforwardsignalen u_∞ & x_∞ , um zusätzlich noch Folgeregelung zu erreichen

• Blockdiagramm:



• Lösung:

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)} d\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

→ Ableitung des neuen Zustandes:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(t)$$

→ angepasste LQR-Matrizen:

$$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, \tilde{K} \text{ wie bei LQRI}$$

$$u(t) = u_\infty - K(x(t) - x_\infty) + K_I v(t)$$

$$u(t) = u_\infty - K(x(t) - x_\infty) + K_I v(t)$$

$$u(t) = u_\infty - K(x(t) - x_\infty) + K_I v(t)$$

$$u(t) = u_\infty - K(x(t) - x_\infty) + K_I v(t)$$

$$u(t) = u_\infty - K(x(t) - x_\infty) + K_I v(t)$$

$$u(t) = u_\infty - K(x(t) - x_\infty) + K_I v(t)$$

→ Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern:

• Robustheit:

$$\mu_{\min, LQR} = \min(\min \sigma_i(I + L_{LQR}(i\omega)) \geq 1$$

→ falls $R = r \cdot I$

→ geometrische Interpretation SISO:

L_{LQR} → Verstärkungsreserve: $V \in [0.5, \infty]$

→ Phasenreserve: $\varphi \geq 60^\circ$

→ Verbesserung der Robustheit:

→ modifizierte Riccati-Gleichung: $\beta > 1$

$$\frac{1}{\beta} \phi_P \cdot A \cdot B \cdot R^{-1} \cdot \phi_P - \phi_P \cdot A \cdot A^T \cdot \phi_P - Q = 0$$

→ verbessertes $\mu_{\min}$:

$$\mu_{\min, LQR} = \min(\min \sigma_i(\beta I + L_{LQR}(i\omega)) \geq \beta$$

→ Nyquist-Plot tritt nie in den um $-\beta$ zentrierten Kreis mit Radius β

→ Grenzwert $\beta \rightarrow \infty$:

$\phi_P \cdot A \cdot A^T \cdot \phi_P - Q = 0$ → neue Riccati-Gleichung

ϕ_P existiert $\Leftrightarrow A$ ist eine Hurwitz-Matrix

$\Leftrightarrow$ System ist bereits ohne Regler schon stabil

→ Beschränkung von S & T:

$$\max_w (\max_i \sigma_i(S(i\omega)) = 1 \quad \max_w (\max_i \sigma_i(T(i\omega)) = 2$$

• Stabilität:

→ geschlossener Regelkreis ist garantiert stabil $\rightarrow$ Pole $(T) \Rightarrow |N| - (A - BK) = 0$

→ Finite Horizon LQR:

• Ziel:

Beschränkung der unendlichen Integrationszeit auf das Zeitintervall $[t_a, t_b]$

→ Vorteil: System kann zeitvariant sein

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \quad x(t_a) = x_a$$

• Kostenfunktion:

$$J(u) = x^T(t_b) P x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} (x^T Q(t) x + u^T R(t) u) dt$$

→ P: Kostenmatrix, neue Tuninggröße

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, P \geq 0$ (positiv semidefinit)

→ Abweichung des finalen Zustands $x(t_b)$ zum Ursprung wird bestraft

mit Speicher

$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) \quad K(t) = R^{-1}(t) B^T(t) \Phi(t)$$

→ $K(t)$ ist zeitabhängig und muss jeweils aufs Neue berechnet werden

→ $K(t)$ ist nur für $t \in [t_a, t_b]$ gültig

→ differentielle Matrix Riccati Gleichung:

$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \Phi(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) \Phi(t) - \Phi(t) A(t) - A^T(t) \Phi(t) - Q(t)$$

→ $\Phi(t)$ kann durch Rückwärtsintegration von $\Phi(t_b) = P$ gefunden werden

• Bemerkung:

asymptotische Stabilität kann nicht garantiert werden, weil für $t > t_b$ nicht optimiert wird

• Folgeregelung:

$$J(u) = (r(t_b) - y(t_b))^T P (r(t_b) - y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} (r(t) - y(t))^T Q(t) (r(t) - y(t)) + u^T(t) R(t) u(t) dt$$

$$u(t) = -K(t) x(t) + v(t)$$

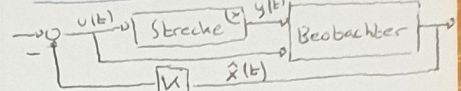
→ für $v(t)$ gelten die gleichen Eigenschaften wie für $K(t)$

• Blockdiagramm:

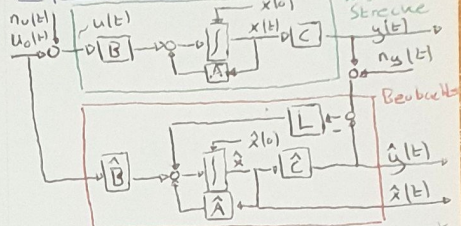


→ Zustands Beobachter:

• Grundidee:



• Input Injection: → Luenberger Beobachter



→ Beobachter:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))$$

$$\hat{y}(t) = C \hat{x}(t)$$

→ Beobachtungsfehler:

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

→ Herleitung:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} \hat{x}(t)$$

$$= A x(t) + B u(t) - (A \hat{x}(t) + B u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)))$$

$$= A(x(t) - \hat{x}(t)) - L(C x(t) - C \hat{x}(t))$$

$$= (A - LC) \tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0$$

Beobachtungsfehler konvergiert gegen 0

$\Leftrightarrow$ Matrix $(A - LC)$ ist Hurwitz

• Lösung:

→ Polplatzierung von Hand:

$$\det(A - LC - nI) = (n_1 - d)(n_2 - d) \dots (n_n - d) = 0$$

n_i : gewünschte Eigenwerte

→ Polplatzierung mit LQR Formulierung:

$$\text{eig}(X) = \text{eig}(X^T)$$

$$\text{eig}(A - LC) = \text{eig}((A - LC)^T) = \text{eig}(A^T - C^T L^T)$$

$$\text{eig}(A - LC) = \text{eig}(A^T - C^T L^T) \Rightarrow \text{eig}(A - B K)$$

$$\begin{bmatrix} A - BK & A & B \\ A - LC & A^T & C^T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K \\ L^T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}$$

→ B & q werden iterativ eingestellt

• Beobachterverstärkung L :

- L ist stabil

- L kann nicht beliebig gross gewählt werden

→ hochfrequenten Rauschen wird verstärkt

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC) \tilde{x}(t) - L n(t)$$

Erwartungswert = 0

• Kovarianzmatrix:

$$E\{n(t) \cdot n(t - \tau)\} = R_u \cdot \delta(\tau), \quad R_u \geq 0$$

$$E\{n_y(t) \cdot n_y(t - \tau)\} = R_y \cdot \delta(\tau), \quad R_y \geq 0$$

→ perfektes Rauschen, korreliert nur für $\tau = 0$ mit sich selber

→ R_u & R_y werden durch statistische Analyse gefunden und ersetzen die Tuning-Parameter

• Lösung mit LQR Formulierung:

$$\begin{bmatrix} A - BK & A & B \\ A - LC & A^T & C^T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} K \\ L^T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \phi \\ \psi \end{bmatrix}$$

• Fourier:

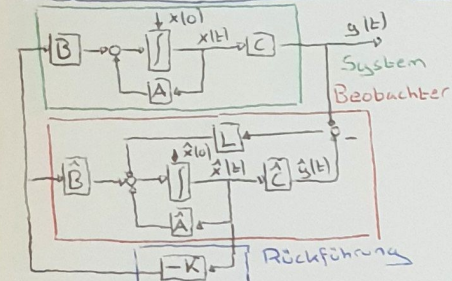
$$n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega, \quad \phi_n(\omega) = r_n > 0$$

→ LQG-Regler:

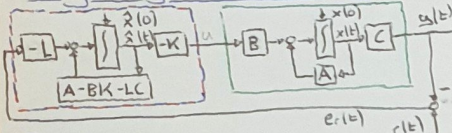
• Ziel:

- Kombination eines LQR-Reglers mit dem Luenberger-Beobachter
- Zustandsrückführungs-Regler mit Schätzung des internen Zustandes
- Linear Quadratic Gaussian

• System-Beobachter-Rückführung:



• Regler-System-Darstellung:



• Regelgesetz:

$$u(t) = -K \hat{x}(t), \quad r(t) = 0, \quad e_r = 0 - u(t)$$

• offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} e_r(t)$$

• geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} r(t)$$

• Stabilität:

bestimmt durch die Eigenwerte der Matrix $\tilde{A}_{cl}$ (geschlossener Regelkreis)

→ Koordinatentransformation:

$$X_{cl} = T \cdot Z_{cl} \quad T = \begin{bmatrix} I_{n \times n} & 0 \\ 0 & -I_{n \times n} \end{bmatrix} = T^{-1}$$

$$T^{-1} \tilde{A}_{cl} T \tilde{z}(t) = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix} \tilde{z}(t)$$

→ Separations Prinzip:

→ Eigenwerte sind unabhängig bezüglich Koordinatentransformation

$$\text{eig}(T^{-1} \tilde{A}_{cl} T) = \text{eig}(\tilde{A}_{cl}) = \text{eig}(A-BK) \cup \text{eig}(A-LC)$$

Es handelt sich um eine Block-Diagonale Matrix

→ n Eigenwerte kommen von $A-BK$

→ n Eigenwerte kommen von $A-LC$

→ asymptotische Stabilität ist garantiert, wenn K & L mit dem LQR-Verfahren bestimmt wurden

→ Garantierte Stabilität ist nur ohne Modellfehler vorhanden → Dank grosser Robustheit auch für reale Systeme geeignet

• Regelstreichen:

offener Regelkreis: $e_r \rightarrow u$

geschlossener Regelkreis: $r \rightarrow u$

offen → Robustheitsanalyse

geschlossen → Stabilitätsanalyse

Übertragungsfunktionen:

$$L_{LQG}(s) = \tilde{C}_0 (sI - \tilde{A}_{cl})^{-1} \tilde{B}_0$$

$$T_{LQG}(s) = \tilde{C}_0 (sI - \tilde{A}_{cl})^{-1} \tilde{B}_0$$

$$L_{LQG}(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot BK (sI - (A-BK-LC))^{-1} \cdot L$$

→ LQG mit Folgeregelung:

• Variante 1: Nullpunktverschiebung:

→ identisch zur LQR-Folgeregelung

→ GGP nach $\{u_\infty, x_\infty\}$ verschoben

$$u(t) = u_\infty - K(\hat{x}(t) - \hat{x}_\infty) = u_\infty - K(\hat{x}(t) - x_\infty)$$

→ $x_\infty = \hat{x}_\infty$ weil $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ geht

$$r(t) = y_\infty = C \cdot x_\infty$$

$$0 = A x_\infty + B u_\infty \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ LC & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\infty \\ u_\infty \end{bmatrix}$$

$$u_\infty + K x_\infty = -(C(A-BK)^{-1} B)^{-1} \cdot r(t)$$

→ Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma r(t) - K \hat{x}(t)$$

offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A+B\Gamma C & -BK \\ LC+B\Gamma C & A-BK-LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma r(t)$$

geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A-BK-LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma r(t)$$

→ LQGI:

Erweiterung der LQG-Formulierung um einen Integrator, um Störungen zu unterdrücken

→ Vorgehen:

$$v(t) = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m}$$

Regelgesetz:

$$u(t) = -K \hat{x}(t) + K_I v(t)$$

→ K & K_I sind Teillösungen der LQGI-Formulierung

→ offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ 0 & A-BK-LC & BK_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ L \\ I \end{bmatrix} e_r(t)$$

geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A-BK-LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & B \\ -L & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

→ LQGI mit Folgeregelung:

Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma r(t) - K \hat{x}(t) + K_I v(t)$$

offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A+B\Gamma C & -BK & BK_I \\ LC+B\Gamma C & A-BK-LC & BK_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma \\ B\Gamma \\ I \end{bmatrix} e_r(t)$$

geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A-BK-LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma & B \\ B\Gamma & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

• Blockdiagramm:



→ LTR: Loop-Transfer-Recovery

• Ziel:

Wiederherstellung der Robustheit des LQG-Reglers, weil μ_{min}, L, G beliebig klein sein kann

→ Lösung:

→ schneller Beobachter $\Leftrightarrow$ kleines q

$\Leftrightarrow$ nähert sich der Robustheit von LQR

→ Herleitung:

Fehlerdynamik für $\lim_{q \rightarrow 0}$

$$\lim_{q \rightarrow 0} e(t) = \lim_{q \rightarrow 0} (A - L(q) \cdot C)^{-1} \cdot \dot{e}(t) = 0$$

$$\dot{e}(t) = (A - L(q) \cdot C) \cdot e(t) \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\text{eig}(X^{-1}) = 1 / \text{eig}(X) \quad \lim_{q \rightarrow 0} \hat{x}(t) = x(t)$$

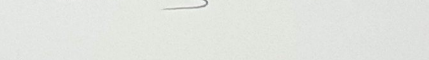
→ Eigenwerte von $(A - L(q) \cdot C)^{-1}$ gehen asymptotisch gegen 0

• Bemerkungen:

$\lim_{q \rightarrow 0} LQG \neq LQR$

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ Interpretation:



→ Vorsteuerung:

verbessert Performance des Regelkreises

reagiert schneller auf Sollwertänderungen

Lues muss nicht zuerst ein Fehler aufgebaut werden

Robustheit, Stabilität, steady-state Verhalten werden durch die Vorsteuerung nicht beeinflusst

Nützliches

Eingeschwungener Zustand:

→ alle Eingänge in Integratoren sind 0
 $\Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \Rightarrow$ Gleichgewicht

Zusammenhänge LQR:

$r \downarrow \Leftrightarrow$ Durchtrittsfrequenz $L_{LQR} \uparrow$

komplementäre Sensitivität $T(s)$ des inneren Regelkreises eines kaskadierten Regelsystemes:

$$T(s) = r_f \rightarrow y_f: \frac{P_f C_f}{1 + P_f C_f} \quad y_f \neq u_f$$

Verhindern von Unterschwingen:

→ Falls ein System nicht minimalphasig Nullstellen hat, dann kann auch kein Regler den Undershoot verhindern
 → keine nmp Nullstellen mit instabilen Polen kürzen

komplexe Nenner schnell umwandeln:

$$\frac{z}{r + cs} = \frac{zr - cwi}{r^2 + c^2 w^2} \quad \text{Nyquist-Abstasttheorem}$$

maximale Abtastfrequenz f_{max} :

$$f_{max} \leq \frac{1}{2} f_s \quad w = 2\pi f \quad T = \frac{1}{f}$$

$$T_{max} \geq 2 T_s \quad \sim \text{tatsächlich abgetastete Werte}$$

Diskretisierung:

$$\Delta = \frac{\text{Wertebereich}}{2^{\text{Auflösung}} - 1} = \# \text{ bits}$$

→ diskretes Intervall

Zustandsraumdarstellung zeitdiskreter Systeme:

$$x_{k+1} = F x_k + G u_k \quad F = e^{At}$$

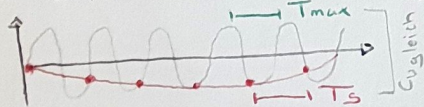
$$y_k = C x_k + D u_k \quad G = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B$$

→ Stabilität:

asymptotisch stabil $\Leftrightarrow |EW| < 1 \vee \sqrt{\lambda}$
 $\Leftrightarrow |\text{Pole}| < 1 \vee \sqrt{\lambda}$

Alias-Effekt:

→ im abzutastenden Signal kommen Frequenzen f_{max} vor, die grösser als $\frac{1}{2} \cdot f_s$ (Abtastfrequenz) sind



Bsp.: $w_L = 3 \text{ Hz}$, Störung 50 Hz

$30 \text{ Hz} = f_s$, kein AAF $\times$
 $30 \text{ Hz} = f_s$, AAF mit $f_{AAF} = 40 \text{ Hz}$ $\checkmark$
 $500 \text{ Hz} = f_s$, AAF mit $f_{AAF} = 40 \text{ Hz}$ $\checkmark$
 $500 \text{ Hz} = f_s$, kein AAF $\checkmark$

→ Abtastfrequenz ist so gross, dass kein Aliasing auftritt → Störung kann nachträglich digital entfernt werden

Totzeit durch abtasten:

$$T_{Tot} = \frac{1}{2} \cdot T_s \text{ [s]} \quad (\text{Faustregel})$$

→ Phasenverlust durch Abtasten:

$$\Delta \varphi = T_{Tot} \cdot \omega = \frac{T_s}{2} \omega \text{ [rad]}$$

Faustregel Abtastfrequenz:

$$f_s \geq 10 \cdot f_c \sim \text{Durchtrittsfrequenz}$$

Infos zu Smith Predictor:

→ Faustregel für den Einsatz:
 → Totzeit sollte signifikant sein

→ Totzeit erscheint nicht in der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises

$$Y(s) = e^{-sT} \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot R(s)$$

→ Regelstrecke darf nicht instabil sein
 → weil $T(s)$ die Pole von $P(s)$ enthält

Infos zu Kaskadenregelung:

→ Regelstrecke muss nicht stabil sein

→ Regelstrecke darf Totzeit enthalten

→ innere Regelkreis darf auch 1-Teile haben, auch wenn es nicht empfohlen ist

→ kann die Störungsunterdrückung verbessern

→ kann wie ein normaler Regler in allen Situationen verwendet werden

→ auch leicht andere Reglerstrukturen möglich als auf ZF Seite 1

Stabilität nach Emulation:

→ alle stabilen Pole bleiben bei einer Emulation mit Euler Backward & Tustin stabil $\sim$ bei Euler Forward muss der zeitdiskrete Pol berechnet werden