

Regelungstechnik II

PID-Tuning:

Äström-Hägglund-Verfahren:

- Verallgemeinerung des Ziegler-Nicholas-Verfahrens → oft bessere Resultate
- Vorgehen äquivalent zu Ziegler-Nicholas

Tabelle für PI-Regler:

	$U_{min}=0.7$			$U_{min}=0.5$		
X	α_0	α_1	α_2	α_0	α_1	α_2
k_p/k_p^*	0.053	2.9	-2.6	0.13	1.9	-1.3
T_i/T^*	0.9	-4.4	2.7	0.9	-4.4	2.7
α	1.1	-0.0061	1.8	0.48	0.4	-0.17

Tabelle für PID-Regler:

	$U_{min}=0.7$			$U_{min}=0.5$		
X	α_0	α_1	α_2	α_0	α_1	α_2
k_p/k_p^*	0.33	-0.31	-1	0.72	-1.6	1.2
T_i/T^*	0.76	-1.6	-0.36	0.59	-1.3	0.38
T_d/T^*	0.17	-0.46	-2.1	0.15	-1.4	0.56
α	0.58	-1.3	3.5	0.25	0.56	-1.2

Zusammenhänge:

$U_{min}=0.7 \Leftrightarrow$ konservativer, robuster
 $U_{min}=0.5 \Leftrightarrow$ aggressiver Regler

$X = \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot K} + \alpha_2 \cdot K^2$ statische Verstärkung
 $K^{-1} = |P(0)| \cdot K_p^* \quad X = [k_p/k_p^*, T_i/T^*, T_d/T^*]$

Direktspezifikation:

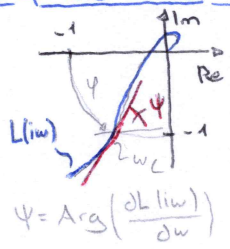
Vorgehen:

- Wahl der gewünschten und geeigneten Werte von ω_c , φ und ψ (Steigung von $L(i\omega)$)
- Berechnung von k_p , T_i , T_d

Definitionen:

$P(i\omega) = r_p e^{i\varphi}$
 Magnitude Phase
 $r_p' = \frac{\partial |P(i\omega)|}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_c}$
 $\varphi' = \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_c}$

Graphische Darstellung:



Zusammenhänge:

$k_p = -\frac{1}{r_p} \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)$ in Radian
 $T_d = \frac{1}{2} \left[\tan(\varphi - \varphi_p) \left(\frac{r_p'}{r_p} - \varphi' \tan(\varphi - \varphi_p) \right) + \tan(\varphi - \varphi_p) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r_p'}{r_p} \right) - \varphi' \right]$
 $T_i = (T_d \cdot \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_p) \cdot \omega_c)^{-1}$

Bemerkungen:

- Ableitungen können durch finite Summen approximiert werden
- nicht immer sinnvolle Lösungen
- Stabilität ist nicht garantiert, im Nachhinein überprüfen
- Plausibilität z.B. mit Ziegler-Nicholas abschätzen

Prädiktiver PI-Regler:

Anwendung:

- einfache Regelstrecke 1. Ordnung mit signifikanter Totzeit $P(s) \approx \frac{k}{s+1} \cdot e^{-Ts}$
- $\frac{T}{T+1} > 0.3 \Leftrightarrow$ Totzeit signifikant

Annahmen:

- O-Term versagt bei Totzeit
- kein Regler kann die Totzeit aus dem System entfernen
- $\hookrightarrow$ die beiden geschlossenen Regelkreisse $T(s)$, $S(s)$ müssen die gleiche Totzeit aufweisen

Formeln:

$T^+(s) = \frac{1}{sOT+1} \cdot e^{-sT} = \frac{L}{1+L}$

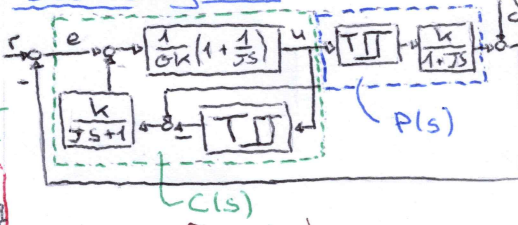
$(l(s) = \frac{s \cdot s + 1}{k \cdot 10 \cdot s + 1 - e^{-Ts}})$

$U(s) = \frac{1}{ek} \left(1 + \frac{1}{s} \right) E(s) - \frac{1}{ors} (1 - e^{-Ts}) U(s)$

PI-Regler Prädiktive Korrektur

- $T=0$: prädiktive Korrektur wird 0
- einfacher PI-Regler resultiert

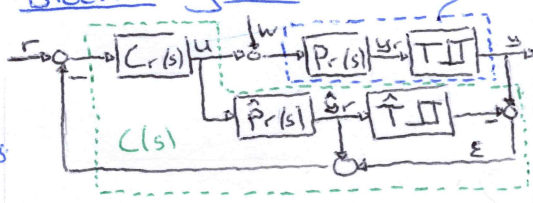
Block-Diagramm:



Smith Predictor:

Allgemeiner prädiktiver Regler

Block-Diagramm:



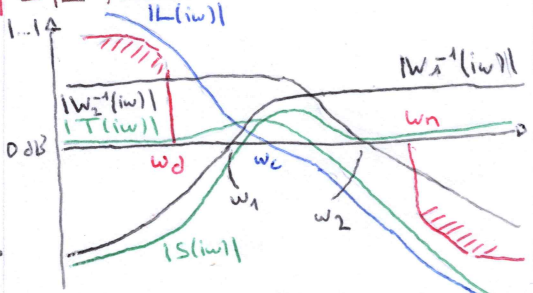
Eigenschaften:

- $P(s) = P_r(s) \cdot e^{-Ts}$
- entwerfe $C_r(s)$ als ob $P(s) = P_r(s)$
- keine Totzeit vorhanden
- $\hookrightarrow$ kompensiert Modellfehler und Störungen

Übertragungsfunktionen:

$C(s) = \frac{1}{1 + C_r(s) \cdot P_r(s) \cdot (1 - e^{-Ts})}$
 $T(s) = \frac{C_r(s) P_r(s) e^{-Ts}}{1 + C_r(s) P_r(s)}$
 $\rightarrow Y(s) = T(s) R(s)$

Spezifikation: Graphisch



Multiplikative Spezifikation an die Sensitivität:

Nominelle Regelgröße:

Beschränkung für den Betrag der Sensitivität (Phase ist nicht wichtig)

$|W_1(i\omega)| < |1 + L(i\omega)|$

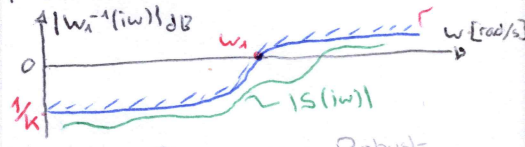


- $|L(i\omega)|$ darf nicht in den grünen Kreis eintreten
- $|W_1(i\omega)|$ ist verschieden bei unterschiedlichen Werten von ω

Konstruktion von W1: (Beispiel)

$W_1(s) = k \frac{s+1}{s+1} \quad \gamma^2 = \frac{k^2-1}{\omega_1^2 (\alpha^2-k^2)}$

$|W_1(i\omega)| = 1, k > 1, \alpha > k$

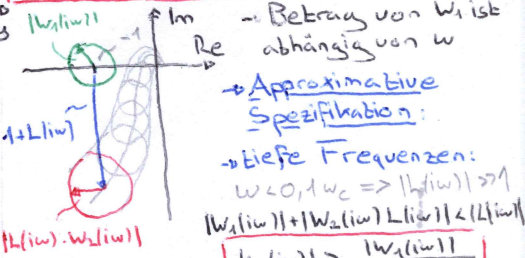


Robuste Regelgröße: Robust Performance

Nyquist Theorem und Bedingungen an die Sensitivität sollen gleichzeitig erfüllt sein

$|W_1(i\omega) S(i\omega)| + |W_2(i\omega) T(i\omega)| < 1$

$|W_1(i\omega)| + |W_2(i\omega) \cdot L(i\omega)| < |1 + L(i\omega)|$



- Betrag von W_1 ist abhängig von ω

Approximative Spezifikation:

- tiefe Frequenzen: $\omega < 0.1 \omega_c \Rightarrow |L(i\omega)| \gg 1$

$|W_1(i\omega)| + |W_2(i\omega) L(i\omega)| < |L(i\omega)|$

$|L(i\omega)| > \frac{|W_2(i\omega)|}{1 - |W_2(i\omega)|}$

- hohe Frequenzen: $\omega > 10 \omega_c \Rightarrow |L(i\omega)| \ll 1$

$|W_1(i\omega)| + |W_2(i\omega) L(i\omega)| < 1$

$|L(i\omega)| < \frac{1 - |W_2(i\omega)|}{|W_2(i\omega)|}$

Kompatibilitätsbedingung:

$\omega_1 < \omega_c < \omega_2 \quad \omega_1 \approx \max\{10\omega_d, 2\omega_T\}$

$\omega_1 \uparrow \Leftrightarrow$ Phasenreserve $\uparrow \Leftrightarrow |S(i\omega)| \downarrow$

$|S(i\omega_c)| = [\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos \varphi}]^{-1}$

Kaskadierte Regelsysteme:

Anwendungsfall:

- SIMO-Systeme mit einer schnellen und einer langsamen Teildynamik

Blockdiagramm:



Funktionsweise:

- "innerer, schneller" Regelkreis ohne Berücksichtigung des Äußeren $\rightarrow$ Speed
- "äußerer, langsamer" Regelkreis mit geschlossenem Inneren $\rightarrow$ Accuracy

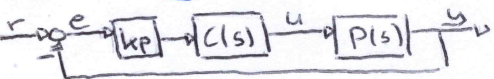
Bemerkungen:

- y_F ist oft proportional zu u_S (höhere Bandbreite)
- $C_f(s)$: nur ein P-Regler (Speed) oder auch D
- Sensoren sind deutlich günstiger als Aktuatoren

Wurzelortskurven (Root-Locus):

→ Verfahren bei dem man die Pole des geschlossenen Regelkreises nach Wunsch setzen kann

Blockdiagramm:



- C(s) wird Kompensator genannt
- Kp wird vom Kompensator abgespalten
- Kp > 0
- L(s): stabil, minimalphasig

Definition:

Wurzelortskurven entstehen, wenn man die Pole des geschlossenen Regelkreises für alle Kp zeichnet

Eigenschaften:

$T(s) = \frac{K_p \cdot L(s)}{1 + K_p \cdot L(s)}$ → Pole: $1 + K_p L(s) = 0$

$L(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{(s - \xi_1) \dots (s - \xi_n)}{(s - \pi_1) \dots (s - \pi_n)}$

→ charakteristisches Polynom des geschlossenen Regelkreises:

$p(s, K_p) = a(s) + K_p \cdot b(s) = 0$ → Schar der Nullstellen

→ Approximation für kleine Kp: (Kp → 0)

$p(s, K_p) \approx a(s)$ $p(s, 0) = a(s) = 0$

→ Die Pole von T(s) starten bei den Polen von L(s)

→ Approximation für grosse Kp: (Kp → ∞)

$p(s, K_p) \approx K_p \cdot b(s)$ $p(s, \infty) = b(s) = 0$

→ m Nullstellen von p(s, Kp) konvergieren zu den m endlichen Nullstellen von b(s)

→ die n-m = r anderen Nullstellen gehen gegen unendlich entlang von senkrechten Asymptoten

Nullstellen im Unendlichen haben keinen Einfluss auf die Systemdynamik

→ Startpunkt der Asymptoten: $\sigma_a + i \cdot 0$

$\sigma_a = \frac{1}{n-m} \left(\sum_{i=1}^n \text{Re}(\pi_i) - \sum_{i=1}^m \text{Re}(\xi_i) \right)$

→ Startwinkel der Asymptoten:

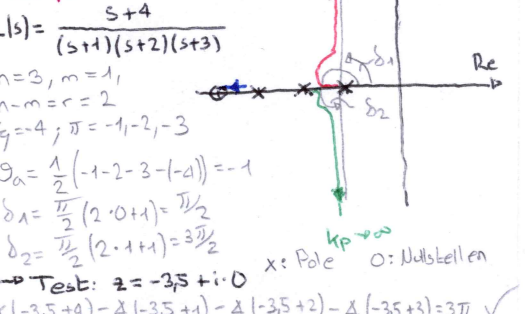
$\delta_i = \frac{\pi}{n-m} (2(i-1) + 1) \text{ [rad]}$ $i = 1, \dots, n-m$

Zugehörigkeitsbest:

→ Test, ob ein Punkt z ∈ ℂ auf der Wurzelortskurve liegt

$\sum_{i=1}^m \angle(z - \xi_i) - \sum_{i=1}^n \angle(z - \pi_i) = -\pi \pm k \cdot 2\pi$ $k \in \mathbb{N}$

Bsp.:



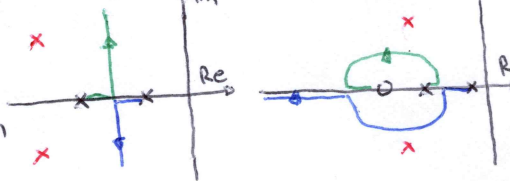
Kompensierung mit dem Wurzelortungsverfahren:

→ mit Hilfe des Zugehörigkeitsbest findet man das passende C(s)

→ Anwendung an einem Beispiel: von T(s)

$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ → gewünschte Pole: $s_{1,2} = -4 \pm i \cdot 4$

$C_1 = 1$ → $C_2 = s + \xi$



$L = \frac{(s+\xi)}{(s+1)(s+3)}$ → $\Delta L = \Delta(s+\xi) - \Delta(s+1) - \Delta(s+3)$

$\rightarrow s = s^*$
 $\angle(-4+4i+\xi) - \angle(-4+4i+1) - \angle(-4+4i+3) =$
 $\tan^{-1}(\frac{4}{\xi-4}) - \tan^{-1}(\frac{4}{-3}) - \tan^{-1}(\frac{4}{-1}) = \pi$
 $\gamma = -\pi + \alpha + \beta \rightarrow \xi \approx 7.25 \text{ rad/s}$

Numerische Verfahren:

→ Ziel:

Mit Hilfe eines Optimierungsproblem die Regelparameter bestimmen

→ für eine fixe Regelstruktur (z.B. PI)

Kostenfunktion:

$J(K_p, T_i) = K_1 \cdot g_1 + K_2 \cdot g_2 + K_3 \cdot g_3$

→ Ki: Tuning-Parameter, Mass für die Wichtigkeit der Grösse gi, nur das relative Verhältnis der Ki spielt eine Rolle

→ Mass für den kumulativen Fehler:

$g_1 = \int_0^\infty e^2(t) dt$ → Fehlerquadrat

→ Mass für maximales Überschiessen:

$g_2 = \max_{t \in [0, \infty]} (y(t) - 1)$ → Sollwert - sprung mit Betrag 1

→ Mass für Robustheit:

$g_3 = 1 - \min_{\omega \in [0, \infty]} |1 + L(i\omega)|$

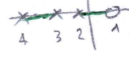
Bemerkung:

→ Integration bis zu einem bstop $e(t_{bstop}) \ll 1$

→ Startwerte für Optimierung z.B. mit Ziegler-Nicholas bestimmen

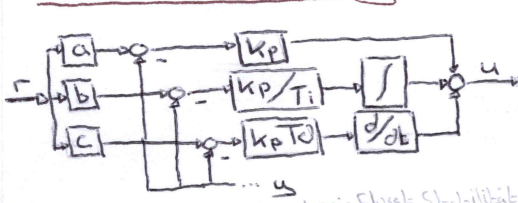
Tipps zum Zeichnen von Wurzelortskurven:

→ Der Abschnitt der reellen Achse, welcher links von einer ungeraden Zahl von p open-loop & π open-loop steht ist Teil des Locus



PID Regler in der Praxis:

Set Point Weights:



Eigenschaften:

Referenzsignal wird für jeden Teil des Reglers mit einer separaten Verstärkung multipliziert → r wird vorverstärkt → keinen Einfluss auf disturbance

→ a: $0 < a < 1$, gemäss Åström Hägglund

→ b: $b = 1$, kein statischer Nachlauffehler

→ c: $c > 0$, falls r(t) keine Sprünge macht

$c = 0$, schnelle Referenzen bewirken grosse Ableitungen $(\frac{d}{dt}(r - y)) \approx \frac{d}{dt}r$ → man will aber Änderungen des Ausgangssignal dämpfen

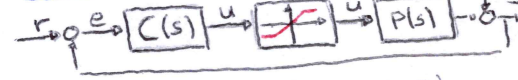
Saturationen & ARW: (Anti Reset Windup)

Problem:

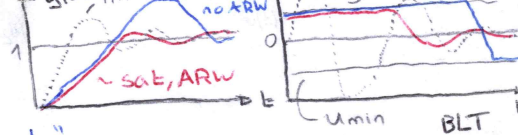
→ Nichtlinearitäten im Regelsystem
 ↳ Aktuatoren können in der Realität nie beliebig kleine oder grosse Sollsignale u(t) umsetzen

$u(t) = \begin{cases} u_{min} & \text{falls } u(t) < u_{min} \\ u_{max} & \text{falls } u(t) > u_{max} \\ u(t) & \text{sonst} \end{cases}$

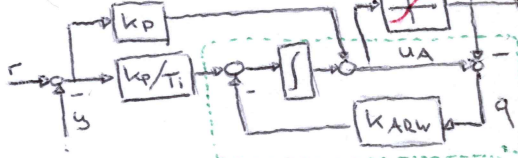
Blockdiagramm:



Sprungantwort: (beispielhaft)



Lösung:



→ weil das System langsamer reagiert als erwartet, kann sich der Integrator über eine längere Zeit füllen
 ↳ Antwort überschiess das Ziel stärker, da der Integrator sich zuerst leeren muss
 ↳ ARW nur bei einem offenen Integrator

$q(t) = u_d(t) - \bar{u}(t)$

→ $|u_d(t)| = \bar{u}(t)$ → nicht saturiert

$q(t) = 0$ → ARW macht nichts

→ $|u_d(t)| > |\bar{u}|$ → Saturation

die zu integrierende Grösse wird reduziert

→ q(t) ≠ 0

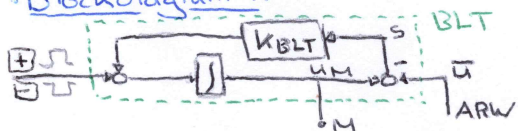
→ man muss die Saturationspunkte der Nichtlinearität kennen

→ nicht bei LQR oder LQG anwendbar

Bumples Transfer:

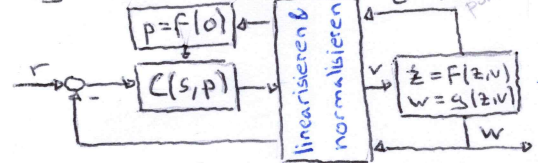
- Übergang von einem manuellen Modus (M) zu einem automatischen Modus (A) → möglichst reibungslos
- Nützlich beim Testen von Systemen

Blockdiagramm:



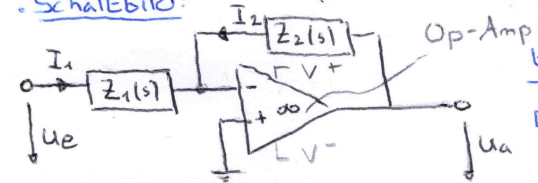
Gain Scheduling:

- Verwendung von verschiedenen linearen Regler für die unterschiedlichen Betriebspunkte, um die ein nichtlineares System linearisiert wurde



Analoge Realisierung:

Schaltbild:



Eigenschaften:

- Gain-Op-Amp $\approx \infty \Rightarrow I_1 + I_2 = 0$
- $I_1 = \frac{U_e(s)}{Z_1(s)}$ $I_2 = \frac{U_a(s)}{Z_2(s)}$ mit Kirchhoffschen Gesetzen
- $\Sigma(s) = \frac{U_a(s)}{U_e(s)} = - \frac{Z_2(s)}{Z_1(s)}$ System

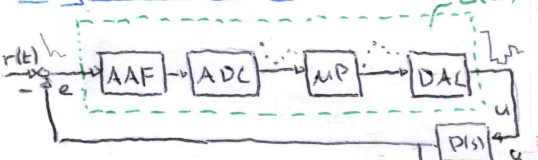
Elemente: - ohne Systeme

- Widerstand: $Z_R(s) = R$
- Kapazitäten: $Z_C(s) = \frac{1}{sC}$
- Induktoren: $Z_L(s) = sL$
- Serie: $Z_{tot} = Z_1 + Z_2$
- Parallel: $Z_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}}$

Zeitdiskrete Realisierung:

- Umwandlung eines kontinuierlichen Regler (s) in einen diskreten (z)
- Abtastzeit: T_s
- $t_n = n \cdot T_s = n / F_s \sim$ Taktfrequenz $n = 0, 1, 2, \dots$

Digitales Regelsystem:



ADC: Analog zu digital Converter → zeitkontinuierlich zu zeitdiskret

MP: Mikroprozessor → $u[k] = u(n \cdot T_s)$

DAC: Digital zu analog Converter → zeitdiskret zu zeitkontinuierlich

AAF: Analog anti-aliasing Filter → Tiefpassfilter, da ein zeitdiskretes Signal nicht beliebig hohe Frequenzen repräsentieren kann

Zero-order-Hold: (ZOH)

- $u(k) = u(k) \quad \forall k \in [k \cdot T_s, (k+1) \cdot T_s]$
- Eingang wird zwischen 2 Berechnungsschritten konstant gehalten
- Gültigkeit: $T_s \leq T_c / 10$ $\omega_c = 2\pi / T_c$
- Z-Transformierung: $T_s \leq 1/2 T_{max}$
- $X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} x(k)$

Eigenschaften:

- Linearität: $Z\{x+y\} = Z\{x\} + Z\{y\}$
- Vorwärts-shift: $x(k+1) = z X(z) - z \cdot x_0$
- Rückwärts-shift: $x(k-1) = X(z) \cdot z^{-1}$
- Zusammenhang $s \leftrightarrow z$ $z = e^{sT_s}$; $s = \ln(z) / T_s$

- Bsp: Asymptotischer Pol $z = e^{sT_s + wT_s} = e^{sT_s} \cdot e^{wT_s} = a \cdot e^{wT_s} \cdot i$
- $0 < a < 1 \rightarrow 0 < a < 1 \rightarrow |z| = a < 1$

Emulation: $C(s) \rightarrow C(z)$

- Da der Zusammenhang zwischen s & z nichtlinear ist wird er durch eine Emulation approximiert

- Euler Forward $z = e^{sT_s} \approx 1 + sT_s \quad s \approx \frac{z-1}{T_s}$
- Euler backward $z = \frac{1}{e^{-sT_s}} \approx \frac{1}{1-sT_s} \quad s \approx \frac{z-1}{zT_s}$
- Tustin Emulation $z = \frac{e^{sT_s/2}}{e^{-sT_s/2}} \approx \frac{1+sT_s/2}{1-sT_s/2} \quad s \approx \frac{2(z-1)}{T_s(z+1)}$

Eigenschaften:

- ganze linke-Halbebene wird in einen Kreis mit Radius kleiner 1 gemappt
- gültig für Tustin & Euler backward

Algebraische Stabilitätskriterien:

- Ziel: $1+L(s)=0$
- Zeigen, dass ein Polynom nur Nullstellen in der linken komplexen Halbebene hat

$$p(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0$$

Hurwitz Kriterium: $L_{a1} > 0$

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 \dots 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

- alle Hauptuntermatrizen müssen positiv definit sein → alle EW > 0

Kharitonov Kriterium:

- a_i sind nicht bekannt, aber das Intervall
- $p(s, \alpha) = [\underline{a}_n, \bar{a}_n] \cdot s^n + [\underline{a}_{n-1}, \bar{a}_{n-1}] \cdot s^{n-1} + \dots + [\underline{a}_1, \bar{a}_1] \cdot s + [\underline{a}_0, \bar{a}_0]$

$$p_1(s) = \bar{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \bar{a}_4 \cdot s^4 + \dots$$

$$p_2(s) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \underline{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \bar{a}_4 \cdot s^4 + \dots$$

$$p_3(s) = \underline{a}_0 + \bar{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \underline{a}_3 \cdot s^3 + \underline{a}_4 \cdot s^4 + \dots$$

$$p_4(s) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 \cdot s + \bar{a}_2 \cdot s^2 + \bar{a}_3 \cdot s^3 + \bar{a}_4 \cdot s^4 + \dots$$

- Hurwitz Kriterium für jedes Polynom
- Ecken eines Rechtecks in der komplexen Ebene

MIMO-Systeme:

Systembeschreibung:

Zustandsraumdarstellung:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + B u(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad y \in \mathbb{R}^p$$

Kreuzkopplungen:

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{1,1}(s) & P_{1,2}(s) & \dots & P_{1,m}(s) \\ P_{2,1}(s) & P_{2,2}(s) & \dots & P_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{p,1}(s) & P_{p,2}(s) & \dots & P_{p,m}(s) \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}(s) = u_j \rightarrow u_i$$

Übertragungsfunktionen:

- Reihenfolge der Multiplikation spielt eine Rolle, da es sich um Matrizen handelt

Stabilität nach Lyapunov:

- identisch zu SISO

Steuerbarkeit:

$$R_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times (n \cdot m)}$$

- Rang = n: voll. steuerbar

Beobachtbarkeit:

$$O_n = [CT, ATCT, \dots, (A^{n-1}T)CT]^T \in \mathbb{R}^{(n \cdot p) \times n}$$

- Rang = n: voll. beobachtbar

Pole & Nullstellen:

Matrix Minoren:

- Determinanten aller quadratischen Submatrizen → auch die ganze (falls nicht vergessen)
- auch die ganze (falls nicht vergessen)
- auch Einzelemente

Polstellen:

- Nullstellen des kgV der Nennerpolynome aller Minoren von $P(s)$

Nullstellen:

- Nullstellen des ggT der Zähler der Minoren höchster Ordnung von $P(s)$ nach der Normalisierung, bei der alle Pole von $P(s)$ im Nenner stehen

Bsp.: Pole- & Nullstellen

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{2(s+2)}{s+1} & \frac{3}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

- Pole: $\frac{2(s+2)}{s+1}, \frac{3}{s+1}, \frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}, \frac{2s-1}{(s+1)^2}$

- 1.) Minore: $(s+1)^2 (s+2) = 0$

- 2.) kgV der Nennerpolynome: $(s+1)^2 (s+2) = 0$

- 3.) Nullstellen: $s = -1, -1, -2$

Nullstellen:

- 1.) Minor höchster Ordnung: $\rightarrow$ alle Pole von $P(s)$ stehen im Nenner

- 2.) Normalisieren: $\rightarrow$ alle Pole von $P(s)$ stehen im Nenner

- 3.) Nullstellen des ggT der normalisierten größten Minoren

$$(2s-1)(s+2) = 0 \rightarrow s = -2, 1/2$$

Minimale Ordnung:

$$\text{Ordnung} = \max\{\#p, \#n\}$$

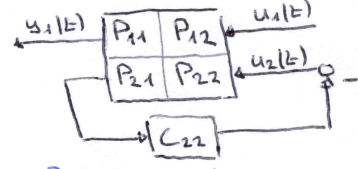
Relative Gain Array (RGA):

Nutzen:

sagt aus, wie nahe man bei einem SISO-System ist -> kann ein SISO-Regler verwendet werden

Herleitung:

(am Beispiel eines 2x2 Systemes)



-> Extremfall 1: open loop

$$C_{22} = 0, P_{u1 \rightarrow y1}(s) = P_{11}(s)$$

-> alle anderen Eingänge sind 0

-> Extremfall 2: closed loop

$$C_{22} \rightarrow \infty, P_{u1 \rightarrow y1}(s) = \frac{P_{11} \cdot P_{22} - P_{12} \cdot P_{21}}{P_{22}}$$

-> alle anderen Ausgänge sind 0

-> Relative Gain:

$$[RGA(s)]_{11} = \frac{P_{11} \cdot P_{22}}{P_{11} \cdot P_{22} - P_{12} \cdot P_{21}}$$

= open loop = Einfluss von u_1 auf y_1
 closed loop = Einfluss von u_1 & u_2 auf y_1

-> SISO-fähiges System: $RGA \approx 1$

$$RGA \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-> keine Kreuzkopplungseffekte
 -> kann mit 2 SISO-Reglern geregelt werden

-> Nicht-SISO-fähiges System: $RGA \neq 0$

$$RGA \approx \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

-> Kreuzkopplungseffekte
 -> keine SISO-Regler anwendbar

-> Instabiles Verhalten: $RGA < 0$

-> SISO-Regler hat entgegengesetzte Wirkung -> destabilisiert das System
 -> SISO & MIMO weisen unterschiedliche Vorzeichen auf

-> RGA einer 2x2 Regelstrecke $P(s)$:

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -P_{12}P_{21} & P_{22}P_{11} - P_{21}P_{12} \\ -P_{12}P_{21} & P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21} \end{bmatrix}$$

-> RGA einer allgemeineren Strecke:

$$RGA(s) = P(s) \cdot P(s)^{-T}$$

-> $x \rightarrow$ elementweise Multiplikation
 $P(s)^{-T} = [P(s)^{-1}]^T$ -> Transponierte der Inverse

-> Eigenschaften der RGA-Matrix:

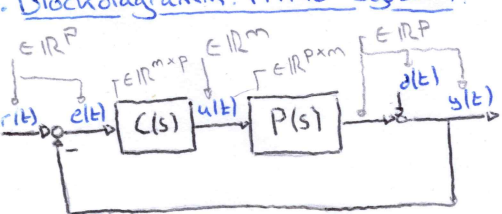
-> Summe der Zeilen & Spalten = 1

-> Invariant bezüglich $RGA(P(s)) = RGA(D_1 P(s) D_2)$

-> RGA einer Dreiecksmatrix ist $\mathbb{I}$

-> RGA ist symmetrisch (nur bei 2x2)

-> Blockdiagramm: MIMO-System:



Singularwerte:

-> Lineare Abbildung:

$$y = M \cdot u, u \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^p, M \in \mathbb{C}^{p \times m}$$

↳ entspricht $P(s)$

-> Matrixnorm:

$$\|M\| = \max_{u \neq 0} \frac{\|Mu\|}{\|u\|} = \max_{\|u\|=1} \|Mu\| = \max_i |\sigma_i(M)|$$

-> Singularwerte:

$$\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(M^T \cdot M)}$$

-> Wurzel der Eigenwerte
 -> reell und positiv

M^T -> Transponierte der komplex-Konjugierten

$M^T \cdot M$ -> Symmetrisch, hermitian $\Rightarrow Q^T = Q$

$$\sigma_{min}(M) \leq \frac{\|y\|}{\|u\|} \leq \sigma_{max}(M) \rightarrow \# \text{ von } \sigma = m$$

-> Euklidische Norm:

$$\|z\|^2 = a^2 + b^2 = (a-ib)(a+ib) = \bar{z} \cdot z$$

-> Vektor:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + b_i^2 = \sum_{i=1}^n |a_i - ib_i| |a_i + ib_i| = \bar{v}^T \cdot v$$

-> Singularwertzerlegung (SVD):

$$M = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

$U \in \mathbb{C}^{p \times p}, \Sigma \in \mathbb{C}^{p \times m}, V \in \mathbb{C}^{m \times m}$
 ~ Singularwerte positiv

-> Σ : Matrix mit σ_i auf der Hauptdiagonalen

-> U, V : unitäre, längen erhaltende Transformationsmatrizen

-> Rotation + Spiegelung

$$U \cdot U^T = \mathbb{I}, V \cdot V^T = \mathbb{I}, U^T = U^{-1}, V^T = V^{-1}$$

-> Rotationsmatrizen:

-> Drehung um x-Achse:

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

-> Drehung um y-Achse:

$$R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

-> Drehung um z-Achse:

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ Drehung im 2D, 3 Zeile & Spalte streichen

-> Spiegelung:

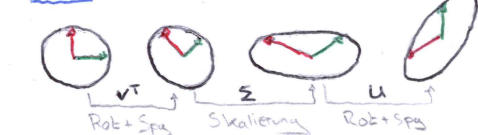
-> y-Achse: $\text{diag}(-1, 1, 1)$ -> x-Achse: $\text{diag}(1, -1, 1)$ -> z-Achse: $\text{diag}(1, 1, -1)$

-> 1. Dimension: $\text{diag}(-1, 1, 1)$ -> 2. Dimension: $\text{diag}(1, -1, 1)$ -> 3. Dimension: $\text{diag}(1, 1, -1)$

-> Reihenfolge: z.B. 1.) Rot 2.) Spiegel -> $M = S \cdot R$

-> Graphische Darstellung:

-> SVD: Für 2 beliebige Vektoren



-> Singularwerte:

σ_i : Eingangsraum $\{u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \|u\|=1\}$ σ_i : Ausgangsraum $y = M \cdot u$

-> Zusammenhänge:

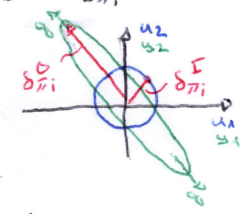
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$$

σ_i : Eingangsrichtung σ_i : zugehöriger Singulärwert σ_i : Ausgangsrichtung

$$x_{max} = V \cdot e_1, x_{min} = V \cdot e_m$$

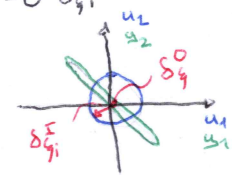
-> Pole:

$$M(s)|_{s=\pi_i} = \delta_{\pi_i}^I \cdot \delta_{\pi_i}^I \rightarrow \infty \cdot \delta_{\pi_i}^I$$



-> Nullstellen:

$$M(s)|_{s=q_i} = \delta_{q_i}^I \cdot \delta_{q_i}^I = 0 \cdot \delta_{q_i}^I$$



Lagrange Optimierung:

-> Gütekriterium:

$$J: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad J(u) = \|y(u)\| = \|M \cdot u\|$$

-> Nebenbedingung:

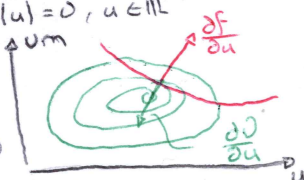
$$F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \quad F(u) = 0, u \in \mathbb{R}^m$$

-> Lösung:

$$L(u) = J(u) + \lambda \cdot F(u)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial J}{\partial u} + \lambda \cdot \frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

$$\Rightarrow J(u^*) \geq J(u) \quad \& \quad F(u^*) = 0$$



Frequenzantworten MIMO:

-> Eingang:

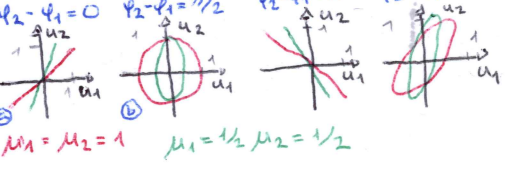
-> Zeitbereich:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ u_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \vdots \\ u_m \cos(\omega t + \varphi_m) \end{bmatrix}$$

-> Komplexschreibweise:

$$U(s) = e^{j\varphi} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

-> Phasor: Vektor + Phase



-> Herleitung:

$$u_1 = \mu_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = \mu_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\mu_1 = \frac{u_1}{\cos(\omega t + \varphi_1)} \Rightarrow \mu_2 = \frac{u_2}{\cos(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\mu_1 = \frac{u_1}{\cos(\omega t + \varphi_1)} \Rightarrow \mu_2 = \frac{u_2}{\cos(\omega t + \varphi_2)}$$

$$\mu_1 = \frac{u_1}{\cos(\omega t + \varphi_1)} \Rightarrow \mu_2 = \frac{u_2}{\cos(\omega t + \varphi_2)}$$

-> Ausgang:

$$Y(s) = e^{j\varphi} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

-> Zusammenhänge:

$$y(i\omega) = P(i\omega) \cdot U(i\omega)$$

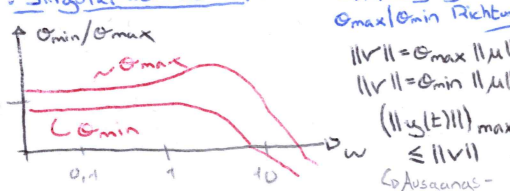
$$e^{j\varphi} \cdot v = P(i\omega) \cdot e^{j\varphi} \cdot \mu$$

$$\sigma_{min}(P(i\omega)) \leq \frac{\|v\|}{\|\mu\|} \leq \sigma_{max}(P(i\omega))$$

$$\|e^{j\varphi}\| = \|e^{j\varphi}\| = 1 \rightarrow \sigma \text{ ist eine Funktion von } \omega$$

-> worst-case Schranken für den Betrag der Amplitude im eingeschwungenen Zustand
 -> Phaseninfo geht verloren

-> Singularwertverlauf:



-> Anregung in $\sigma_{max}/\sigma_{min}$ Richtung

Bsp.: Frequenzantwort MIMO

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2 + 0.35s + 1} & \frac{0.2}{s^2 + 0.5s + 1} \\ \frac{0.2}{s^2 + s + 1} & \frac{1}{s^2 + s + 1} \end{bmatrix}$$

$$P(0.7; i) = U \cdot \Sigma \cdot V^T = \rightarrow v \approx 47 \text{ rad/s}$$

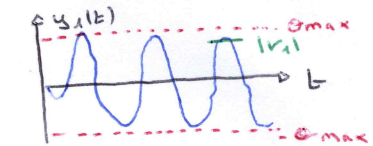
$$\begin{bmatrix} -0.87 + 0.36i & 0.31 - 0.11i \\ -0.22 + 0.25i & -0.67 + 0.67i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.9 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.93 & -0.35 + 0.05i \\ 0.36 & -0.92 + 0.14i \end{bmatrix}$$

$$u_{\max} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ -0.35 + 0.05i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.93 e^{i\pi} \\ 0.36 e^{i2.99} \end{bmatrix}$$

abs() angle()

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0.93 \cos(0.7t + \pi) \\ 0.36 \cos(0.7t + 2.99) \end{bmatrix}$$



Übertragungsfunktionen MIMO:

$$T(s) = [I + P(s) \cdot C(s)]^{-1} P(s) C(s)$$

$$S(s) = [I + P(s) \cdot C(s)]^{-1}$$

$$D(s) = I + P(s) C(s)$$

return difference

→ SISO: effektive Verläufe

→ MIMO: Worst Case

μ = Robustheit

$$\mu = \min_w \{ \|I + L(w)\| \}$$

$$\|S(s)\|_{\infty} = \max_w \{ \|S(w)\|_{\infty} \}$$

$$\|S(s)\|_{\infty} = \max_w \{ \max \{ \|S(w)\|_{\infty} \} \}$$

Zustands-Feedback Controller:

Regulator-Problem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad u(t) = F(x, t)$$

→ Regler bringt den Zustandsvektor in unendlicher Zeit in den Ursprung

→ Steuersignal ist eine Funktion des Zustandes

→ System: $\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad x(0) = x_0 \neq 0$

→ LTI-System mit Anfangswert $\neq 0$

→ SISO: Eigenwert-Platzierung:

Blockdiagramm:

→ auch gültig für LQR-Regler

geschlossener Regelkreis

$$\dot{x} = A x + b u \quad u = -k x$$

$$\dot{x} = A x - b k x = (A - b k) x$$

Vorgehen:

man wählt $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ so, dass alle Eigenwerte von $A - b k$ negativen Realteil haben

$$\lambda_i \{A\} = 0$$

$$\lambda_i \{A - b k\} = \square$$

Voraussetzung:

→ Robustheit kann klein ausfallen

→ Ansatz funktioniert für MIMO nicht

→ MIMO: LQR:

Voraussetzung:

System $\{A, B\}$ muss vollständig steuerbar sein $\rightarrow \det(R) \neq 0$

Methoden:

→ Hurwitz-Kriterium anwenden

→ Formel von Ackermann:

→ Wahl eines charakteristischen Polynoms:

$$\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

→ Definition des Vektors q :

$$q = [0, 0, \dots, 0, 1]^T \cdot R^{-1}$$

Bemerkungen:

→ Robustheit kann klein ausfallen

→ Ansatz funktioniert für MIMO nicht

→ MIMO: LQR:

Ansatz der einen intuitiven trade-off zwischen Regelfehler- und aufwand erlaubt

Nomenklatur:

LQR: linear quadratic Regulator

→ linear:

geregelt System ist linear $\rightarrow \dot{x} = A x + B u$

→ quadratisch:

Definition einer quadratischen Kostenfunktion

$$J(u) = \int_0^{\infty} x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) dt$$

→ SISO: effektive Verläufe

→ MIMO: Worst Case

μ = Robustheit

$$\mu = \min_w \{ \|I + L(w)\| \}$$

$$\|S(s)\|_{\infty} = \max_w \{ \|S(w)\|_{\infty} \}$$

$$\|S(s)\|_{\infty} = \max_w \{ \max \{ \|S(w)\|_{\infty} \} \}$$

→ Q & R bewirken die relative Gewichtung zwischen Fehler & Aufwand

→ Regulator:

Regler löst das Regulator-Problem

→ Trade-off: cheap expensive

→ regelt schnell in den Ursprung

→ es ist teuer wenn $x(t)$ nicht im Ursprung ist, Kosten zum regeln sind "egal"

→ regelt langsam in den Ursprung

→ betragsmäßig kleines Regelsignal wird aufgewendet

Lösung der LQR-Formulierung:

→ Lösung ist eine lineare Zustandsrückführung

→ Blockdiagramm ist äquivalent zu jenem bei Eigenwert-Platzierung

$$u^*(t) = -K x(t) \quad K = R^{-1} \cdot B^T \Phi$$

$$\Phi \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \Phi - Q = 0$$

→ Φ ist die einzige positiv definite Lösung der Riccati-Gleichung $\rightarrow \Phi = \Phi^T$

$$Q = \bar{C}^T \cdot \bar{C}, \quad \bar{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad p = \text{rang}(Q)$$

→ Voraussetzungen: Für $\Phi \neq 0$

$\{A, B\}$ sind vollständig steuerbar &

$\{A, \bar{C}\}$ sind vollständig beobachtbar

→ Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig $\rightarrow Q$ muss wie oben definiert sein

Bemerkungen:

→ Regler wird als infinite horizon LQR bezeichnet, weil die Integrationsgrenzen von 0 bis unendlich gehen

→ LQR ist zeitinvariant $\rightarrow K$ ist statisch

→ muss nur ein Mal berechnet werden

→ gemäß Hurwitz ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil

Erste Wahl von Q & R:

$$R = r \cdot I_{m \times m}, \quad r > 0$$

$$Q = C^T C, \quad C: \text{wahre Messmatrix}$$

→ Interpretation von $\bar{C} = C$: $y = C x$

$$x^T Q x = x^T \bar{C}^T \bar{C} x = x^T \bar{C} \bar{C}^T x = y^T y = \|y\|^2$$

$$x^T Q x = \int_0^{\infty} y^2(t) dt = \int_0^{\infty} u^2(t) dt$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} y^2(t) dt + r \int_0^{\infty} u^2(t) dt$$

$$E_y = \int_0^{\infty} y^2(t) dt \quad E_u = \int_0^{\infty} u^2(t) dt$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

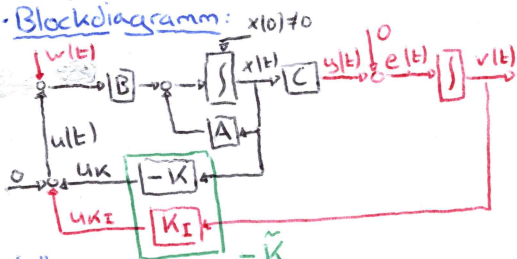
$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

$$J(u) = E_y + r E_u \stackrel{!}{=} \min_{\text{Stellrad } \theta} \dots$$

→ LQRI - Störunterdrückung:

Ziel:
Erweiterung der LQR-Formulierung mit einem Integrator, um Störungen $w(t)$ auf das Eingangssignal $u(t)$ & Modellfehler zu kompensieren → $y(t) = 0 = v$



Lösung:
$$v(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau \in \mathbb{R}^{n+m}$$

→ neuer Gesamtzustand: $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$
$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t)$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} (u_K + u_{KI})$$

→ angepasste LQR-Matrizen
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q_I \end{bmatrix}$$

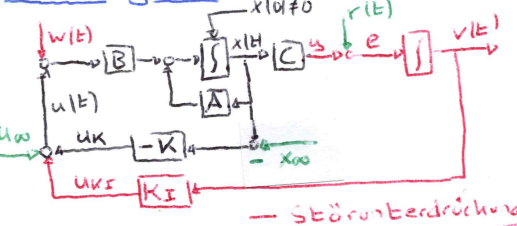
$$\tilde{K} = [K, -K_I] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)} \rightarrow \tilde{K} \text{ ist statisch}$$

$$u(t) = -\tilde{K} \tilde{x}(t) = u_K + u_{KI} = -Kx(t) + K_I v(t)$$

 Q_I : einstellen der Stärke des Integrators

→ Folgeregelung & Störunterdrückung:

Ziel:
Erweiterung des LQRI-Ansatz mit den Feedforwardsignalen u_{∞} & x_{∞} , um zusätzlich noch Folgeregelung zu erreichen

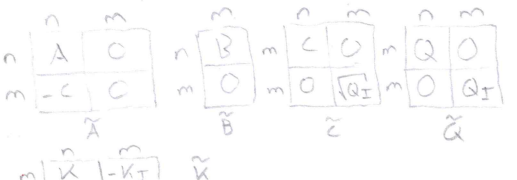


Lösung:
$$v(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau = \int_0^t (r(\tau) - y(\tau)) d\tau$$

→ Ableitung des neuen Zustandes:
$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} (u_K + u_{KI}) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t)$$

→ angepasste LQR-Matrizen:
 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{Q}, \tilde{K}$ wie bei LQRI
$$u(t) = u_{\infty} - K(x(t) - x_{\infty}) + K_I v(t)$$



→ Eigenschaften von Infinite Horizon Reglern:

Robustheit:
$$\mu_{min, LQR} = \min(\min \sigma_i(\|I + L_{LQR}(i\omega)\|) \geq 1$$

→ falls $R = r \cdot I$
→ geometrische Interpretation SISO:

→ Verstärkungsreserve: $\gamma \in [0.5, \infty]$
→ Phasenreserve: $\varphi \geq 60^\circ$

Verbesserung der Robustheit:
→ modifizierte Riccati-Gleichung: $\beta > 1$
$$\frac{1}{\beta} \phi_p \cdot B \cdot R^{-1} \phi_p - \phi_p \cdot A - A^T \cdot \phi_p - Q = 0$$

→ verbessertes μ_{min} : $\mu_{min, LQR} = \min(\min \sigma_i(\beta \|I + L_{LQR}(i\omega)\|) \geq \beta$
→ Nyquist-Plot tritt nicht in dem um β zentrierten Kreis mit Radius β
→ Grenzwert $\beta \rightarrow \infty$:
- $\phi_p \cdot A - A^T \phi_p - Q = 0$ → neue Riccati-Gleichung
 ϕ_p existiert $\Leftrightarrow A$ ist eine Hurwitz-Matrix
↳ System ist bereits ohne Regler schon stabil

Beschränkung von S & T:
$$\max_w (\max \sigma_i(S(i\omega))) = 1 \quad \max_w (\max \sigma_i(T(i\omega))) = 2$$

Stabilität:
→ geschlossener Regelkreis ist garantiert stabil → Pole $(T) \Rightarrow |N \cdot I - (A - BK)| = 0$

→ Finite Horizon LQR:

Ziel:
Beschränkung der unendlichen Integrationszeit auf das Zeitintervall $[t_a, t_b]$
→ Vorteil: System kann zeitvariant sein
$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t) \cdot x(t) + B(t) \cdot u(t), \quad x(t_a) = x_a$$

Kostenfunktion:
$$J(u) = x^T(t_b) P x(t_b) + \int_{t_a}^{t_b} (x^T Q(t) x + u^T R(t) u) dt$$

→ P : Kostenmatrix, neue Tuninggrösse $P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, P \geq 0$ (positiv semidefinit)
→ Abweichung des finalen Zustands $x(t_b)$ zum Ursprung wird bestraft
Lösung:
$$u(t) = -K(t) \cdot x(t) \quad K(t) = R^{-1}(t) B^T(t) \Phi(t)$$

→ $K(t)$ ist zeitabhängig und muss jeweils aufs Neue berechnet werden
→ $K(t)$ ist nur für $t \in [t_a, t_b]$ gültig
→ differentielle Matrix Riccati Gleichung:
$$\frac{d}{dt} \Phi(t) = \Phi(t) B(t) R^{-1}(t) B^T(t) \Phi(t) - \Phi(t) A(t) - A^T(t) \Phi(t) - Q(t)$$

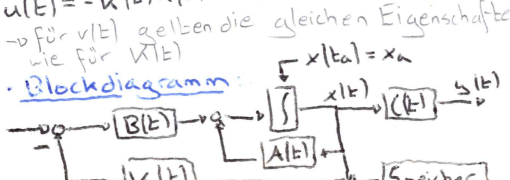
→ $\Phi(t)$ kann durch Rückwärtsintegration von $\Phi(t_b) = P$ gefunden werden

Bemerkung:
asymptotische Stabilität kann nicht garantiert werden, weil für $t > t_b$ nicht optimiert wird

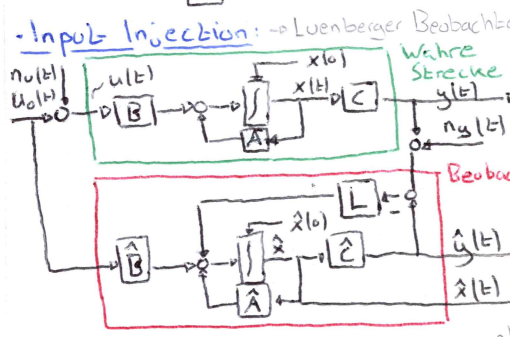
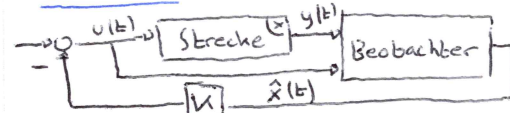
Folgeregelung:
$$J(u) = (r(t_b) - y(t_b))^T P (r(t_b) - y(t_b)) + \int_{t_a}^{t_b} (r(t) - y(t))^T Q(t) (r(t) - y(t)) + u^T(t) R(t) u(t) dt$$

$$u(t) = -K(t) x(t) + v(t)$$

→ für $v(t)$ gelten die gleichen Eigenschaften wie für $K(t)$



→ Zustands Beobachter:



→ Strecke: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
 $y(t) = Cx(t)$
→ Beobachter: $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A} \hat{x}(t) + \hat{B} u(t) + L(y(t) - \hat{y}(t))$
 $\hat{y}(t) = \hat{C} \hat{x}(t)$

→ Beobachtungsfehler: $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$
→ Ziel: $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0$
→ Herleitung:
$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \frac{d}{dt} x(t) - \frac{d}{dt} \hat{x}(t)$$

→ Annahmen: $\hat{A} = A - LC, \hat{B} = B, \hat{C} = C$
$$n_{\tilde{x}}(t) = n_{\tilde{x}}(t) = 0$$

$$= Ax + Bu - (\hat{A} \hat{x} + \hat{B} u + L(y - \hat{y}))$$

$$= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x})$$

$$= (A - LC) \tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = x(0) - \hat{x}(0) \neq 0$$

Beobachtungsfehler konvergiert gegen 0
 $\Leftrightarrow$ Matrix $(A - LC)$ ist Hurwitz

Lösung:
→ Polplatzierung von Hand:
$$\det(A - LC - nI) = (n_1 - d)(n_2 - d) \dots (n_n - d) = 0$$

 n_i : gewünschte Eigenwerte

→ Polplatzierung mit LQR Formulierung:
$$eig(X) = eig(X^T)$$

$$eig(A - LC) = eig((A - LC)^T) = eig(A^T - C^T L^T)$$

Vergleich mit $eig(A - BK)$

$A - BK$	A	B	$Q = \tilde{C}^T \tilde{C}$	$R = rI$	K	ϕ
$A - LC$	A^T	C^T	$Q = \tilde{B} \tilde{B}^T$	$R = qI$	L^T	ψ

→ $\tilde{B}$ & q werden iterativ eingestellt
Beobachterverstärkung L :

- L ist statisch
- L kann nicht beliebig gross gewählt werden
↳ hochfrequenten Rauschen wird verstärkt
$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = (A - LC) \tilde{x}(t) - L n_{\tilde{x}}(t)$$

	kleines/langsames L	grosses/schnelles L
kein $n_{\tilde{x}}(t)$		
mit $n_{\tilde{x}}(t)$		

→ Kalman Filter:

→ optimales L für Luenberger Beobachter
→ $n_{\tilde{x}}(t)$ & $n_{\tilde{y}}(t)$ sind Gaussian zero mean
white noise Signale mit bekannter Varianz
↳ unkorreliert, konstantes Spektrum & Frequenz
Erwartungswert = 0

Kovarianzmatrix:
$$E\{n_{\tilde{x}}(t) \cdot n_{\tilde{x}}(t - \tau)\} = R_{n_{\tilde{x}}} \cdot \delta(\tau), \quad R_{n_{\tilde{x}}} \geq 0$$

$$E\{n_{\tilde{y}}(t) \cdot n_{\tilde{y}}(t - \tau)\} = R_{n_{\tilde{y}}} \cdot \delta(\tau), \quad R_{n_{\tilde{y}}} \geq 0$$

↳ perfektes Rauschen, korreliert nur für $\tau = 0$ mit sich selber

→ $R_{n_{\tilde{x}}}$ & $R_{n_{\tilde{y}}}$ werden durch statistische Analyse gefunden und ersetzen die Tuning-Parameter

Lösung mit LQR Formulierung:

$A - BK$	A	B	$Q = \tilde{C}^T \tilde{C}$	R	K	ϕ
Kalman	A^T	C^T	$Q = B R_{n_{\tilde{y}}} B^T$	$R_{n_{\tilde{x}}}$	L^T	P

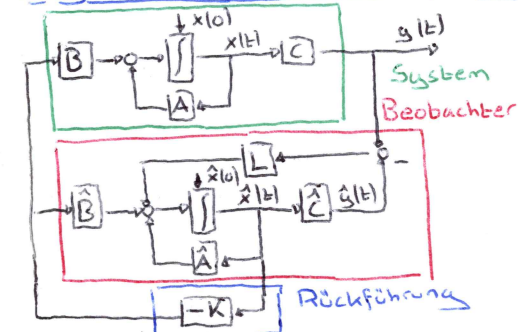
Fourier:
$$n(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) d\omega \quad \phi_n(\omega) = \phi_n \neq 0$$

→ LQG-Regler:

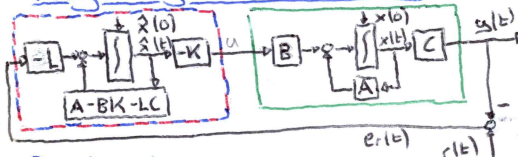
• Ziel:

- Kombination eines LQR-Reglers mit dem Luenberger-Beobachter
- Zustandsrückführungs-Regler mit Schätzung des internen Zustandes
- Linear Quadratic Gaussian

• System-Beobachter-Rückführung:



• Regler-System-Darstellung:



• Regelgesetz:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t), \quad r(t) = 0, \quad e_r = 0 - y(t)$$

• offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ 0 & A - BK - LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix} e_r(t)$$

• geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \end{bmatrix} r(t)$$

• Stabilität:

bestimmt durch die Eigenwerte der Matrix $\tilde{A}_{cl}$ (geschlossener Regelkreis)

→ Koordinatentransformation:

$$X_{cl} = T \cdot \tilde{X}_{cl} \quad T = \begin{bmatrix} I^{n \times n} & 0^{n \times n} \\ 0^{n \times n} & -I^{n \times n} \end{bmatrix} = T^{-1}$$

$$T^{-1} \tilde{A}_{cl} T \tilde{z}(t) = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0^{n \times n} & A - LC \end{bmatrix} \tilde{z}(t)$$

→ Separations Prinzip:

→ Eigenwerte sind unabhängig bezüglich Koordinatentransformation

$$\text{eig}(T^{-1} \tilde{A}_{cl} T) = \text{eig}(\tilde{A}_{cl}) = \text{eig}(A - BK) \cup \text{eig}(A - LC)$$

es handelt sich um eine Block-Dreiecks-Matrix

→ n Eigenwerte kommen von $A - BK$

→ n Eigenwerte kommen von $A - LC$

→ asymptotische Stabilität ist garantiert, wenn K & L mit dem LQR-Verfahren bestimmt wurden

→ Garantierte Stabilität ist nur ohne Modellfehler vorhanden → dank grosser Robustheit auch für reale Systeme geeignet

• Regelstreichen:

offener Regelkreis: $e_r \rightarrow y$, $e_r = r - y$

geschlossener Regelkreis: $r \rightarrow y$

offen → Robustheitsanalyse

geschlossen → Stabilitätsanalyse

• Übertragungsfunktionen:

$$L_{LQG}(s) = \tilde{C}_{cl}(sI - \tilde{A}_{cl})^{-1} \tilde{B}_{cl} \quad \tilde{C}_{cl} = [C \ 0]$$

$$T_{LQG}(s) = \tilde{C}_{cl}(sI - \tilde{A}_{cl})^{-1} \tilde{B}_{cl}$$

$$L_{LQG}(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot BK(sI - (A - BK - LC))^{-1} \cdot L$$

→ LQG hat die gleiche Ordnung wie P

→ LQG mit Folgeregelung:

• Variante 1: Nullpunktverschiebung:

→ identisch zur LQR-Folgeregelung

→ GGP nach $\{u_{\infty}, x_{\infty}\}$ verschieben

$$u(t) = u_{\infty} - K(\hat{x}(t) - \hat{x}_{\infty}) = u_{\infty} - K(\hat{x}(t) - x_{\infty})$$

→ $x_{\infty} = \hat{x}_{\infty}$ weil $e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \rightarrow 0$ geht

• Variante 2: Vorsteuerung:

$$r(t) = y_{\infty} = C \cdot x_{\infty}$$

$$0 = A x_{\infty} + B u_{\infty} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\infty} \\ u_{\infty} \end{bmatrix}$$

$$r(t) = C x_{\infty} \Rightarrow u_{\infty} + K x_{\infty} = - (C(A - BK)^{-1} \cdot B)^{-1} \cdot r(t)$$

• Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma r(t) - K \hat{x}(t)$$

• offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A + B\Gamma C & -BK \\ LC + B\Gamma C & A - BK - LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma r(t)$$

• geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \Gamma r(t)$$

→ LQGI:

• Ziel:

Erweiterung der LQG-Formulierung um einen Integrator, um Störungen zu unterdrücken

• Vorgehen:

$$v(t) = \int_0^t (0 - y(\tau)) d\tau \quad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+m}$$

• Regelgesetz:

$$u(t) = -K \hat{x}(t) + K_I v(t)$$

→ K & K_I sind Teillösungen der LQGI-Formulierung

• offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ 0 & A - BK - LC & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -L \\ I \end{bmatrix} e_r(t)$$

• geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & B \\ -L & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

→ LQGI mit Folgeregelung:

• Regelgesetz:

$$u(t) = \Gamma r(t) - K \hat{x}(t) + K_I v(t)$$

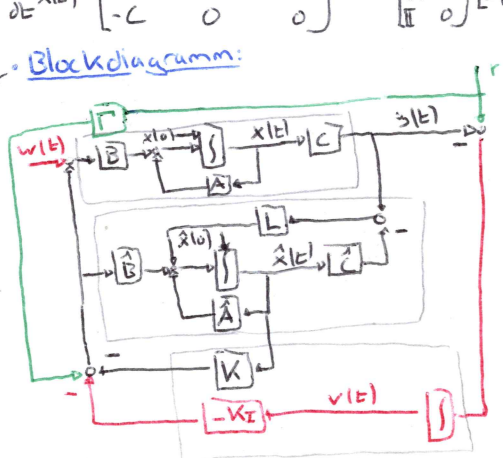
• offener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A + B\Gamma C & -BK & BK_I \\ LC + B\Gamma C & A - BK - LC & BK_I \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma \\ B\Gamma \\ I \end{bmatrix} e_r(t)$$

• geschlossener Regelkreis:

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} A & -BK & BK_I \\ LC & A - BK - LC & BK_I \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{bmatrix} B\Gamma & B \\ B\Gamma & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

• Blockdiagramm:



→ LTR: Loop-Transfer-Recovery

• Ziel:

Wiederherstellung der Robustheit des LQG-Reglers, weil μ_{min}, LQG beliebig klein sein kann

• Lösung:

→ L : $\tilde{B}$ muss B sein

schneller Beobachter $\Leftrightarrow$ kleines q

$\Leftrightarrow$ nähert sich der Robustheit von LQR

→ Herleitung:

Fehlerdynamik für $\lim_{q \rightarrow 0}$

$$\lim_{q \rightarrow 0} e(t) = \lim_{q \rightarrow 0} (A - L(q)C)^{-1} \cdot \dot{e}(t) = 0$$

$$\dot{e}(t) = (A - L(q)C) \cdot e(t) \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\text{eig}(X^{-1}) = 1/\text{eig}(X) \quad \lim_{q \rightarrow 0} \hat{x}(t) = x(t)$$

→ Eigenwerte von $(A - L(q)C)^{-1}$ gehen asymptotisch gegen 0

• Bemerkungen:

$\lim_{q \rightarrow 0} LQG \approx LQR$

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

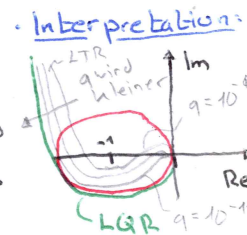
→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt

→ q sollte nicht beliebig klein gewählt werden, da dies hochfrequentes Rauschen verstärkt



Nützliches

Eingeschwungener Zustand:

→ alle Eingänge in Integratoren sind 0 → $\dot{x}(t) = 0 \Rightarrow$ Gleichgewicht

Zusammenhänge LQR:

$r \downarrow \Leftrightarrow$ Durchtrittsfrequenz $LQR \uparrow$

komplementäre Sensitivität $T(s)$ des inneren Regelkreises eines kaskadierten Regel-systemes:

$$T(s): r_f \rightarrow y_f: \frac{P_f C_f}{1 + P_f C_f} \quad y_f \neq u_s$$

Verhindern von Unterschwingen:

→ Falls ein System nicht minimalphasig Nullstellen hat, dann kann auch kein Regler den Undershoot verhindern
↳ keine nmp Nullstellen mit instabilen Polen kürzen

komplexe Nenner schnell umwandeln:

$$\frac{z}{r + cs} = \frac{zr - cw_i}{r^2 + c^2 w_i^2} \quad \text{Nyquist-Abtasttheorem}$$

maximale Abtastfrequenz f_{max} :

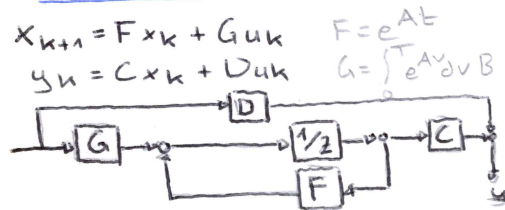
$$f_{max} \leq \frac{1}{2} f_s \quad \omega = 2\pi f \quad T = 1/f$$

$T_{max} \geq 2 T_s \sim$ tatsächlich abgetastete Werte

Diskretisierung:

$$\Delta = \frac{\text{Wertebereich}}{2^{\text{Auflösung}} - 1} = \# \text{ bits}$$

Zustandsraumdarstellung zeitdiskreter Systeme:



→ Stabilität:

asymptotisch stabil $\Leftrightarrow |EW| < 1 \vee \sqrt{\quad}$
 $\Leftrightarrow |Pole| < 1 \vee \sqrt{\quad}$

Alias-Effekt:

→ im abzutastenden Signal kommen Frequenzen f_{max} vor, die grösser als $\frac{1}{2} \cdot f_s$ (Abtastfrequenz) sind



Bsp.: $\omega_c = 3 \text{ Hz}$, Störung 50 Hz

- $30 \text{ Hz} = f_s$, kein AAF $\times$
- $30 \text{ Hz} = f_s$, AAF mit $f_{AAF} = 40 \text{ Hz}$ $\checkmark$
- $50 \text{ Hz} = f_s$, AAF mit $f_{AAF} = 40 \text{ Hz}$ $\checkmark$
- $50 \text{ Hz} = f_s$, kein AAF $\checkmark$

↳ Abtastfrequenz ist so gross, dass kein Aliasing auftritt → Störung kann nachträglich digital entfernt werden

Totzeit durch abtasten:

$$T_{Tot} = \frac{1}{2} \cdot T_s \text{ [s]} \quad (\text{Faustregel})$$

→ Phasenverlust durch Abtasten:

$$\Delta \varphi = T_{Tot} \cdot \omega = \frac{T_s}{2} \omega \text{ [rad]}$$

Faustregel Abtastfrequenz:

$$f_s \geq 10 \cdot f_c \sim \text{Durchtrittsfrequenz}$$

Infos zu Smith Predictor:

- Faustregel für den Einsatz:
↳ Totzeit sollte signifikant sein
- Totzeit erscheint nicht in der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises

$$Y(s) = e^{-sT} \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \cdot R(s)$$

→ Regelstrecke darf nicht instabil sein
↳ weil $T(s)$ die Pole von $P(s)$ enthält

Infos zu Kaskadenregelung:

- Regelstrecke muss nicht stabil sein
- Regelstrecke darf Totzeit enthalten
- innere Regelkreis darf auch 1-Teile haben, auch wenn es nicht empfohlen ist
- kann die Störungsunterdrückung verbessern
- kann wie ein normaler Regler in allen Situationen verwendet werden
- auch leicht andere Reglerstrukturen möglich als auf ZF Seite 1

Stabilität nach Emulation:

→ alle stabilen Pole bleiben bei einer Emulation mit Euler Backward & Tustin stabil → bei Euler Forward muss der zeitdiskrete Pol berechnet werden

Anwendung des Hurwitz-Kriteriums:

→ $n=3$, $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$
 $d_1 = a_2$, $d_2 = a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0$
 $d_3 = d_2 \cdot a_0 \rightarrow a_2 a_1 > a_0 a_3$

→ $n=4$, $a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$
 $d_1 = a_3$, $d_2 = a_3 a_2 - a_4 a_1$
 $d_3 = d_2 a_1 - a_3^2 a_0$, $d_4 = d_3 a_0$

→ allgemein:

$d_1 = a_{n-1}$, $d_2 = a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}$
 $d_3 = d_2 \cdot a_{n-3} - a_{n-1}^2 \cdot a_{n-4} + a_n \cdot a_{n-5}$
 $d_n = d_{n-1} \cdot a_0$

Riccati-Gleichung für den Beobachter:

$LT = R^{-1} C \Psi$
 $\Psi \leq T R^{-1} C \Psi - \Psi A^T - A \Psi - Q = 0$
 $\rightarrow R^{-1} = q^{-1} I \rightarrow Q = \bar{B} \bar{B}^T$