

Regelungstechnik

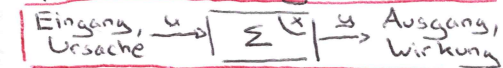
Systemdefinition:

Signal:

Funktion der Zeit, z.B.: $u(t)$, $y(t)$

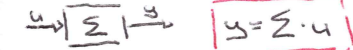
System:

Operator, der ein Signal ändert

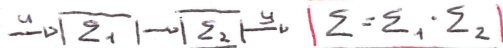


Schaltung von Systemen:

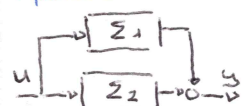
direkt:



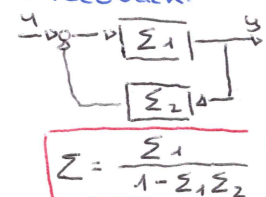
seriell:



parallel:



Feedback:



Systemklassifikation:

SISO (Single Input Single Output):

genau ein Eingang und ein Ausgang

MIMO (Multiple Input Multiple Output):

mehrere Eingänge und Ausgänge

$u(t), y(t) \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$

Linearität:

$$\Sigma(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \Sigma(u_1) + \beta \Sigma(u_2)$$

linear:

$$y(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \alpha \cdot u(t)$$

Kausalität:

kausal:

abhängig vom Jetzt/
Vergangenheit

$$y(t) = u(t-T), T \geq 0$$

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

alle physikalischen Systeme sind kausal

Dynamik:

dynamisch:

enthält Speicher
Dkt oder I

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$y(t) = u(t-T), T \neq 0$$

$$\frac{d}{dt} y(t) = \cos(u(t))$$

Zeitabhängigkeit:

zeitvariant:

Koeff. hängt von t ab

$$y(t) = \sin(t) u(t)$$

$$y(t) = u(t) + t$$

zeitvariante Systeme geben bei gleichen
Eingängen zu unterschiedlichen Zeitpunkten und
gleicher Anfangsbedingung unterschiedliche Ausgänge

Ordnung:

Speichergrößen / Zustandsvariablen

- höchste Ableitung einer OGL

Bsp.: Klassifizierung von Systemen:

$$\frac{dy(t)}{dt} = a^2 y(t) + \frac{1}{\sqrt{t}} u(t), u(t), y(t) \in \mathbb{R}$$

→ SISO, zV, l, d, 1.

$$y(t) = L \sin(u(t)), u(t), y(t) \in \mathbb{R}^2$$

→ MIMO, zV, n, l, s, 0.

$$\frac{dx(t)}{dt} = L^2 x(t) + b u(t)$$

$$y(t) = \cos(t) x(t) + d u(t)$$

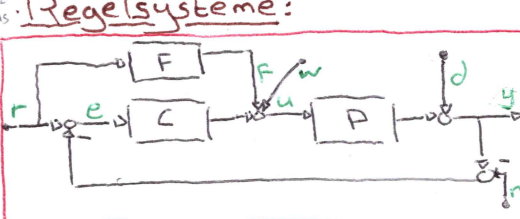
→ SISO, zV, l, d, 1.

$$\frac{dx(t)}{dt} = M(t)x(t) + N u(t)$$

$$y(t) = O x(t) + P u(t)$$

→ MIMO, zV, l, d, 1.

Regelsysteme:



r: Sollwert: Position im Raum, Geschwindigkeit

F: Feedforward: basierend auf Erfahrung, Wissen

C: Controller/Regler: Computerchip, Tempomat, Gehirn

D: Plant/ Strecke: physikalisches System, das man regeln will → Sign, Motor, Fahrzeug

Aktuator: Bauteile, die die Signale umsetzen

d: Störung: Wind, Steigung, halber Motor

Sensoren: Neigungsmesser, Thermometer

y: Ausgangsgröße, Ist-Wert: aktuelle Position

n: Rauschen: Ginsthaub beim Duschen

e: Regelfehler u: Stellgröße

Gründe für Feedback:

- Stabilisierung von instabilen Systemen

- Auswirkungen von Modellierfehler reduzieren

- Entgegenwirken von nicht-messbaren äußeren Störungen

Aufgaben von Regelsystemen:

- reference Tracking $r \rightarrow y$

- Störunterdrückung d

- Stabilisierung durch Feedback

MIMO Systeme:

outputs > # inputs: Ausgänge können nicht unabhängig voneinander angesteuert werden

outputs < # inputs: einige Eingänge sind redundant → zusätzliche Freiheitsgrade können zur Systemoptimierung verwendet werden, beispielsweise Effizienz

Blockdiagramme:

Das ganze System kann für gewisse Werte gegen Unendlich streben, obwohl die einzelnen Subblöcke finite Wachstume aufweisen

Unterschied Störung - Rauschen:

→ Störung d wirkt sich direkt auf die Ausgangsgröße aus, Rauschen nicht

→ verst. durch das Messen von y wird das Signal durch den Messfehler n korumpiert → durch Feedback wird n in den Controller zurückgeführt

→ falls C nicht gut designed ist, taucht n im wahren Output auf

→ Tiefpassfilter

Modellierung:

Vorgehen:

1.) Systemgrenzen identifizieren

→ Was gehört dazu?

→ Was sind die Zuflüsse/Abflüsse?

2.) Reservoirs, relevante Speicher identifizieren

- Masse, Energie, Ladung

3.) zugehörige Pegelvariablen/level state variable auffindig machen

4.) OGL für alle Speicher aufstellen

$$\frac{d}{dt} (\text{Speicherinhalt}) = \Sigma \text{Zuflüsse} - \Sigma \text{Abflüsse}$$

5.) Algebraische Relationen zwischen zu- und Abflüssen als Funktion der Pegelvariablen formulieren

6.) Unbekannte Systemparameter durch Experimente bestimmen

7.) Modell mit neuen Daten validieren

Physik:

Energien:

Federenergie: $E = 1/2 k(x-x_0)^2$

Kinetische Energie: $E = 1/2 m \dot{x}(t)^2$

Potenitielle Energie: $E = m \cdot g \cdot (x-x_0)$

Rotationsenergie: $E = 1/2 J \omega(t)^2$

Kräfte:

Federkraft: $F = k(x-x_0)$

Dämpferkraft: $F = d \cdot \dot{x}$

translatorische Leistung: $P = F \cdot \dot{x}(t)$

rotatorische Leistung: $P = M \cdot \dot{\varphi}(t)$

Leistungen:

→ Erhaltungssätze:

- Impulserhaltung: $\Sigma \vec{F}_i^{\text{ext}} = M \cdot \ddot{\vec{x}}_{CM} = \dot{\vec{p}}$

- Drehimpulserhaltung: $\Sigma \vec{M}_i^{\text{ext}} = J_B \ddot{\varphi}$

$\ddot{\varphi}$: momentane Winkelbeschleunigung

J_B : Trägheitsmoment

Bsp.: Modellierung:

1) Zufluss: Kraft durch den Wind

2) $E = E_{\text{pot, Masse}} + E_{\text{pot, Feder}} + E_{\text{kin, Masse}}$

$$= -m g z(t) + 1/2 k z(t)^2 + 1/2 m \dot{z}(t)^2$$

Wind

3) z und $\dot{z}$ sind die Regelvariablen

4) $\frac{d}{dt} E(t) = -m g \dot{z} + k z \dot{z} + m \dot{z} \dot{z}$

$$= -F_{\text{Wind}} \cdot \dot{z} = -F_k (\dot{z} + v(t))^2 \cdot \dot{z}$$

5) $m \ddot{z} = m g - k z - F_k (\dot{z} + v(t))^2$

→ Alternative: Impulserhaltung

$$m \ddot{z} = F_g - F_{\text{Feder}} - F_{\text{Wind}}$$

$$= m g - k z - F_k (\dot{z} + v(t))^2$$

→ Integrale entsprechen Speicher

Variablen Klassifikation:

- algebraisch/schnell T_a

→ reagieren so schnell, dass sie als Funktion f angenommen werden können

- dynamisch/relevant T_d

→ werden als konstant angenommen

- stabilisch/langsam T_s

→ werden als konstant angenommen

Diagramm: Variablen $T_a < T_d < T_s$

→ das, was man regeln

Anregung Zeit

Normierung:

Zustandsgleichung:

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = \vec{f}(\vec{z}(t), v(t)) \quad \vec{z} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$w(t) = g(\vec{z}(t), v(t)) \quad w \in \mathbb{R}$$

$\vec{z}(t)$: Zustandsvektor

physikalische Größen als Spaltenvektor

$v(t)$: Input/Eingang

$w(t)$: Ausgang/Regelgröße

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$; $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Anwendung:

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ z \end{bmatrix} \quad \vec{z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

Bsp.: Feder

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = \vec{z} = \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ 1/m(mg - k z_1 - F_k(z_2 + v(t))) \end{bmatrix}$$

Gleichgewichtspunkt:

$$\frac{d}{dt} \vec{z}(t) = 0 \rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0 \rightarrow z_{eq}, v_{eq}$$

$$0 = F(z_{eq}, v_{eq}); w_{eq} = g(z_{eq}, v_{eq})$$

Normierungsschritt:

- keine Einheiten mehr, ausser Zeit t
- einfachere Interpretation der Daten
- Vorbeugen von numerischen Problemen
- Bit-Auflösung Speicher

$$\vec{z}_i(t) = z_{i,0} \cdot x_i(t) \quad z_{i,0}: \text{Konstante} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\vec{z} = \underline{T}_0 \cdot \vec{x} \rightarrow \underline{T}_0 = \text{diag}(z_{1,0}, \dots, z_{n,0})$$

$$v(t) = v_0 \cdot u(t) \rightarrow u(t) = \frac{v(t)}{v_0}$$

$$w(t) = w_0 \cdot y(t) \rightarrow y(t) = \frac{w(t)}{w_0}$$

normierte System:

$$\dot{\vec{x}} = \underline{T}^{-1} \cdot \vec{f}(\underline{T} \cdot \vec{x}, v_0 \cdot u) = \vec{f}_0(\vec{x}, u)$$

$$y = w_0^{-1} \cdot g(\underline{T} \cdot \vec{x}, v_0 \cdot u) = g_0(\vec{x}, u)$$

Anwendung:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}_0(\vec{x}, u) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1/z_{1,0} \\ z_2/z_{2,0} \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = \frac{z_1(t)}{z_{1,0}} \rightarrow \dot{x}_1(t) = \frac{\dot{z}_1(t)}{z_{1,0}}$$

$$x_2(t) = \frac{z_2(t)}{z_{2,0}} \rightarrow \dot{x}_2(t) = \frac{\dot{z}_2(t)}{z_{2,0}}$$

Bemerkung:

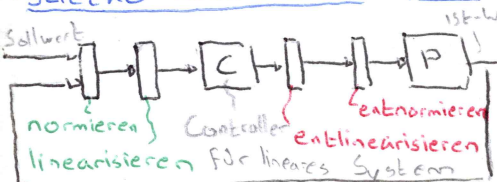
Falls die Gleichgewichtspunkte $\equiv 0$ sind $\rightarrow$ Maximal oder Mittelwerte für die Normierung verwenden

Bsp.: Feder

$$z_{1,0} = p; \quad z_{2,0} = h; \quad v_0 = v_{max}$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} 1/p(h \cdot x_2) \\ 1/h(m \cdot (mg - k p x_1 - F_k(h x_2 + v_{max} u))) \end{bmatrix}$$

Strecke - Controller Interface:



Linearisierung:

$\rightarrow$ Linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $\{x_{eq}, u_{eq}\}$ (Koordinatentransformation)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_0(x, u) \\ y &= g_0(x, u) \\ &\approx \\ \dot{x} &= Ax + bu \\ y &= cx + du \end{aligned}$$

der Fehler durch die Linearisierung ist grösser je weiter man vom GGP entfernt ist
gewisse Informationen können verloren gehen
 $\rightarrow$ z.B.: Dämpfung in gewissen Fällen

Vorgehen:

Taylorentwicklung 1. Ordnung

$$\dot{x} = f_0(\delta x + x_{eq}, \delta u + u_{eq})$$

Jacobi-Matrizen:

$$A = \frac{\partial f_0}{\partial x} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{eq}, u=u_{eq}} \quad b = \frac{\partial f_0}{\partial u} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{eq}, u=u_{eq}}$$

$$c = \frac{\partial g_0}{\partial x} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{eq}, u=u_{eq}} \quad d = \frac{\partial g_0}{\partial u} \Big|_{\vec{x}=\vec{x}_{eq}, u=u_{eq}}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,1}}{\partial x_2} & \dots \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{0,2}}{\partial x_2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{0,1}}{\partial u} \\ \frac{\partial f_{0,2}}{\partial u} \\ \vdots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$$

$$c = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_0}{\partial x_1} & \frac{\partial g_0}{\partial x_2} & \dots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

Zustandsraumdarstellung:

$\rightarrow$ Lineares zeitinvariantes (LTI) System:

$$\dot{\vec{x}} = A \vec{x} + b \delta u \Rightarrow \dot{\vec{x}}(t) = A x(t) + b u(t)$$

$$\delta y = c \vec{x} + d \delta u \Rightarrow y(t) = c x(t) + d u(t)$$

$\rightarrow$ d wird weggelassen

Allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{A \cdot t} \cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot b \cdot u(s) ds$$

$$y(t) = c e^{A \cdot t} \cdot x_0 + c \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot b \cdot u(s) ds + d u(t)$$

I: natürliche Antwort des Systems
unabhängig von der Eingangsgröße u

II: Systemdynamik (Faltung)

III: Feedthrough Term

Trajektorien-darstellung:

$x(t)$ kann als Kurve in einem n-dimensionalen Vektorraum dargestellt werden

Systemanalyse:

Jedes lineare System besteht aus Teilsystem 1. und 2. Ordnung

Testsignale:

System 1. Ordnung:

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\frac{1}{T} x(t) + \frac{k}{T} u(t) \quad y(t) = x(t)$$

$\rightarrow$ 2. Freiheitsgrade:

- Zeitkonstante $T > 0$
- Verstärkung $k > 0$

Impulsantwort:

$$u(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Dirac Delta Funktion

$$y(t) = e^{-t/T} (x_0 + k/T)$$

Sprungantwort:

$$u(t) = h(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ Heavyside Funktion

$$y(t) = e^{-t/T} \cdot x_0 + k(1 - e^{-t/T})$$

Rampenantwort:

$$u(t) = r(t) = t \cdot h(t)$$

$$y(t) = e^{-t/T} \cdot x_0 + k \cdot (t + (e^{-t/T} - 1) \cdot T)$$

Harmonische Antwort:

$$u(t) = c(t) = \cos(\omega t) \cdot h(t)$$

$$y(t) = m(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

$$m(\omega) = k / \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

Zeitkonstante bei

Impuls- und Sprungantwort:

T ist gleich der Zeit, bei der die Tangente an den Graphen zur Zeit $t=0$ den finalen Wert $y(\infty)$ erreicht

Verstärkung k bei Sprung:

$$y(t \rightarrow \infty) = 0 \cdot x_0 + k(1 - 0) = k$$

$\rightarrow$ Wert gegen den y konvergiert

Sprungantwort mit $T < 0$:

$\rightarrow$ System ist instabil

Signalflussbild:

Ordnung des Systems: # Integriatoren

Systemanalyse (Fortsetzung):

Lyapunov Stabilität:

Stabilitätskonzept bei Zustandsraumdarstellung (Stabilitätsanalyse von GGP)

Analysiert das Verhalten des Zustandes $x(t)$ mit $x(0) \neq 0$ und $u(t) = 0$

Definition: $\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \lambda_i$

asymptotisch stabil: (i)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad \forall i$$

(grenz-) stabil: (ii)

$$\|x(t)\| < \infty \quad \forall t \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0 \quad \forall i$$

System ist instabil, falls mehrfache $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ und A nicht diagonalisierbar

instabil: (iii)

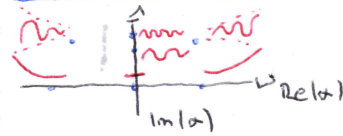
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = \infty \Leftrightarrow \exists i \text{ mit } \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$$

Stabilitätsprinzip:

Falls die Stabilität des GGP eines linearisierten Systems den Fällen (i) oder (iii) entspricht, gilt dies auch für die Stabilität desselben GGP im nichtlinearen System

gilt nicht für grenzstabile Systeme

Verhalten von e^{Ax} :



Herleitung:

Entkopplung der einzelnen Zustände

Diagonalisieren mit $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Steuerbarkeit:

Ein Punkt $x_c \in \mathbb{R}^n$ ist steuerbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor in x_1 endlicher Zeit zum Ursprung ($x(t) = 0$) bringt.

Erreichbarkeit:

Ein Punkt $x_r \in \mathbb{R}^n$ ist erreichbar, falls ein Eingangssignal $u(t)$ existiert, das den Zustandsvektor in x_1 endlicher Zeit T zum Zustand x_r bringt.

Steuerbarkeitsmatrix R:

Für LTI Systeme sind die Teilräume der erreichbaren und steuerbaren Zustände identisch

$$R = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \dots \quad A^{n-1}b] \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\operatorname{Rang}(R) = n \Leftrightarrow \det(R) \neq 0 \Rightarrow$ System ist vollständig steuerbar/erreichbar

alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ sind steuerbar $\Leftrightarrow$ System heisst vollständig steuerbar
alle Punkte in $\mathbb{R}^n$ sind erreichbar $\Leftrightarrow$ System heisst vollständig erreichbar

Beobachtbarkeit:

Ein System ist vollständig beobachtbar, wenn man mit der Messung des Ausgangssignals $y(t)$ eindeutig auf den Anfangszustand $x(0)$ schliessen kann.

Beobachtbarkeitsmatrix O:

$$O = \begin{bmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Rang}(O) = n \Leftrightarrow \det(O) \neq 0 \Rightarrow$ LTI System ist vollständig beobachtbar

Allgemeines:

Steuerbarkeit, Erreichbarkeit, Beobachtbarkeit sind strukturelle Eigenschaften des Systems und sind unabhängig von der spezifischen Wahl von $u(t)$ oder der Messmethode von $y(t)$

Stabilisierbarkeit:

potenziell stabilisierbar:

alle nicht steuerbaren Zustandsvariablen sind asymptotisch stabil $\rightarrow$ Stabilisierbarkeit ist eine schwächere Bedingung als Steuerbarkeit

Detectierbarkeit:

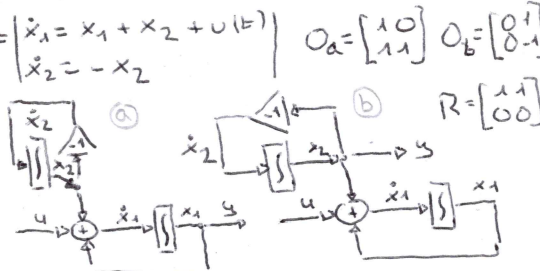
alle nicht beobachtbaren Zustandsvariablen sind asymptotisch stabil $\rightarrow$ Detectierbarkeit ist eine schwächere Bedingung als Beobachtbarkeit

Schlussfolgerung:

Ein (unstabiles) System ist stabilisierbar, wenn es potenziell stabilisierbar und detectierbar ist

Bsp: Systemanalyse:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, c_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow y = x_1, c_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow y = x_2$$



$\operatorname{Rang}(R) = 1 < n = 2 \rightarrow$ System ist nicht vollständig steuerbar/erreichbar
 $\rightarrow$ Zustand x_2 ist unabhängig von $u(t)$
 $\hookrightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1, -1$
 $\hookrightarrow$ EV zum EW -1 ist [0]
 $\hookrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{x_2}) = \operatorname{Re}(-1) < 0 \rightarrow$ asymptotisch stabil
 $\hookrightarrow$ potenziell stabilisierbar
 $\hookrightarrow \operatorname{Rang}(O_a) = n = 2$
 $\hookrightarrow$ System ist vollständig beobachtbar
 $\hookrightarrow$ System a ist stabilisierbar
 $\hookrightarrow \operatorname{Rang}(O_b) = 1 < n$
 $\hookrightarrow$ System ist nicht vollständig beobachtbar
 $\hookrightarrow x_1$ ist nicht asymptotisch stabil
 $\hookrightarrow \operatorname{Re}(\lambda_{x_1}) = \operatorname{Re}(1) > 0$
 $\hookrightarrow$ System b ist nicht detectierbar und stabilisierbar

Wertebereich / Spaltenvektoren spannen den steuerbaren Unterraum auf

Koordinatentransformation:

$$x(t) = T \tilde{x}(t) \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det(T) \neq 0$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}(t) = T^{-1} \cdot A \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + T^{-1} \cdot b \cdot u(t)$$

$$y(t) = c \cdot T \cdot \tilde{x}(t) + d \cdot u(t)$$

Fundamentale Systemeigenschaften (Stabilität, Steuerbarkeit, I/O-Verhalten) sind Transformationsinvariant

I/O Darstellung:

Input/Output Darstellung

Zusammenhang zwischen $u(t) \rightarrow y(t)$

keine physikalischen Koordinaten

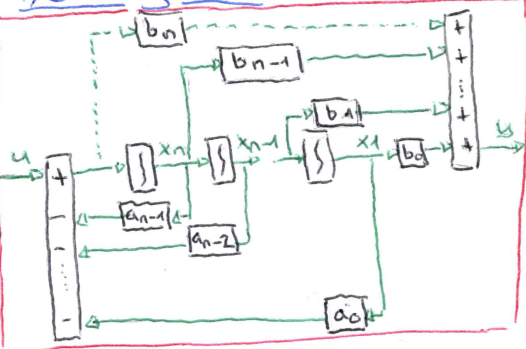
alle Anfangsbedingungen sind 0

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 0 \neq n$$

I/O Gleichung:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \dots + b_1u'(t) + b_0u(t)$$

I/O Diagramm:



Zustandsraum:

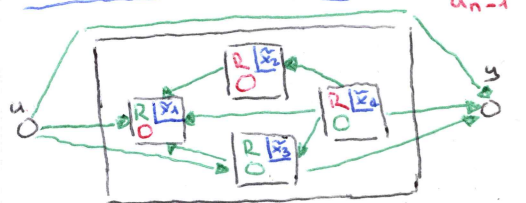
Zustandsraum Normalform:

unendlich viele Möglichkeit Koordinaten für den Übergang I/O $\rightarrow$ Zustandsraum zu wählen

Regler normalform:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & 1 \\ b_0 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Zustandsraumzerlegung:



R: steuerbar, O: beobachtbar, R: nicht st., O: nicht beob.

I/O Verhalten eines Systems lässt sich nur durch die Zustände $\tilde{x}_3$ beschreiben
 $\rightarrow$ gleichzeitig erreichbar und beobachtbar
 $\rightarrow$ # Zustände im Unterraum $\tilde{x}_3$ entspricht der minimalen # Zustände zur Beschreibung des I/O-Verhaltens

minimale Ordnung:

$\min\{\operatorname{Rang}(O), \operatorname{Rang}(R)\}$
keine Pole und Nullstellen kürzen sich
kürzen von Termen in $\mathcal{E}(s)$
 $\Rightarrow$ nicht beobachtbare oder steuerbare Zustände
minimal $\Leftrightarrow$ vollständig steuer- & beobachtbar
 $\rightarrow$ oo-viele Darstellungen

Übertragungsfunktion:

Herleitung:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + b u(t); y(t) = c x(t); x(0) = 0$$

→ Laplace Transformation

$$sX(s) = AX(s) + bU(s); Y(s) = cX(s)$$

Definition:

$$\Sigma(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d$$

$$= c \cdot \frac{A \text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} \cdot b + d = b_m \frac{\prod_{j=1}^m (s - \xi_j)}{\prod_{i=1}^n (s - \pi_i)}$$

→ $\xi_j, \pi_i \in \mathbb{C}$

Anmerkungen:

- bei physikalischen Systemen: $n \geq m$
- Nenner entspricht der charakteristischen Gleichung der Matrix A → $\det(sI - A)$
- ↳ Stabilitätseigenschaften der GAP lassen sich am Nenner ablesen

$Z(s)$ beschreibt nur I/O-Verhalten
 $L\{o(t)\} = \Sigma(s) \rightarrow$ Übertragungsfunktion eines Systems ist gleich der LP-Transform seiner Impulsantwort

Totzeit:

$$\dot{x} = x + u(t - 0.01) \rightarrow e^{-0.01t}$$

→ versteht wird angenommen, dass $u(t)$

LinAlg:

Adjunkte:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

$$[\text{adj}(A)]_{ij} = [(-1)^{i+j} \det(A_{ji})]^T$$

→ $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$; streichen der j -ten Zeile und i -ten Spalte von A

2x2 Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

3x3 Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{pmatrix}$$

Pole und Nullstellen:

π_i : Pole; ξ_j : Nullstellen

Pol $\pi_i \Rightarrow$ Eigenwert $\lambda_i A$

↳ π_i : Nullstellen und Pole können sich kürzen

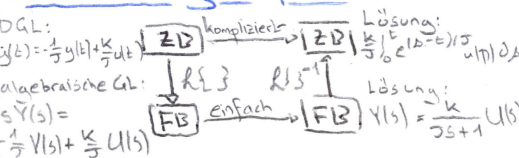
Transferfunktion für I/O-Darstellung:

$$\Sigma(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}$$

Überblick Systemdarstellungen:

	Zeitbereich	Frequenzbereich
SP	$\frac{d}{dt} x(t) = Ax(t) + bu(t)$ $y(t) = cx(t) + du(t)$	$Y(s) = [c(sI - A)^{-1}b + d]U(s)$
IO	$y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \dots + b_1 u'(t) + b_0 u(t)$	$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} U(s)$

Zusammenhänge Laplace:



BIBO Stabilität:

→ Bounded Input bounded output

$$\text{BIBO stabil} \Leftrightarrow \int_0^\infty |G(\tau)| d\tau < \infty$$

$$\Leftrightarrow \text{Re}(\pi_i) < 0 \forall i$$

Unterschied BIBO - Lyapunov:

→ BIBO bezieht sich auf das I/O-Verhalten von $\Sigma(s)$

→ Lyapunov bezieht sich auf das Gleichgewicht der Zustände

Zusammenhänge BIBO - Lyapunov:

→ minimales System:

asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ BIBO stabil

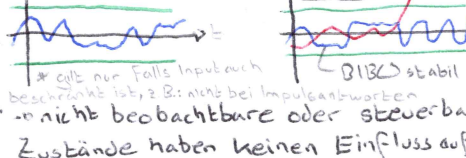
Lyap. stabil oder instabil $\Leftrightarrow$ nicht BIBO stabil

→ nicht minimales System:

asymptotisch stabil $\Rightarrow$ BIBO stabil

Lyap. stabil oder instabil $\Leftrightarrow$ nicht BIBO stabil

Graphische Darstellung:



→ nicht beobachtbare oder steuerbare Zustände haben keinen Einfluss auf BIBO

Pole und Nullstellen:

Systeme 2. Ordnung:

$$\Sigma(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}; \Sigma(0) = 1$$

→ statische Verstärkung von 1

Pole:

$$s_{1,2} = \pi_{1,2} = (-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}) \cdot \omega_0$$

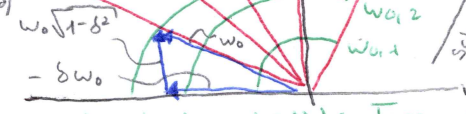
Parameter:

δ : Dämpfungsparameter

$\omega_0 = 2\pi/T_0$: natürliche Frequenz des Systems

T_0 : natürliche Periode

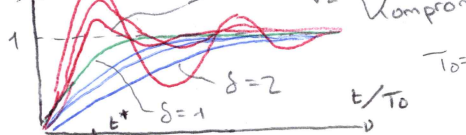
Pole auf der komplexen Ebene:



ω_0 : konstante natürliche Frequenzen

δ : konstante Dämpfungsparameter

Sprungantwort:



$0 < \delta < 1$: Unterdämpft

- komplexe Pole, schwingendes Verhalten

→ überschiesst das Ziel um den Überschuss

$$\hat{e} = e^{-\delta\pi/\sqrt{1-\delta^2}}, \text{ bei } t^* = \pi/\omega_0\sqrt{1-\delta^2}$$

$$y(t) = h(t) \cdot \left[1 + e^{\delta_0 t} \cdot \left(\frac{\delta_0}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \cos(\omega_1 t) \right) \right]$$

$\delta > 1$: Überdämpft

- reelle Pole, keine Schwingung

→ überschiesst nicht ein Pol konvergiert viel schneller

$$\Sigma(s) = \omega_0^2 / [(s + \pi_1)(s + \pi_2)] \approx \frac{\pi_1}{s + \pi_1}$$

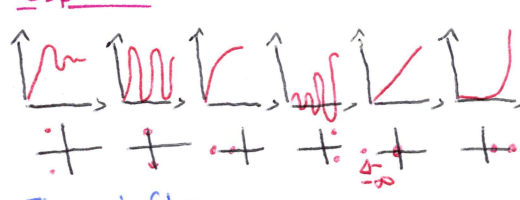
$$y(t) = h(t) \cdot \left[1 + e^{\delta_0 t} \cdot \left(\frac{\delta_0}{\omega_2} \sinh(\omega_2 t) - \cosh(\omega_2 t) \right) \right]$$

$\delta = 1$: (kritische Dämpfung)

→ 2 reelle Pole an der selben Stelle

$\pi_{1,2} = \omega_0$ → schnellstmögliche Konvergenz ohne Überschwingen

Bsp.: Pole



Eigenschaften:

2. Ordnung: Gradient $t=0$ ist 0

1. Ordnung: Steigung $\neq 0$

→ der Output wird mit der natürlichen Frequenz skaliert

→ Für $\delta > 1$: Sprungantwort wird durch den Pol, welcher näher beim Ursprung ist dominiert

Nullstelleneinfluss: (Sprungantwort)

Je näher die Nullstelle am Ursprung ist, desto stärker ist ihr Einfluss

↳ größerer Überschuss

→ eine Nullstelle nahe bei einem Pol unterdrückt dessen Einfluss auf den Output

→ in die falsche Richtung

→ $\delta = 1/2$

$-\xi < 0$

$-\xi > 0$

$-\xi = \pm \infty$

minimale, nicht-minimale, maximale

Undershoot: System reagiert zu erst in die falsche Richtung

nicht-minimalphasige Nullstelle:

$\xi > 0$ → Folgen aus Sensoren und Aktuator

→ Eigenschaft aus Kombination von b und c

ungerade # positiver Nullstellen $\Leftrightarrow$ Undershoot

Zero dynamics

→ Output ist 0, obwohl der Input $\neq 0$ ist

→ Bsp.: 2-Massen-Schwinger

Zusammenhänge:

ohne Nullstelle $\Leftrightarrow$ Steigung bei $t=0$ ist $\neq 0$

mit Nullstelle $\Leftrightarrow$ Steigung bei $t=0$ ist $= 0$

minimalphasige Nullstelle $\Leftrightarrow$ Überschwingen

nicht-minimalphasige Nullstelle $\Leftrightarrow$ Überschwingen

Bsp.: Nullstellen



a: Steigung $\neq 0$, großes Überschw. → minimalph. N. nahe 0

b: Steigung $\neq 0$, kleines Überschw. → minimalph. N. weit von 0

c: Steigung $= 0$, Überschw. → keine N., weniger gedämpft

d: Steigung $\neq 0$, kleines Unterschw. → n.-minimalph. N. weit von 0

e: Steigung $\neq 0$, großes Überschw. → n.-minimalph. N. nahe bei 0

Pol-Nullstellen Kürzung:

- nicht steuerbare oder beobachtbare Zustände

→ durch Pol-Nullstellen Kürzungen eliminiert

→ nur steuerbare und beobachtbare Zustände haben einen Einfluss auf das I/O-Verhalten

Frequenzantworten:

Input: (harmonische Schwingung)

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

α : Amplitude ω : Frequenz in rad/s
 φ : Phasenverschiebung

Output: (asymptotisch stabiles LTI-System)

$$y(t) = y_{\text{transient}}(t) + y_{\infty}(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{transient}}(t) = 0; \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_{\infty}(t)$$

$$y_{\infty}(t) = m(\omega) \cdot \alpha \cdot \cos(\omega t + \varphi + \phi(\omega))$$

$$y_{\infty}(t) = |Z(i\omega)| \cdot \alpha \cdot \cos(\omega t + \varphi + \angle Z(i\omega))$$

→ verstärkter und phasenverschobener Cosinus mit der gleichen Frequenz

→ LTI-Systeme generieren keine neuen Frequenzen

→ Koeffizienten

$$m(\omega) = |Z(i\omega)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\phi(\omega) = \angle Z(i\omega) = \arctan(-b/a)$$

Herleitung:

→ Cosinus in komplexer Exponentialform schreiben
 → Realteil konvergiert, da $\omega < 0$
 → nur Imaginärteil bleibt → in $Z(s)$ einsetzen

Komplexe Zahlen:

→ Euler'sche Identität:

$$z = a + ib = |z| [\cos(\angle z) + i \sin(\angle z)] = |z| e^{i \angle z} \Rightarrow |Z(i\omega)|_{\text{dB}} = |Z_1|_{\text{dB}} + |Z_2|_{\text{dB}}$$

Betrag: $\hookrightarrow$ Betrag von z $\hookrightarrow$ Argument von z

$$\left| \frac{(a+ib)^x}{(c+id)^y} \right| = \frac{(\sqrt{a^2+b^2})^x}{(\sqrt{c^2+d^2})^y}$$

Phase: $\hookrightarrow$ Totzeit: siehe Euler'sche Identität

$$\angle \left(\frac{(a+ib)^x}{(c+id)^y} \right) = x \angle(a+ib) - y \angle(c+id)$$

$$= x \arctan(b/a) - y \arctan(d/c)$$

→ Am Einheitskreis überlegen in welchem Quadranten sich z befindet

Bsp: Frequenzantwort

$$Z(s) = \frac{s+8}{(s+2)(s+4)} \quad u(t) = \cos(8t)$$

$$\hookrightarrow y_{\infty} = |Z(8i)| \cdot \cos(8t + \angle Z(8i))$$

$$|Z(8i)| = \frac{|8i+8|}{|(8i+2)(8i+4)|} = 0.1534$$

$$\angle Z(8i) = \angle(8i+8) - \angle(8i+2) - \angle(8i+4)$$

Bode Diagramm:

Magnitudenverlauf und Phasenverlauf werden über einer logarithmischen Frequenzskala eingezeichnet

dB-Skala:

$$x_{\text{dB}} = 20 \cdot \log_{10}(x) \quad x = 10^{\frac{x_{\text{dB}}}{20}}$$

$$\left| \frac{1}{x} \right|_{\text{dB}} = -(x_{\text{dB}}) \quad (x \cdot y)_{\text{dB}} = x_{\text{dB}} + y_{\text{dB}}$$

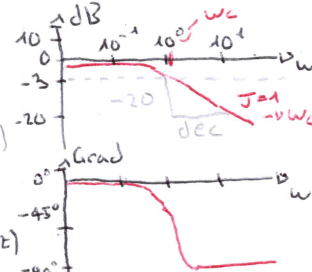
$$\hookrightarrow \text{Bsp: } -12 \text{ dB} = -6 \text{ dB} - 6 \text{ dB} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/4$$

Wert	dB	0.1	0.5	1	2	5	10	100	60
0	-∞								
0.001	-60	1/1000							
0.01	-40	1/100							
0.2	-14								

Bode Diagramm: System 1. Ordnung

$$Z(s) = \frac{1 \cdot k}{Js + 1}$$

→ Eckfrequenz (Cutoff Frequency): $\omega_c = 1/J$

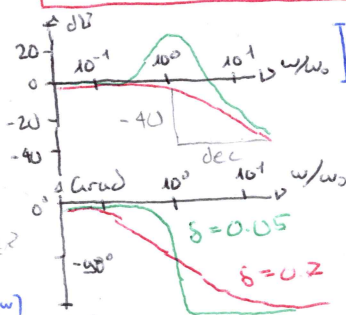


→ Merkmale:

→ reagiert auf tiefe Frequenzen $\omega < \omega_c$
 → Magnitude bei $\omega_c = 1/J$

Bode Diagramm: System 2. Ordnung

$$Z(s) = \frac{\omega_0^2 \cdot k}{s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2}$$



→ Resonanz-Überhöhung:

$\omega_{\text{max}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\delta^2}$
 → δ klein $\hookrightarrow \omega_{\text{max}} \approx \omega_0$
 → $\delta > 1/\sqrt{2}$ $\hookrightarrow$ kein resonantes Verhalten

→ Bode Diagramm zeichnen:

Nützliche Eigenschaften:

$$|Z(i\omega)| = |Z_1(i\omega)| \cdot |Z_2(i\omega)|$$

$$\angle(Z_{\text{tot}}) = \angle(Z_1 \cdot Z_2) = \angle(Z_1) + \angle(Z_2)$$

Vorgehen:

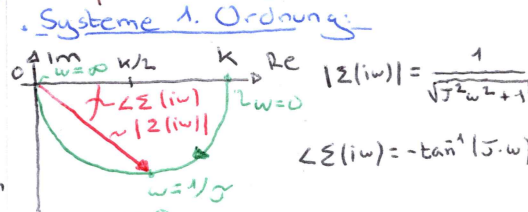
→ $Z(s)$ in elementar Funktionen aufspalten
 nur direkt bestimmbar, falls alle Elemente in Normalform angegeben sind, sonst $s=0$ einsetzen

Term	Magnitude	Phase
reeller Pol: $\frac{1}{\frac{s}{\omega_0} + 1}$	$\omega < \omega_0$: 0 dB $\omega > \omega_0$: -20 dB/dec	$\omega < \omega_0$: 0° $\omega > \omega_0$: -90° Costabil
reelle Nullst.: $\frac{s}{\omega_0} + 1$	$\omega < \omega_0$: 0 dB $\omega > \omega_0$: +20 dB/dec	$\omega < \omega_0$: 0° $\omega > \omega_0$: +90° Comphase
Pol am Ursprung $\frac{1}{s}$	-20 dB/dec durch P(0,0, w=1)	-90° $\forall \omega$
Nullstelle am Ursprung s	+20 dB/dec durch P(0,0, w=1)	+90° $\forall \omega$
schwach gedämpfter Pol $\frac{1}{(\frac{s}{\omega_0})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_0}) + 1}$	$\omega < \omega_0$: 0 dB $\omega > \omega_0$: -40 dB/dec → Peak: bei ω_0 mit $20 \log_{10}(2\zeta)$	$\omega < \omega_0$: 0° $\omega > \omega_0$: -180°
schwach gedämpfte Nullst. $(\frac{s}{\omega_0})^2 + 2\zeta(\frac{s}{\omega_0}) + 1$	$\omega < \omega_0$: 0 dB $\omega > \omega_0$: +40 dB/dec → Dip: bei ω_0 mit $20 \log_{10}(2\zeta)$	$\omega < \omega_0$: 0° $\omega > \omega_0$: +180° → exponentieller Abfall
Totzeit e^{-sT}	keine Änderung (τ [s]) = s	-180° WT $T = 1/\omega_0$

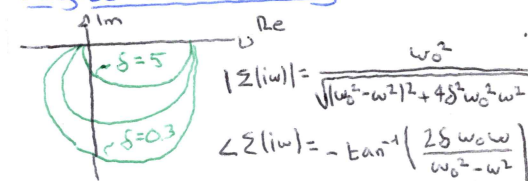
→ Vielfachheit größer 1: Verstärkung und Phasenänderung muss mit n multipliziert werden

Stabiler Pol: -90° bei ω_c ; minimalphasige NS: +90°
 instabiler Pol: +90° bei ω_c ; nicht-minimalphasige NS: -90°

Nyquist Diagramm: Systeme 1. Ordnung:



Systeme 2. Ordnung:



Eigenschaften:

Darstellung des Frequenzganges (Magnitude und Phase über die Anregungsfrequenz ω) in der komplexen Ebene → Symmetrisch zur Realen-Achse

Wichtige Nyquist Diagramme

	0	1	2	3
0	$\frac{s+a}{s+b}$ R=0	$\frac{1}{s+b}$ R=1	$\frac{1}{(s+b_1)(s+b_2)}$ R=2	$\frac{1}{(s+b_1)(s+b_2)(s+b_3)}$ R=3
1	$\frac{s+a}{s}$ R=1	$\frac{1}{s}$ R=2	$\frac{1}{s(s+b)}$ R=3	$\frac{1}{s(s+b_1)(s+b_2)}$ R=4
2	$\frac{(s+a_1)(s+a_2)}{s^2}$ R=2	$\frac{s+a}{s^2}$ R=3	$\frac{1}{s^2}$ R=4	$\frac{1}{s^2(s+b)}$ R=5
3	$\frac{(s+a_1)(s+a_2)(s+a_3)}{s^3}$ R=3	$\frac{(s+a_1)(s+a_2)}{s^3}$ R=4	$\frac{s+a}{s^3}$ R=5	$\frac{1}{s^3}$ R=6

→ Totzeit: $\hookrightarrow N$: # Pole $\ominus$ - # Nullstellen

$\hookrightarrow$ vk: Systemtyp $\rightarrow R = k + N$

e^{-sT} : Spiralen um den Ursprung

Vorgehen: $\hookrightarrow$ Bsp: $Z(s) = \frac{3}{s+1}$

$$1) \lim_{\omega \rightarrow 0} Z(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{3}{i\omega+1} = 3$$

$$2) \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z(i\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{3(i\omega-1)}{-\omega^2-1} = 0-0=0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[3i \frac{\omega}{-\omega^2-1} - \frac{3}{-\omega^2-1} \right] = 0-0=0$$

→ mit konjugiert komplex erweitern

$$3) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle(Z(i\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle \left(\frac{3}{i\omega+1} \right) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\angle(3) - \angle(i\omega+1)] = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

4) evtl. Schnittpunkte Imaginär-Achse

5) evtl. Schnittpunkte Reelle-Achse

6) Phasenverlauf betrachten:

→ Phase fällt streng monoton ab

7) evtl. Spiegeln an der Reellen-Achse

Tipp:

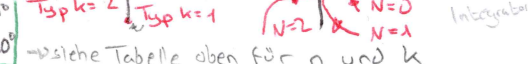
→ Pol im Ursprung (offener Integrator)

→ $\hookrightarrow$ Betrag geht für $\omega \rightarrow 0$ gegen Unendlich

→ negatives Vorzeichen → anderer Durchlaufsin (Faustregel)

Beginn:

→ Einbruchwinkel:



Asymptotische Eigenschaften von Frequenzantworten:

Übertragungsfunktion:

$$Z(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^k (s^{n-k} + a_{n-1} s^{n-1-k} + \dots + a_1 s + a_0)}$$

Systemtyp k:

offener Integratoren, $1/s^k$
Pole bei $s=0$

k im Bode-Diagramm:

bei tiefen Frequenzen erkennbar

$$\angle Z(0) = \begin{cases} -k \cdot \pi/2, & \text{sgn}(b_0/a_0) > 0 \\ -\pi - k \cdot \pi/2, & \text{sgn}(b_0/a_0) < 0 \end{cases}$$

Relativer Grad $r = n - m$:

Steigung im Amplitudenplot bei hohen Frequenzen

$$\frac{\partial |Z(j\omega)|_{dB}}{\partial \log \omega} = -r \cdot 20 \text{ dB/decade}$$

Systemidentifikation:

White box model:

explizite Darstellung der Physik des Systems mit bekannten Parametern

Grey box model:

explizite Darstellung der Physik des Systems mit unbekannten Parameterwerten

Black box model:

keine explizite Darstellung der Physik des Systems $\rightarrow$ Systemverhalten muss durch empirische Datenanalyse ermittelt werden

Anwendung:

Physik des Systems nicht bekannt oder zu komplex zum Modellieren

Bemerkung:

man kann vom Modell nicht auf das echte physikalische System schließen

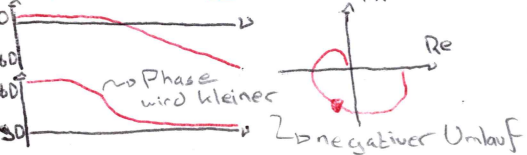
Funktioniert gut bei Systemen mit relativ kleiner Ordnung

Abstand zwischen den Zeitkonstanten sollte genug gross sein

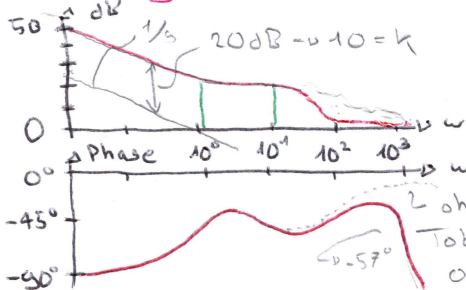
Vorgehen Systemidentifikation:

- 1.) System wird mit einem bekannten harmonischen Eingangssignal angeregt
- 2.) Verstärkung und Phase werden gemessen $\rightarrow$ Bode-Diagramm
- 3.) Typ und relativen Grad identifizieren
- 4.) zuerst tiefe Frequenzen analysieren
- 5.) Standardelemente verwenden um eine Übertragungsfunktion zu bestimmen $\rightarrow$ + Gain!

Bsp.: Phasenregel



Bsp.: Systemidentifikation



$$Z(s) = k \cdot \frac{1}{s} \cdot \left(\frac{s}{\omega_0} + 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{s}{\omega_0} + 1} \right) \cdot \left(\frac{s}{\omega_0} + 1 \right) e^{-sT}$$

Modellunsicherheit:

Nichtparametrische Unsicherheit:

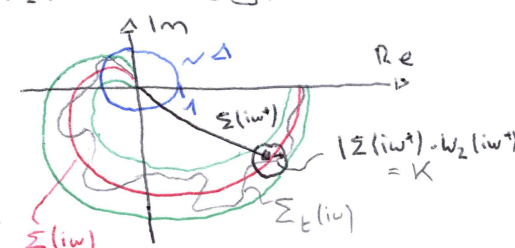
$\rightarrow$ maximal zu erwartende Unsicherheit beim Entwurf des Reglers berücksichtigen
 $\rightarrow$ wahre Übertragungsfunktion $\tilde{Z}(s)$ liegt in der Menge S :

$$S = \{ Z(s) \cdot (1 + \Delta \cdot W_2(s)) \mid |\Delta| \leq 1, \angle \Delta \in [-\pi, \pi] \}$$

$\tilde{Z}(s)$: Nominelle Übertragungsfunktion
 $\rightarrow$ durch Systemmodellierung

Δ : Unsicherheitsgenerator
 $\rightarrow$ Kreis in der komplexen Ebene

$W_2(s)$: Übertragungsfunktion der Unsicherheit



$\rightarrow$ bei jeder Frequenz ω^* liegt die wahre Übertragungsfunktion $\tilde{Z}(j\omega^*)$ innerhalb eines Kreises K um die nominelle Übertragungsfunktion $Z(j\omega^*)$

Unsicherheitsübertragungsfunktion:

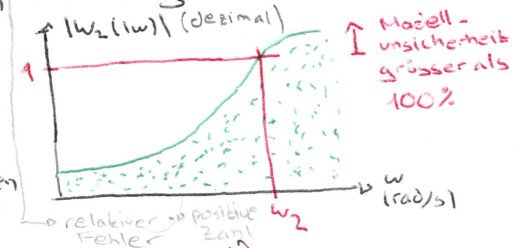
$W_2(s)$ wird mit Hilfe von Messungen am realen System abgeschätzt

$\rightarrow$ Unsicherheit steigt bei hohen Frequenzen

$\rightarrow$ $W_2(s)$ enthält keine Phaseninformation

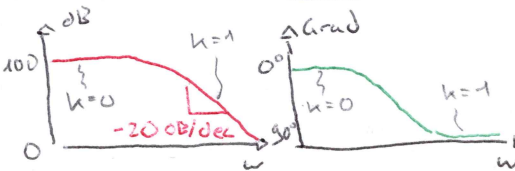
$$\left| \frac{\tilde{Z}(j\omega, k)}{\tilde{Z}(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \cdot k, k \in [1, K], \omega \in [1, I]$$

$\rightarrow$ k Messungen bei jeder Frequenz ω_i



Gesetz von Bode:

Der Gradient des Plots der Magnitude ($k \cdot 20 \text{ dB/dec}$) bestimmt die Phasenverschiebung ($k \cdot \pi/2$)



Wichtige Übertragungsfunktionen:

Beziehung zwischen 2 Signalen:

Grundlage: Linearität der Regelstruktur und unkorrelierte Eingängen

Ausgangsgrösse als Funktion von:

$\rightarrow$ des Referenzwerts $R(s)$:

$$Y_R(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} R(s) = T(s) R(s)$$

$\rightarrow$ des Rauschens $N(s)$:

$$Y_N(s) = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} N(s) = T(s) N(s)$$

$\rightarrow$ der Störung der Eingangsgrösse u :

$$Y_u(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} u(s) = S(s)^{-1} u(s)$$

$\rightarrow$ der Störung der Ausgangsgrösse y :

$$Y_d(s) = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} D(s) = S(s) D(s)$$

Kreisverstärkung:

$$L(s) = P(s) \cdot C(s)$$

$$L(s) = \frac{T(s)}{S(s)}$$

Sensitivität:

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$d \rightarrow y, r \rightarrow e$
geschlossen

Komplementäre Sensitivität:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

$r \rightarrow y, n \rightarrow y$

Gesamte Übertragungsfunktion:

$$Y(s) = Y_R(s) + Y_N(s) + Y_u(s) + Y_d(s) = S(s) [D(s) + P(s) \cdot W(s)] + T(s) [R(s) + N(s)]$$

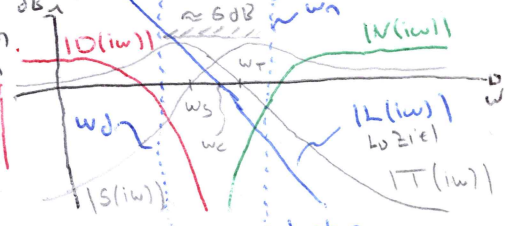
Zusammenhang:

$$|L(s)| \gg 1 \Rightarrow S(s) \approx \frac{1}{L(s)}; T(s) \approx 1$$

$$|L(s)| \ll 1 \Rightarrow T(s) \approx L(s); S(s) \approx 1$$

$$T(s) + S(s) = 1, \forall s \in \mathbb{C}$$

Störung d : niederfrequentes Signal
Rauschen n : hochfrequentes Signal



tiefe Frequenzen $\rightarrow$ Stör-Überdrückung
hohe Frequenzen $\rightarrow$ Rausch-Überdrückung

Stabilität eines geschlossenen Regelkreises:

intern stabil $\Leftrightarrow$ alle Übertragungsfunktionen asymptotisch stabil

$$\begin{bmatrix} U(s) \\ Y(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(s) & -S(s)C(s) & S(s)C(s) \\ S(s)P(s) & S(s) & T(s) \\ -S(s)P(s) & -S(s) & S(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ R(s) \end{bmatrix}$$

Ausgänge $\rightarrow$ $S(s), T(s), S(s)C(s), S(s)P(s)$ dürfen nur asymptotisch stabile Pole haben
 $\hookrightarrow \text{Re}(w_i) < 0, \forall w_i$

Alternative: closed loop asymptotically stable
 $1 + L(s)$ nur Nullstellen mit Realteil < 0

Nyquist Theorem:

Grundvoraussetzung:

keine Kürzungen von instabilen Polen mit nicht-minimalphasigen Nullstellen in $L(s)$
 - minimalphasige Nullstellen und asymt. stabile Pole darf man kürzen

Aussage:

Die asymptotische Stabilität eines geschlossenen Regelkreises $T(s)$ kann durch Analyse seiner Kreisverstärkung $L(s)$ (offener Regelkreis) bestimmt werden

Theorem (Nominelles Stabilitätskriterium von Nyquist)

Der geschlossene Regelkreis $T(s)$ ist asymptotisch stabil, wenn für $L(s)$ gilt:

$$n_c = \frac{1}{2} n_0 + n_+ \quad \text{instabiler Pol im Ursprung}$$

n_c : # Umwicklungen von $L(i\omega)$ um den Punkt $(-1 + i0)$, $\omega \in (-\infty, \infty)$

n_0 : # Pole von $L(s)$ mit Realteil = 0
 n_+ : # Pole von $L(s)$ mit Realteil > 0

- Annahme: keine Modellunsicherheit
 - man braucht $L(s)$ nicht explizit, sondern nur die Frequenzantwort
 - $L(s)$ muss nicht BIBO stabil sein

Robustheitsmasse:

kritischer Abstand μ :

kleinste Distanz zwischen $(-1 + i0)$ und $L(i\omega)$

$$\mu = \min_{\omega} |1 + L(i\omega)| = \frac{1}{\max_{\omega} |S(i\omega)|}$$

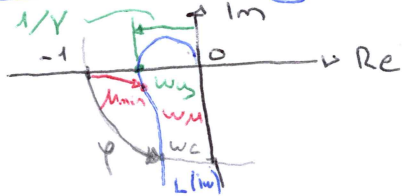
Verstärkungsreserve γ :

Inverse des Betrag von $L(i\omega)$ bei -180°

Phasenreserve φ :

Winkel, bei dem $L(i\omega)$ den Einheitskreis schneidet

Größen im Nyquist-Diagramm:



Größen im Bode-Diagramm:



Stabilitätsbedingungen:

Phasenfehler $\alpha < \varphi$
 Verstärkungsfehler $k < \gamma$
 - nur ein Fehler jeweils, da φ und γ eindimensionale Größen sind

Robustes Nyquist Theorem:

wahre Kreisverstärkung $L(s)$ ist Teil der Menge

$S_L = \{P(s)C(s) \cdot (1 + \Delta W_L(s)) \mid | \Delta | \leq 1, \Delta \in [-\pi, \pi]\}$
 $L(s)$ und $L_L(s)$ haben die selbe Anzahl instabiler und stabiler Pole
 - schlimmste T-Fall $|\Delta| = 1$
 $L_L(s) = L(s) + L(s) \cdot W_L(s)$

$$|L_L(i\omega) \cdot W_L(i\omega)| < |1 + L(i\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

$$L \rightarrow |T(i\omega)| |W_L(i\omega)| < 1$$

Berechnung μ :

$$\mu = \min_{\omega \in [0, \infty)} |L(i\omega) - (-1)| = \min_{\omega \in [0, \infty)} \frac{|1|}{|1 + L(i\omega)|} = \min_{\omega \in [0, \infty)} \frac{|1|}{|S(i\omega)|}$$

Beschränkung der Sensitivität:

- Frequenzgang der Sensitivität kann lokal durch den Regler beeinflusst werden
 - Global gilt folgendes:

$$\int_0^\infty \ln |S(i\omega)| d\omega = \pi \cdot \sum_{i=1}^{n_+} \pi_i^+ = 0$$

n_+ : # instabiler Pole π^+ von $L(s)$

- Verringerung der Sensitivität in einem Frequenzband wird durch eine Erhöhung in einem anderen kompensiert

Beschränkung der Durchtrittsfrequenz:

$$|L(i\omega_c)| = 0 \text{ dB} = 1 \quad |T(i\omega_c)| = |S(i\omega_c)|$$

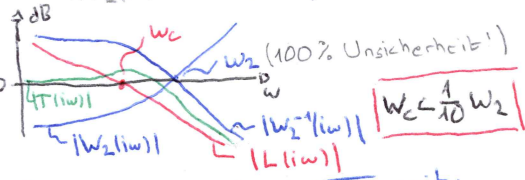
Bandbreite des geschlossenen Regelkreises ω_b :

$$|T(i\omega_b)| = -3 \text{ dB} = 1/\sqrt{2} \approx 0.7 \quad \omega_b \approx \omega_c$$

- Maß für die höchste Frequenz des Eingangssignal, die der geschlossene Regelkreis verfolgen kann

Beschränkung durch Modellunsicherheit W_L :

$$|L_L(i\omega) \cdot W_L(i\omega)| < |1 + L(i\omega)| \Rightarrow \left| \frac{L(i\omega)}{1 + L(i\omega)} \right| < \left| \frac{1}{W_L(i\omega)} \right| \Rightarrow |T(i\omega)| < |W_L^{-1}(i\omega)|$$

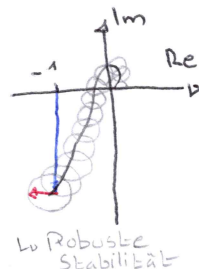


Beschränkung durch Totzeit:

- Kreisverstärkung mit Verzögerung
 $L_T(s) = C(s)P(s)e^{-T_C + T_P s} = (L(s)P(s))e^{-T_s}$
 T_C : Totzeit im Regler
 T_P : Totzeit in der Strecke

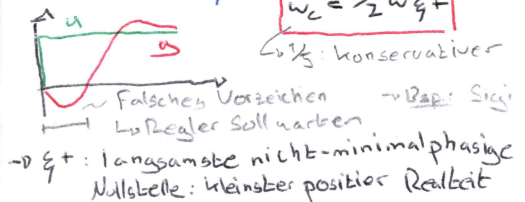
$$\omega_c < \frac{1}{2} \omega_T = \frac{1}{2} \frac{1}{T}$$

- 1/2 ist konservativ

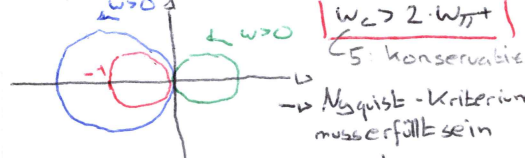


- Robuste Stabilität

Beschränkung durch nicht-minimalphasige Nullstellen W_T :



Beschränkung durch instabile Pole π^+ :



- System muss genügend schnell reagieren
 $|k|$ muss groß sein und $\text{sign}(k)$ negativ
 ω_T^+ : schnellste instabile Pol von $L(s)$
 ω_T^- : größter positiver Realteil

- mit Modellunsicherheit:

$$|W_L(\pi^+)| < 1 \quad \forall i$$

Zusammenfassung:

$$\min \left\{ \frac{1}{10} \omega_n, \frac{1}{10} \omega_d, \frac{1}{2} \omega_T, \frac{1}{2} \omega_T^+ \right\} > \omega_c > \max \{ 10 \omega_d, 2 \omega_T^+ \}$$

ω_n : noise, ω_d : disturbance

Statischer Nachlauffehler:

Definition:

Differenz e_∞ zwischen Sollwert r und Istwert y_∞ nach Einschwingen

Herleitung:

$$E(s) = E_R(s) + E_V(s) + E_D(s) + E_W(s) = S(s) \cdot [R(s) + N(s) - D(s) - P(s) \cdot W(s)]$$

- Referenz und Störung als Sprünge $h(t)$
 - Rauschen $n(t)$ ist im Mittelwert 0
 - $h(t) = 1, t > 0 \Rightarrow H(s) = 1/s$
 - Endwerttheorem: $e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \cdot (1/s) = S(0) = 1 - T(0)$
 $e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \cdot (1/s) = S(0) = 1 - T(0)$
 $e_\infty = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)} \quad y = r - e_\infty$
 $k = 0: L(0) = b_0/a_0 \Rightarrow e_\infty = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$
 $k > 0: L(0) = \infty \Rightarrow e_\infty = 0$

e_∞ einer Sprungantwort:

$e_\infty = S(0) = \frac{1}{1 + L(0)} \quad y = r - e_\infty$

$k = 0: L(0) = b_0/a_0 \Rightarrow e_\infty = \frac{a_0}{a_0 + b_0}$
 $k > 0: L(0) = \infty \Rightarrow e_\infty = 0$

e_∞ einer Referenz höherer Ordnung:

$$m < k: e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^m (1 + L(s))} = 0$$

$$m = k: e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^m (1 + L(s))} = \infty$$

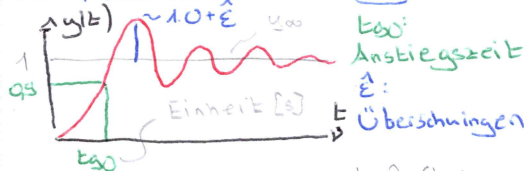
$$m > k: e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^m (1 + L(s))} = \infty$$

$e_{\max}$ einer Sprungantwort:

Input Signal	$r(t), d(t), n(t)$	$e(t)$
statischer Fehler ist tolerierbar	$\frac{1}{1 + P(0) \cdot C(0)} \leq e_{\max}$	$\frac{P(0)}{1 + P(0) \cdot C(0)} \leq e_{\max}$
statischer Fehler ist nicht tolerierbar	$P(s)$ oder $C(s)$ müssen T_P $k \geq 1$ haben	$C(s)$ muss T_P $k \geq 1$ haben

Spezifikationen basierend auf Systemen 2. Ordnung:

Graphische Darstellung:



Viele Systeme können als 2. Ordnung approximiert werden, indem nur die dominanten Pole (Realteil nahe bei 0) berücksichtigt werden. Falls k_p vorhanden: $\Delta \approx 1 \approx y_{\infty}$

Anforderungen an FD-CL:

$$\delta = \frac{-\ln(\hat{e})}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{e})}}; \omega_0 = (0.14 + 0.4\delta) \frac{2\pi}{t_{50}}$$

Anforderungen an FD-OL:

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{4\delta(\hat{e})^4 + 1 - 2\delta(\hat{e})^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_c / \omega_0}{2 \cdot \delta(\hat{e})}\right)$$

Vereinfachung für $0.45 < \delta < 1$:

$$\omega_c \approx \frac{1.7}{t_{50}}; \varphi \approx 71^\circ - 117^\circ \cdot \hat{e}$$

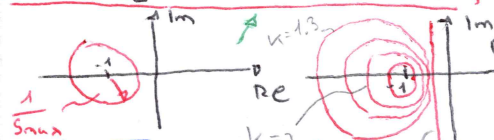
Spezifikationen im Frequenzbereich:

Beschränkung der Auswirkung der Störung und des Rauschens:

$$\|S\|_{\infty} < S_{\max}; \|T\|_{\infty} < T_{\max}; S_{\max} \cdot T_{\max} > 1$$

$\|S\|_2 < S_{\max}$:

$$L(i\omega) \in \{1 + z \mid |z| \leq 1/S_{\max}; |z| \leq 1\}$$



$\|T\|_{\infty} < T_{\max}$:

$$L(i\omega) \neq \left\{ \left| \frac{T_{\max}^2}{T_{\max}^2 - 1} + z \right| \leq \frac{T_{\max}}{T_{\max}^2 - 1} - 1 \right\}$$

Gewünschte Eigenschaften eines Controllers:

- kein statischer Fehler
- schnelle Reaktion/Anwort
- kein Überschwingen (oder nur ein wenig)
- Robust, stabil
- Stör- und Rauschenunterdrückung

Bsp: Systemantwort einer sprunghaften Störung mit Betrag 1

$$P(s) = \frac{1}{s+1}; C_1 = 2; C_2(s) = 2 \cdot (1 + 1/s)$$

$$y_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} y_D = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) D(s)$$

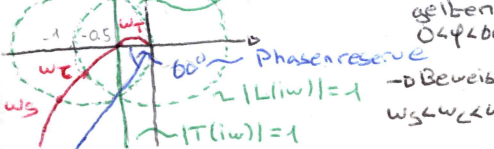
$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot S(s) \cdot 1/s = \lim_{s \rightarrow 0} S(s) = S(0)$$

$$S_1 = 1/3; S_2 = 0; e_{\infty}^h = r - y_{\infty}$$

$$e_{1,\infty}^h = 0 - 1/3 = -1/3$$

$$e_{2,\infty}^h = 0 - 0 = 0$$

Bsp: Bedingung Durchtrittsfrequenz



PID-Regler:

P-Term: (proportionales Verhalten)

- Handeln des Reglers ist proportional zum momentanen Regelfehler
- schnelle Reduktion des Regelfehlers
- statischer Nachlauffehler kann entstehen

$$u_P(t) = k_P \cdot e(t) \quad | \quad U_P(s) = k_P \cdot E(s)$$

I-Term: (integratives Verhalten)

- Handeln des Reglers ist proportional zum bereits kummulierten Fehler $e(t)$
- langsam, aber eliminiert statische Nachlauffehler vollständig
- kann zu großem Überschwingen führen

$$U_I(t) = k_{Ti} \int_0^t e(\tau) d\tau \quad | \quad U_I(s) = k_{Ti} \cdot \frac{1}{s} E(s)$$

D-Term: (derivatives Verhalten)

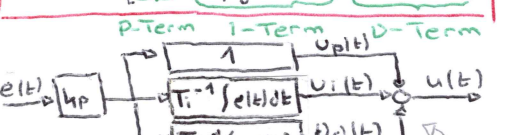
- Handeln des Reglers ist proportional zur Änderung des Regelfehlers
- wirkt antizipierend
- wirkt dämpfend gegen eine schnelle Änderung des Fehlers

$$U_D(t) = k_{Td} \frac{d}{dt} e(t) \quad | \quad U_D(s) = k_{Td} \cdot s \cdot E(s)$$

$$e = r - y, y = L + d \Rightarrow \frac{d}{dt} e = \frac{d}{dt} r - \frac{d}{dt} L - \frac{d}{dt} d$$

PID-Regler im Zeitbereich:

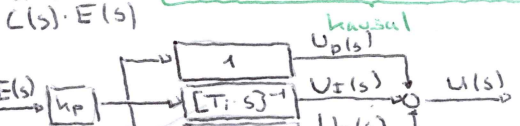
$$u_{PID}(t) = k_P \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) \right]$$



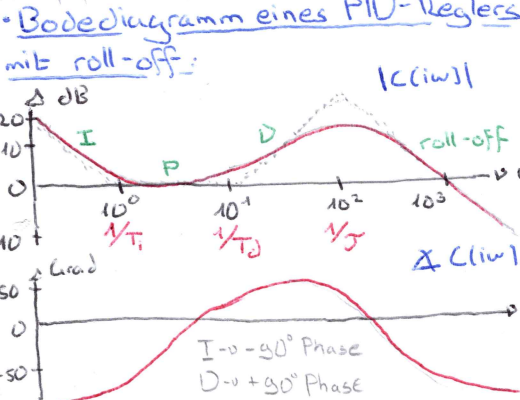
PID-Regler im Frequenzbereich:

$$C_{PID}(s) = k_P \cdot \left(\frac{T_D \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1}{T_i \cdot s} \right) \cdot \frac{1}{(T_D \cdot s + 1)^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{C(s)} \cdot E(s)$$



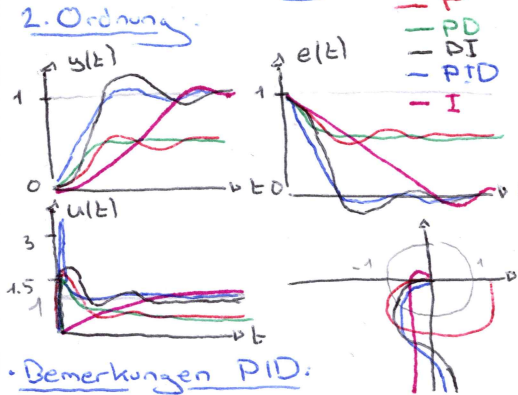
Bodediagramm eines PID-Reglers mit roll-off:



roll-off-Term:

- D-Term verstärkt rauschen
- im Frequenzbereich kann man hohe Frequenzen unterdrücken, indem man einen hochfrequenten Pol hinzufügt
- ohne roll-off-Term bräuhnte man Zukunftswerte $\rightarrow$ akausal

2. Ordnung eines Systems



Bemerkungen PID:

- Integrator nur nötig falls die Strecke kein Integrator aufweist
- einfache Anforderungen: D kann weggelassen werden
- nicht zu hohe Bandbreiten ansprechen

PID Parameter Tuning nach Ziegler Nicholas:

Voraussetzung:

Strecke kann als System 1. Ordnung mit relativ kleiner Totzeit approximiert werden

$$P(s) \approx \frac{k}{T \cdot s + 1} \cdot e^{-Ts} \quad | \quad \frac{T}{T+T_d} < 0.3 \quad T < 0.4T_d$$

es muss kein Modell der Strecke vorhanden sein

Experimente mit dem closed-loop System

Vorgehen:

- man beginnt mit einem reinen P-Regler
- man erhöht k_P bis der geschlossene Regelkreis grenzstabil wird
- k_P System oszilliert $\rightarrow k_P^*, T^*$

Tabelle:

Typ	k_P	T_i [s]	T_d [s]
P	$0.5 k_P^*$	∞T^*	$0 \cdot T^*$
PI	$0.45 k_P^*$	$0.85 T^*$	$0 \cdot T^*$
PD	$0.55 k_P^*$	∞T^*	$0.15 T^*$
PID	$0.6 k_P^*$	$0.5 T^*$	$0.125 T^*$

$\rightarrow L(i\omega) = P(i\omega) \cdot C(i\omega)$ muss durch den Punkt $(-1, 0)$ gehen, wobei $C(i\omega) = k_P^*$

Zusammenhänge:

$$P(i\omega^*) k_P^* = -1 \Rightarrow P(i\omega^*) = -1/k_P^*$$

$$\rightarrow \text{Der kritische Punkt bei einem nach ZiLII ausgelegten PI-Regler wird nach } -0.45 + i \cdot 0.04 \text{ verschoben}$$

$$\angle P(i\omega^*) = -180^\circ = -\pi \quad | \quad k_P^* = 1/|P(i\omega^*)|$$

Inversion der Regelstrecke:

Warnhinweise:

- Strecke muss asympt. stabil und minimalphasig sein
- keine instabilen Pole oder nicht-minimalphasige Nullstellen kürzen
- Nominelle und wahre Strecke müssen die gleiche # instabile Pole und NMP Nullstellen haben $\rightarrow$ mit Vorsicht verwenden

$$L(s) = P(s) \cdot P(s)^{-1} \cdot \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot \frac{1}{(T_D \cdot s + 1)^{r-1}}$$

$$T_i = \omega_c^{-1} \quad T < T_i \quad \omega_c < \omega_2$$

$$Y(s) = \frac{1}{T_i \cdot s + 1} R(s) + \frac{T_i \cdot s}{T_i \cdot s + 1} D(s)$$

$$+ \frac{T_i \cdot s}{T_i \cdot s + 1} P(s) W(s)$$

$\rightarrow r$: relativer Grad

Iteratives Loop Shaping:

Ziel:

- gewisse Frequenzbänder abzuändern
- mehr Phasenreserve bei gleicher Durchtrittsfrequenz

Lead-Lag Element 1. Ordnung:

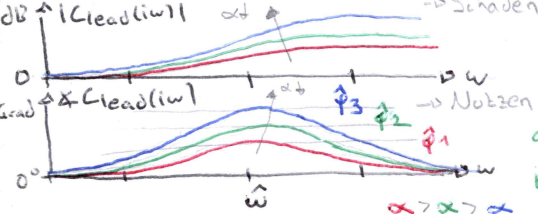
$$C(s) = \frac{T \cdot s + 1}{\alpha \cdot T \cdot s + 1} \quad \alpha, T \in \mathbb{R}^+$$

$0 < \alpha < 1 \Leftrightarrow$ Lead $\rightarrow$ Phasenreserve erhöhen, lokaler Differentiator
 $1 < \alpha \Leftrightarrow$ Lag $\rightarrow$ Folgeregelung, Stör-Unterdrückung, lokaler Integrator

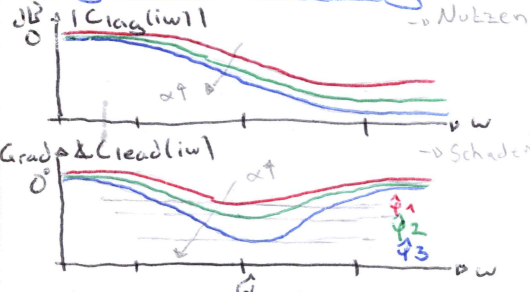
$\hat{\varphi}$: gewünschte Phasenverschiebung
 $\hat{\omega}$: gewünschte Frequenz

$$\alpha = \left(\sqrt{\tan^2(\hat{\varphi}) + 1} - \tan(\hat{\varphi}) \right)^2 \quad T = \frac{1}{\hat{\omega} \sqrt{\alpha}}$$

Lead Element 1. Ordnung:



Lag Element 1. Ordnung:



ein Lag-Element mit $-\hat{\varphi}$ entspricht einer Spiegelung des Magnituden- und Phasendiagramms des Lead-Elements mit $\hat{\varphi}$

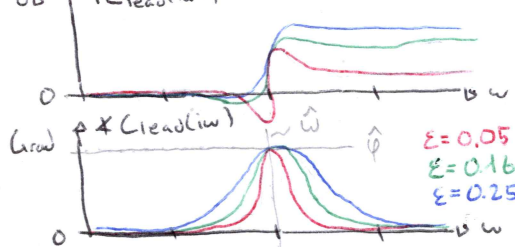
Lead-Lag Element 2. Ordnung:

$$C(s) = k \frac{s^2 + 2\zeta \cdot \varepsilon \cdot (1-\varepsilon) \omega_0 s + (1-\varepsilon)^2 \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta \cdot \varepsilon \cdot (1+\varepsilon) \omega_0 s + (1+\varepsilon)^2 \omega_0^2}$$

$$k = \frac{(1+\varepsilon)^2}{(1-\varepsilon)^2} \quad \zeta = \frac{\cot(\hat{\varphi}/2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad \omega_0 = \frac{\hat{\omega}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

ε : Breite des Frequenzbandes
 - Elemente 2. Ordnung isolieren den Effekt stärker auf die gewünschte Frequenz

Lead Element 2. Ordnung:



Anti-Reset-Windup ARW:

- Aktuatoren haben eine beschränkte Leistung, was bei Reglern mit Integrator-Anteil zu Problemen führen kann
- Output u muss beschränkt werden

Zeitkonstante:

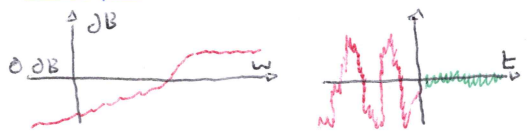
kleines $\tau \Leftrightarrow$ reagiert schneller

Nützliches:

Tiefpass:



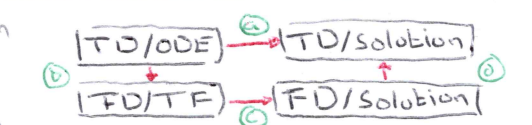
Hochpass:



Bandpass:

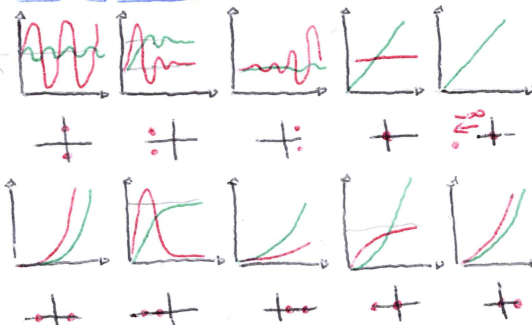


Weitere Zusammenhänge TD-FD:



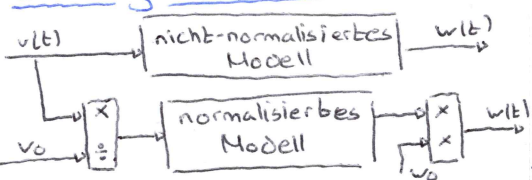
- a: $y(t) = c e^{At} x(0) + \int_0^t c e^{A(t-\tau)} b u(\tau) d\tau$
- b: $E(s) = c(sI - A)^{-1} b + d$
- c: $Y(s) = E(s) \cdot U(s)$
- d: $y(t) = [2\pi i]^{-1} \oint Y(s) \cdot e^{st} ds$

Auswirkung der Lage von Polen auf die Systemantwort:

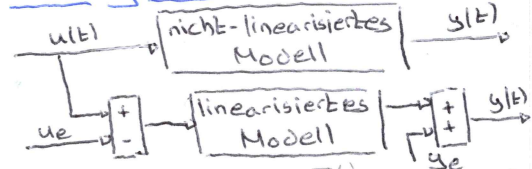


- Impulsantwort
- Sprungantwort

Blockdiagramm-Normalisieren:



Blockdiagramm-Linearisieren:



Auswirkung des relativen Grades auf die Sprungantwort:

- $r=0 \Leftrightarrow$ Sprung bei $t=0$
- $r=1 \Leftrightarrow$ positive Steigung bei $t=0$
- $r>1 \Leftrightarrow$ Steigung von 0 bei $t=0$
- $r<0 \Leftrightarrow$ System nicht realisierbar und nicht simulierbar

Schwingendes Verhalten:

- System muss mindestens 2. Ordnung sein
- System braucht konjugiert komplexe Pole

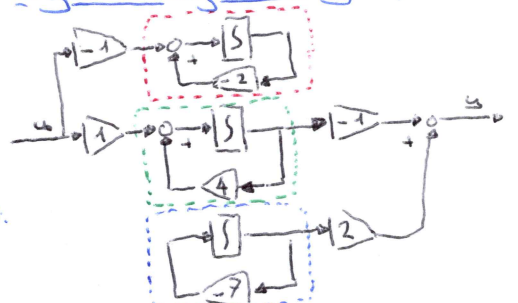
Tipps Systemklassifikation:

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t) x(t) + b(t) u(t) \quad x(t), u(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$y(t) = c(t) x(t) + d(t) u(t) \quad y(t) \in \mathbb{R}^m$$

- $\rightarrow$ MIMO, ZV, l.d., 1.
- $\rightarrow$ Koeffizienten hängen von t ab $\rightarrow$ ZV
- $\frac{d}{dt} x(t) = A x(t) + b u^2(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n$
- $y(t) = c x(t) \quad u(t), y(t) \in \mathbb{R}^1$
- $\rightarrow$ SISO, nl, zi, d, 1.
- $\rightarrow$ x und u dürfen von t abhängen $\rightarrow$ zi
- $\rightarrow$ nur u & y sind relevant für SISO/MIMO

Systemanalyse im Signalflussbild:



- diagonalisiertes System
- Pole können direkt abgelesen werden
- $\rightarrow$ $\pi: -7, -2, 4 \rightarrow$ instabil
- $\rightarrow$ asymptotisch stabil
- $\rightarrow$ nicht beobachtbar
- $\rightarrow$ steuerbar
- $\rightarrow$ instabil, beobacht- & steuerbar
- $\rightarrow$ asymptotisch stabil
- $\rightarrow$ beobachtbar
- $\rightarrow$ nicht steuerbar
- $\rightarrow$ System ist potentiell stabilisierbar und detektierbar

Aussagen zu BIBO/Lyapunow:

- Wenn der Ausgang für $t \rightarrow \infty$ nicht divergiert und nicht zu Null konvergiert, dann ist das System Lyapunow stabil
- Wenn der Ausgang für $t \rightarrow \infty$ divergiert, dann ist das System Lyap. instabil
- Wenn der Ausgang für $t \rightarrow \infty$ zu Null konvergiert, dann ist das System Lyap. asymp. stabil

Spezielle Phasenreserve:

$$\angle L(i\omega_c) = 250^\circ \rightarrow 360^\circ - 250^\circ = -110^\circ$$

$$\rightarrow \varphi = 70^\circ$$

Systemklassifikation einer Übertragungsfunktion:

- linear, zeitinvariant, dynamisch, SISO

$$\rightarrow$$
 Bsp: $E(s) = e^{-sT}$

$S(s)$ und $T(s)$ schnell berechnen:

$$L(s) = \frac{z}{n} \rightarrow T(s) = \frac{z}{n+z} \rightarrow S(s) = \frac{n}{n+z}$$

Winkel bei Polarkoordinaten:

$$\angle(a+ib) = \begin{cases} \tan^{-1}(b/a) & a > 0, b \in \mathbb{R} \\ \tan^{-1}(b/a) + \pi & a < 0, b \geq 0 \\ \tan^{-1}(b/a) - \pi & a < 0, b < 0 \end{cases}$$

Zusammenhang Nyquist-Sprungantwort:

- Final/Initial value theorem mit $T(s)$
- $\rightarrow$ BIBO prüfen
- Nachlauffehler, $1/s$, offene Integratoren
- Totzeit (Spirale, Pause)
- relativer Grad
- Betrag von $L(s)$ für $\omega \rightarrow 0, \infty$
- System 1./2. Ordnung
- Regelstruktur erkennbar (P, PI, PD, PID)
- Nullstellen, schwingendes Verhalten
- Phasenverlauf betrachten ($>/< 0$)
- Beispiele auf ZF

Analysis III

Laplace Analysis:

Laplace Transformation:

→ sie überführt eine Funktion $F(t)$ vom reellen Zeitbereich in eine Funktion $F(s)$ im komplexen Bereich (Frequenzbereich)

Definition:

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$$

$F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$



Inverse:

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

→ PBE verwenden (komplex)
→ $(s+a)^2 + \omega^2$, quadratisch ergänzen

Eigenschaften:

Linearität:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

S-Shifting: (1. Verschiebungssatz)

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a), \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t) \rightarrow \text{Dämpfung}$$

T-Shifting: (2. Verschiebungssatz)

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a) u(t-a)$$

$$\mathcal{L}\{u(t-a) \cdot f(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s); \quad \mathcal{L}\left\{\frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = F(s \cdot a)$$

Ableitungssatz:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{j=0}^{n-1} s^{n-1-j} f^{(j)}(0)$$

$$n=1: \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$n=2: \mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$

Integralssatz:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\} = \frac{1}{s} F(s), \quad t > 0, s > 0$$

Differential des Transforms:

$$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s)$$

$$\mathcal{L}\{(1-t)^n f(t)\} = F^{(n)}(s)$$

Integration des Transforms:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\beta) d\beta$$

Existenz der Transformation:

f ist auf $(0, \infty)$ lokal integrierbar und es gilt $\forall t \geq 0$, dass $|f(t)| \leq M e^{ct}$ mit geeigneten Konstanten M und c , dann existiert die LT-Transformation

Einzigartigkeit:

Wenn 2 stetige Funktionen, den gleichen LT-Transform haben, dann sind sie identisch

Grenzwerte:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0+} s \cdot F(s)$$

Wichtige Laplace Transformationen:

$F(t)$, Zeitdomäne

$F(s)$, Laplace-Domäne

$$u(t) \sim \begin{aligned} &1, e^{at} \\ &t, t^2, t^3 \\ &t^n, n=1,2,3,\dots \\ &t^p, p > -1 \\ &\sqrt{t} \\ &t^{n-1/2}, n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1/s, 1/s-a \\ &1/s^2, 2/s^3, 6/s^4 \\ &n!/s^{n+1} \\ &\Gamma(p+1)/s^{p+1} \\ &\sqrt{\pi}/2s^{3/2} \\ &1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sqrt{\pi} / 2^n s^{n+1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(at) &\rightarrow \frac{a}{s^2+a^2} \\ \cos(at) &\rightarrow \frac{s}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

$$t \sin(at) \rightarrow \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

$$t \cos(at) \rightarrow \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\sin(at+b) \rightarrow \frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$$

$$\cos(at+b) \rightarrow \frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$$

$$\sin(at) - at \cos(at) \rightarrow \frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\sin(at) + at \cos(at) \rightarrow \frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\cos(at) - at \sin(at) \rightarrow \frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\cos(at) + at \sin(at) \rightarrow \frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$$

$$\sinh(at) \rightarrow \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\cosh(at) \rightarrow \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\sin^2(kt) \rightarrow \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$$

$$\cos^2(at) \rightarrow \frac{s^2+2a^2}{s(s^2+4a^2)}$$

$$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \rightarrow \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

$$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \rightarrow \frac{s}{(s-a)(s-b)}$$

$$\sin(at)/t \rightarrow \arctan(a/s)$$

$$e^{-a^2/t^4} / \sqrt{\pi t^3} \rightarrow e^{-a\sqrt{s}} / \sqrt{s}$$

$$e^{-a^2/t^4} \cdot a / \sqrt{2\pi t^3} \rightarrow e^{-a\sqrt{s}}$$

$$\frac{1}{t}(e^{bt} - e^{at}) \rightarrow \ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$$

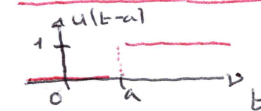
$$\frac{3}{t}(1 - \cos(kt)) \rightarrow \ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$$

$$\frac{3}{t}(1 - \cosh(kt)) \rightarrow \ln\left(\frac{s^2-w^2}{s^2}\right)$$

$$u(t-a) \rightarrow \frac{e^{-as}}{s} \quad \text{→ T-shifting anwenden } u(t-a)f(t-a)$$

Heaviside (step) Funktion:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < a \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$



Bsp: $f(t) = \begin{cases} 3e^t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$
 $\rightarrow f(t) = 3e^t - 3e^t u(t-2)$

Lösen von AWP:

1.) $\mathcal{L}$ auf beiden Seiten der OGL anwenden
 → setze $\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)$

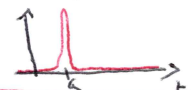
2.) Gleichung auf die Form $F(s) = \dots$ bringen

3.) $\mathcal{L}^{-1}$ berechnen

Dirac Delta Funktion:

→ Distribution → stellt einen Impuls dar

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t=a \\ 0, & t \neq a \end{cases}$$



$$\int_0^{\infty} \delta(t-a) dt = 1 \quad \int_0^{\infty} g(t) \delta(t-a) dt = g(a)$$

Faltungssatz (Convolution):

$$\mathcal{L}\{f \cdot g\} \neq \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x) g(t-x) dx$$

Eigenschaften:

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} \quad \mathcal{L}\{f \cdot g\} = \mathcal{L}\{f\} * \mathcal{L}\{g\}$$

$$f * g = g * f \quad \rightarrow f * 0 = 0 + f = 0$$

$$f * (g+h) = f * g + f * h \quad \rightarrow f * 1 \neq f$$

$$f * (g \cdot h) = (f * g) * h \quad \rightarrow f * f \neq 0$$

Lineare OGL mit variablen Koeff.:

$$\mathcal{L}\{ty'\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y'\} = -\frac{d}{ds}(sF(s) - y(0))$$

$$= -sF'(s) - F(s)$$

$$\mathcal{L}\{ty''\} = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{y''\} = -\frac{d}{ds}(s^2 F(s) - sy(0) - y'(0))$$

$$= -s^2 F'(s) - 2sF(s) + y(0)$$

→ anschließend klassisch mit Analysis II lösen

Weitere Laplace Transformationen:

$F(t)$, Zeitdomäne

$F(s)$, Laplace-Domäne

$$\delta(t-a), \delta(t) \rightarrow e^{-as}, 1$$

$$t^n e^{at} \rightarrow n! / (s-a)^{n+1}$$

$$f(at) \rightarrow \frac{1}{a} F(s/a)$$

$$f(t+T) = f(t) \rightarrow \int_0^T e^{-st} f(t) dt \cdot \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$1 - \cos(\omega t) \rightarrow \frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$$

$$\omega t - \sin(\omega t) \rightarrow \frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$$

Kombi-Anwendung:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s} \frac{1}{(s+1)^2}\right\} \rightarrow u(t-3)f(t-3)$$

$$\rightarrow e^{-(t-3)}(t-3)u(t-3)$$

Gamma Funktion:

→ Erweiterung der Fakultät auf ganz $\mathbb{R}$

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad \Gamma(n+1) = n!; n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(p+n)/\Gamma(p) = p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)$$