Kochbuch der Linearen Algebra

1. Gleichungssysteme (GS)

m Gleichungen, n Unbekannte

Gleichungssystem: $A \cdot x = b$

$n=m$: 1 eindeutige Lösung

$m < n$: ∞ -Lösungen ($n - m$ parametrische Schar von Lsg)

$m > n$: Verträglichkeitsbedingungen:

$m - n$ Gleichungen erfüllt : 1 Lsg

$m - n$ Gleichungen nicht erfüllt : 0 Lsg

Rang $r =$ Anz. Nicht-Null-Zeilen = Anz. Pivots

Triviale Lösung : $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Homogen: $A \cdot x = 0$, Inhomogen: $A \cdot x = b$

2. LR-Zerlegung

- ohne Zeilenvertauschung: $L \cdot R = A$

$$\text{Bsp: } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ untere Dreiecksmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ obere Dreiecksmatrix}$$

- mit Zeilenvertauschung: $L \cdot R = P \cdot A$

P heisst Permutationsmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ P hat die gleiche Dimension wie A.}$$

P wird neben A geschrieben. Vertauscht man eine Zeile in A , vertauscht man die entsprechende Zeile auch in P .

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vorgehen analog, P wird bei Gauss mitgeführt.

Lösen eines GS mit LR-Zerlegung:

1. LR-Zerlegung durchführen
2. $L \cdot c = b$ nach c auflösen
3. $R \cdot x = c$ nach x auflösen
4. GS ist gelöst, x ist die Lösung

3. Matrizen

- quadratische Matrix: $n=m$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

- Einheitsmatrix: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- untere $\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{pmatrix}$ obere $\begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$ Dreiecksmatrix

- Diagonalmatrix : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Spur(A) = Summe der Diagonalelemente der Matrix A

$$\text{Spur}(CD) = \text{Spur}(DC)$$

$$\text{Spur}(STS^{-1}) = \text{Spur}(T)$$

$$\text{Spur}(A) = \text{Spur}(A^T)$$

$$\text{Spur}(\lambda A) = \lambda \text{Spur}(A)$$

$$\text{Spur}(A+B) = \text{Spur}(A) + \text{Spur}(B)$$

Transponierte Matrix: $A = m \times n$
 $A^T = n \times m$

- i) $(A^T)^T = A$
- ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- iii) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$!!

symmetrisch: $A = A^T$

schiefssymmetrisch: $-A = A^T$

orthogonal: $A^T A = I_n$
 $A^{-1} = A^T$

regular $\Leftrightarrow$ invertierbar, $r=m$, $\text{Det}(A) \neq 0$
 Gegenteil: **singulär**

A, B orthogonal & invertierbar $\Leftrightarrow$ $A \cdot B$ orthogonal & invertierbar
 A^{-1} orthogonal
 I_n orthogonal

4. Matrix-Multiplikation

$A = (m \times n), B = (n \times p) \Rightarrow (m \times n) \cdot (n \times p) = (m \times p)$

$A \cdot B$ nur wenn #Spalten(A) = #Zeilen(B)

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

5. Matrix-Addition

$A + B$ nur wenn beide $(m \times n)$

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

Rechenregeln

- **assoziativ:** $(AB)C = A(BC)$; $(A + B) + C = A + (B + C)$
- **Multiplikation mit Skalar:** $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$
- $a^{(j)} = A \cdot e^{(j)}$ $e^{(j)}$ = Einheitsvektor **j**
- **kommutativ:** $A + B = B + A$ **ABER:** $(A \cdot B) \neq (B \cdot A)$!!!

Gauss: Elementare Operationen:

- Vertauschen von Zeilen
- System mit skalar multiplizieren
- Subtraktion eines Vielfachen der i-ten von der j-ten Zeile

6. Inverse einer Matrix

A^{-1} heisst **Inverse** von A

Berechnung:

I) $(A \mid I_n) \Rightarrow (I_n \mid A^{-1})$

Auf **beiden** Seiten Vielfache von einer Zeile von einer anderen **subtrahieren, addieren, oder Zeilen vertauschen, etc** bis links die Einheitsmatrix steht und rechts die Inverse.

II) Gausselimination parallel zu den drei rechten Seiten der Einheitsmatrix

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 11 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3 \text{ Lösungsvektoren} \Rightarrow A^{-1}$

III) Für 2x2 Matrizen:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Regeln:

- $A^{-1}A = I_n = AA^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $I_n^{-1} = I_n$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

A heisst **invertierbar** $\Leftrightarrow$ zug. Hom. GS hat **nur Nulllösung**

- $\Leftrightarrow A^2 \neq 0$
- $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

6.3. Determinante

$$\det(A) = |A|$$

N=2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\det(A) = ad - bc}$$

N=3,... :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \text{ Entwicklung nach der 1. Spalte}$$

$$\boxed{\det(A) = a_1 \cdot \det \begin{pmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}}$$

Analog Entwicklung nach anderen Zeile oder Spalte

Determinante einer Dreiecksmatrix:

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii}}$$

Regeln:

V = #Vertauschungen

- Zeilen-/Spaltenvertauschung ändert Vorzeichen: $(-1)^V$
- Gauss-Elimination ändert $\det(A)$ nicht (wenn keine Vertausch.)
- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(\lambda A) = \lambda^V \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(I_n) = 1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1})$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$
- A heisst **lin.unabhängig** $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
- $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(C)$ A,B,C Matrizen

7. Vektorräume $\mathbb{R}^n$ Reeller Vektorraum der Dimension n $\mathbb{C}^n$ Komplexer Vektorraum

Ein reeller (komplexer) Vektorraum ist eine Menge von V Elementen (z.B. Vektoren, oder Polynomen) mit der Eigenschaft:

- **Addition:** $\forall a, b \in V$ ist auch $(a+b) \in V$
- **Multiplikation:** $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\text{od. } \mathbb{C})$ gilt: $a \in V$ ist auch $\lambda a \in V$
- **Nullelement:** ist in jedem Vektorraum vorhanden

Regeln:

- $a+b = b+a$
- $(a+b)+c = a+(b+c)$
- **Neutralelement:** $a+0 = a$ und $1a = a$
- **Entgegengesetzter Vektor zu a:** $(-a) \Rightarrow a+(-a) = 0$
- $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
- $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ und $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$

4.1. Unterräume

Eine nicht-leere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst Unterraum. Ein Unterraum ist ein Vektorraum, d.h. es muss gelten:

- $a, b \in U \Rightarrow (a+b) \in U$
- $a \in U, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda a \in U$
- Nullvektor enthalten. Nullvektor bildet sich auf sich selber ab!

$U = \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$ ist der von $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ **aufgespannte VR**

Erzeugendensystem: $V = \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\}$ falls $a^{(i)}$ ganzen VZ aufspannen

Basis: linear unabhängiges Erzeugendensystem (ohne abhängige Vektoren). Alle Basen eines Vektorraums haben dieselbe Anz. Elemente (=Dimension von V , **dim** V)

Konvention: $\dim(0) = 0$

Linear unabhängige Vektoren können zu Basis erweitert werden!

Linear unabhängig:

- falls auf $\lambda_1 a^{(1)} + \dots + \lambda_n a^{(n)} = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$
- Rang $A = \text{Anz. Spalten} = k$

Test: Vektoren in Spalten schreiben $\rightarrow$ Gauss-Elimination
 $\Rightarrow$ falls Nullzeilen $\rightarrow$ lin.abhängig.
 $\Rightarrow$ Rang $A = \text{Anz. Unabh. Vektoren}$

Sei k die **Anz. Vektoren**, r der **Rang der Matrix** nach dem Eliminationsverfahren und n die **Dimension des VR**, dann gilt:

- linear unabhängig, falls $r = k$.
- linear abhängig, falls $r < k$.
- erzeugend, falls $r = n$.

- Sie bilden also eine Basis für $\mathbb{R}_n$, falls $r = k = n$.

Bsp: Basis finden für Unterraum

$$U = \{x \in \mathbb{R}_4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_4 \mid x_1, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

($x_1, \dots, x_4$ der Reihe nach 1 setzen und die anderen 0, Nullvektor kann kein Basisvektor sein)

Es folgt, dass $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ eine Basis von U bildet mit

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Dimension} = 3$$

5. Gram-Schmidt-Verfahren

Input: linear unabhängige Vektoren $b^{(1)}, \dots, b^{(n)}$, **Ziel:** $b^{(i)} \rightarrow e^{(i)}$, eine orthonormale Basis

Schritt 1: $e^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{\|b^{(1)}\|}$ (Einheitsvektor)

Schritt 2: $c^{(2)} = b^{(2)} - \langle e^{(1)}, b^{(2)} \rangle \cdot e^{(1)} \Rightarrow e^{(2)} = \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|}$

Schritt 3: $c^{(3)} = b^{(3)} - \langle e^{(1)}, b^{(3)} \rangle \cdot e^{(1)} - \langle e^{(2)}, b^{(3)} \rangle \cdot e^{(2)} \Rightarrow e^{(3)} = \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|}$

Schritt k: $c^{(k)} = b^{(k)} - \sum_{i=0}^{k-1} \langle e^{(i)}, b^{(k)} \rangle \cdot e^{(i)} \Rightarrow e^{(k)} = \frac{c^{(k)}}{\|c^{(k)}\|}$

Orthonormal = Alle Vektoren stehen senkrecht aufeinander ($\langle x, y \rangle = 0$)
und haben die Länge 1 ($\|x\| = 1$)

6. Norm (= Allgemeine Längenfunktion)

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Länge eines Vektors (euklidische Länge):

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Norm ordnet jedem Vektor $x \in V$ eine reelle Zahl $\|x\|$ zu, s.d. gilt:

- $\forall x \in V: \|x\| > 0. \|x\| = 0 \rightarrow x = 0$
- $\forall x \in V, \lambda \in \mathbb{C}: \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- $\forall x, y \in V: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **Dreiecksungleichung**

Maximumsnorm: $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

Allgemeine Norm auf $\mathbb{R}^n / \mathbb{C}^n$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=0}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ für } p=2 \text{ euklidische Länge}$$

für $C([a, b]): \|f\|_0 = \max\{|f(t)|, t \in [a, b]\}$

für $C^1([a, b]): \|f\|_1 = \max\{|f(t)|, t \in [a, b]\} + \max\{|f'(t)|, t \in [a, b]\}$

Matrixnorm: *A quadratisch:*

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max(\text{eig}(A^T A))}; \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\min(\text{eig}(A^T A))}^{-1}$$

A symmetrisch:

$$\|A\|_2 = \max |\lambda_i|; \|A^{-1}\|_2 = (\min |\lambda_i|)^{-1}$$

7. Skalarprodukt

In Ebene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Cosinussatz: $\cos(\varphi) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$

Schwarz'sche Ungleichung: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle \quad \forall x, y \in V$

Zwischenwinkel:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) \Rightarrow \varphi = 90^\circ \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

orthogonal, falls: $\langle x, y \rangle = 0$

Reelles Skalarprodukt	Komplexes Skalarprodukt
$\mathbb{R}^n: \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$	$\mathbb{C}^n: \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot y_i$
Linear im zweiten Faktor $\langle x, y^{(1)} + y^{(2)} \rangle = \langle x, y^{(1)} \rangle + \langle x, y^{(2)} \rangle$ $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \cdot \langle x, y \rangle$	analog
Symmetrie $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$	Symmetrie $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$
Positiv definit $\langle x, x \rangle > 0$ $\langle x, x \rangle = 0 \rightarrow x = 0$	analog
Linear im ersten Faktor (analog)	Antilinear im ersten Faktor: $\langle \lambda x, y \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle x, y \rangle$

8. Fehlerrechnung

Vorgehen:

- 1) $A\bar{x} = \bar{c}$ **identifizieren**, $\bar{c}$ ist der Inputvektor
- 2) $A\bar{x} - \bar{c} = \bar{r}$ **aufstellen**, $\bar{r}$ soll minimal werden
- 3) **Normalgleichungen** aufstellen:

$$A^T A \bar{x} = A^T \bar{c}$$

- 4) **Gauss-Elimination** und **Auflösen nach $\bar{x}$**

Bsp: $f(x) = ax + b \Rightarrow f(0) = b, f(1) = a + b, f(2) = 2a + b.$

x_i	0	1	2
y_i	5.41	5.17	5.93

$$\left. \begin{array}{l} b \quad -5.41 = r_1 \\ a \quad +b \quad -5.17 = r_2 \\ 2a \quad +b \quad -5.93 = r_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{=:z} - \underbrace{\begin{pmatrix} 5.41 \\ 5.17 \\ 5.93 \end{pmatrix}}_{=:c} = \vec{r}$$

Normalgleichungen aufstellen, eliminieren, auflösen, fertig...

9. Lineare Abbildungen

V, W Vektorräume

Abbildung V → W: ordnet jedem Vektor $x \in V$ einen Vektor $T(x) \in W$ zu

$$T: V \rightarrow W, x \mapsto T(x)$$

Linear, wenn: - $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

- $T(\lambda x) = \lambda T(x)$

Kern: $\text{Kern}(A) = \{x \in V^n \mid Ax = 0\}$ **Unterraum von V**

Bild: $\text{Bild}(A) = \{y \in W^m \mid \exists x \in V \text{ mit } Ax = y\}$ **Unterraum von W**

$$\text{Bild}(A) = \text{span}\{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$$

Beziehungen:

- $\dim(\text{Bild}(A)) = \text{Rang}(A)$
- $\dim(\text{Kern}(A)) = n - \text{Rang}(A) \quad \text{Rang}(A^T) = \text{Rang}(A)$
- $\dim(\text{Bild}(A)) = \dim(\text{Bild}(A^T))$
- $\dim(\text{Bild}(A)) + \dim(\text{Kern}(A)) = n = \dim(V^n)$ **Dimensionsformel**
- $\text{Kern}(A) = \{0\} \rightarrow \det \neq 0 \rightarrow A$ **invertierbar** $\rightarrow A$ **bijektiv**

Zusammengesetzte Abbildungen: $T: V \rightarrow W, S: W \rightarrow U$

$$x \in V, T(x) \in W \rightarrow S(T(x)) \in U$$

$$x \mapsto S(T(x)), V \rightarrow U$$

$$\left(\begin{array}{l} T(x) = Ax \quad S(y) = By \end{array} \Rightarrow "S \circ T = B \cdot A" \right) \text{Mult. von Matrizen}$$

invertierbare lineare Abbildungen:

V, W, Vektorräume. $T: V \rightarrow W$ linear

T umkehrbar/invertierbar, wenn - $\forall y \in W \quad \exists x \in V \text{ mit } y = T(x)$

- A regulär und $T^{-1}(x) = A^{-1}(x)$

=> Umkehrabbildung $y \mapsto x$ (ordnet jedem $y \in W$ ein $x \in V$ zu)

$$V = W = \mathbb{R}^n, T(x) = Ax$$

Skalarprodukt: $(U, Ax) = (A^T U, x)$ **gilt nur für** $\mathbb{R}^n$

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heisst - **orthogonal**, falls $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y$

- **längentreu**, falls $\|T(x)\| = \|x\| \quad \forall x$

$$\Leftrightarrow \langle T(x), T(x) \rangle = \langle x, x \rangle \quad \forall x \text{ Spezialfall von orth.}$$

orthogonal => längentreu

orthogonal = längentreu + winkeltreu

Abbildungsmatrix finden:

1) Basis wählen: $e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(k)}$

2) Bilder der Basisvektoren berechnen: $e'^{(1)}, e'^{(2)}, \dots, e'^{(k)}$

$$\text{d.h. } e'^{(1)} = f(e^{(1)}), \dots, e'^{(k)} = f(e^{(k)})$$

3) Koordinaten der Vektoren $e'^{(1)}, e'^{(2)}, \dots, e'^{(k)}$ bestimmen

$$\rightarrow e'^{(k)} = \lambda_1 e^{(1)} + \lambda_2 e^{(2)} + \dots + \lambda_n e^{(n)}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \text{ sind Koordinaten von } e'^{(k)}$$

4) In der ersten Spalte der gesuchten Abbildungsmatrix A stehen die Koordinaten von $e'^{(1)}$, usw.

Bsp1 Sei $V = P_2(\mathbb{R})$; $f: V \rightarrow V$; $p(x) \mapsto \frac{d}{dx} p(x)$

- 1) Basis ist $1, x, x^2$ ($e^{(1)} = 1, e^{(2)} = x, e^{(3)} = x^2$)
- 2) $e'^{(1)} = f(e^{(1)}) = f(1) = 0, e'^{(2)} = 1, e'^{(3)} = 2x$
- 3) $0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$,
 $1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$,
 $2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$$\Rightarrow A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Bsp2 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F} x' = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$

Zeige: - $F(x+y) = F(x) + F(y)$
 - $F(\lambda x) = \lambda F(x)$

Abbildungsmatrix bez. Standardbasis:

$$\left. \begin{array}{l} F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} A = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Vermeidung der Inversenberechnung:

Trick: $TB = AT$

- 1) T bestimmen wie oben
- 2) AT berechnen
- 3) GS: $TX = AT$ lösen (parallel für alle (drei) rechten Seiten)
 $\Leftrightarrow X = B$

10. Basiswechsel

Wie sieht die Abbildungsmatrix A bezüglich einer anderen Basis aus?

Neue Basis: $B = (b^{(1)}, \dots, b^{(n)})$

Zwei Möglichkeiten:

- I) $f(b^{(i)})$ berechnen und als Linearkombination von $b^{(i)}$ schreiben
 -> GS lösen für Linearkombinationen
 -> Koeffizienten in Spalten von neuer Abbildungsmatrix schreiben

Bsp: A von Bsp1, neue Basis:
 $b_1 = x^2 + x + 1, b_2 = x^2 + 2x + 3, b_3 = x^2 + 3x + 4$

$$\left. \begin{array}{l} f(b_1) = \frac{d}{dx} b_1 = 2x + 1 = 1b_1 - 4b_2 + 3b_3 \\ f(b_2) = \frac{d}{dx} b_2 = 2x + 2 = 0b_1 - 2b_2 + 2b_3 \\ f(b_3) = \frac{d}{dx} b_3 = 2x + 3 = -1b_1 - 0b_2 + 1b_3 \end{array} \right\} B = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

- II) Transformationsmatrix T bestimmen (zw. alten $e^{(i)}$ u. neuen $b^{(i)}$)
 $b^{(i)} = \lambda_1 e^{(1)} + \lambda_2 e^{(2)} + \dots + \lambda_n e^{(n)}$ -> Koeffizienten in Spalten
 von T => $B = T^{-1}AT$

Bsp: $b_1 = 1e_1 + 1e_2 + 1e_3, b_2 = 3e_1 + 2e_2 + 1e_3, b_3 = 4e_1 + 3e_2 + 1e_3$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = T^{-1}AT$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{T^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_T$$

11. Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwert: Nullstelle des **Charakteristischen Polynoms**

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Eigenvektor: Zu jedem Eigenwert gibt es einen Eigenvektor.

Es gilt: $(A - \lambda_i I) \vec{v} = 0$

Mit *Gauss-Elimination* nach v auflösen.

Freie Parameter wählen.

Niemals 0!

Algebraische Vielfachheit: Grad einer Nullstelle (λ_i) des Charakteristischen Polynoms.

Geometrische Vielfachheit: $\dim(E_{\lambda_i}(A)) = \max.$ Anz. Unabh. Eigenvektoren von (λ_i)

Es gilt: $1 \leq \text{geom. Vielfachheit} \leq \text{alg. Vielfachheit}$

Eigenraum: Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert (λ_i)

$$E_{\lambda} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

Eigenbasis: für A: Basis deren Elemente Eigenvektoren sind

⇒ Summe der Basen aller Eigenräume von A

⇒ $gV = n \iff \forall \lambda : gV = aV$

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte: $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I_3) = \dots = -(\lambda - 1)^2 (\lambda - 4)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow$ **alg. Vielfachheit=2**

$\lambda_3 = 4 \Rightarrow$ **alg. Vielfachheit=1**

Eigenraum zu $\lambda = 1$: mit Gauss $(A - 1 \cdot I_3) \vec{v} = 0$ lösen

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v_3 = \alpha, v_2 = \beta, v_1 = -\alpha - \beta$

wähle einmal $\alpha = 1, \beta = 0$ und einmal $\alpha = 0, \beta = 1$

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

geom. Vielfachheit = 2

Eigenraum zu $\lambda = 4$: Vorgehen analog

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

geom. Vielfachheit=1

Eigenbasis: die Vektoren $u^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear

unabhängig und bilden eine Eigenbasis von A:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

12. Diagonalisieren einer Matrix

A heisst **diagonalisierbar**, falls eine reguläre T-Matrix existiert:

$$\boxed{T^{-1}AT = D}$$

Matrix in Diagonalform:

$$\boxed{A = TDT^{-1}}$$

T: Eigenraum

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix mit Eigenwerten

Eigenschaften von diagonalisierbar:

- A besitzt n verschiedene Eigenwerte (einfache NS)
- $aV(\lambda) = gV(\lambda) = 1 \quad \forall \lambda : A$ ist „einfach“
- eine Eigenbasis existiert

Spalten von T: sind Eigenvektoren zu den versch. Eigenwerten.

Falls $aV(\lambda) = 2 \Rightarrow$ nimmt man 2 lin. Unabh. Vektoren

aus $E_\lambda \Rightarrow$ nur möglich, falls $aV(\lambda) = gV(\lambda) \quad \forall \lambda$

Jordan'sche Normalform:

$$\boxed{A = TDT^{-1}}$$

symmetrische Matrizen:

- Alle Eigenwerte sind reell
- Eigenvektoren zu versch. Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander
- Symm. Matrix halbeinfach $\rightarrow$ diagonalisierbar
- $\exists$ orthogonale Eigenbasis zu A
- $\exists$ orthogonale Matrix O, sd. $O^T A O$ diagonal ist.
In den Diagonalen stehen die Eigenwerte von A.
Die Spalten von O sind die entsprechenden Eigenvektoren von A.

Ähnliche Matrizen:

- haben dieselben Eigenwerte und aV, gV
- $B = SAS^{-1}$ S bildet $E_{\lambda_i}(A)$ auf $E_{\lambda_i}(B)$ ab

Potenzen: $\boxed{A^k = TD^kT^{-1}}$

13. Differentialgleichungen

I) Systeme zweiter Ordnung

Masse	*	Beschleunigung	=	Kraft
1kg	*	$\ddot{y}$	=	$y \cdot C (=1)$

- Gleichungssystem in Matrizenform schreiben:

$$\ddot{y}(t) = Ay(t)$$

- Eigenwerte von A ausrechnen und dazugehörige Eigenvektoren (normiert)

- Eigenvektoren in Spalten von T schreiben

⇒ Orthogonale Eigenbasis zu A ⇒ $T := (u^{(i)})$

- $y(t) = Tx(t)$ Koordinatentransformation (vorläufig vergessen)

- $\ddot{x}(t) = T^{-1}ATx(t)$

$\ddot{x}(t) = Dx(t)$ falls A diag'bar. D=diag.Matrix mit λ von A

- $\ddot{x}(t) = \lambda_i \cdot x_i(t)$ alles auf linke Seite

- $\ddot{x}_i(t) + \omega_i^2 \cdot x_i(t) = 0$ mit $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i}$

- **Ansatz:** $\ddot{x}_i(t) = a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t)$

-> $y(t) = Tx(t)$

- $y(t) = x_1(t) \cdot u^{(1)} + x_2(t) \cdot u^{(2)} + x_3(t) \cdot u^{(3)} \dots$

- Ansatz einsetzen

- Mit Anfangswerten in Matrizenform:

$y(0), \dot{y}(0) \Rightarrow a_i, b_i$ bestimmen

$x_i(0) = a_i$ und $\dot{x}_i(0) = \omega_i b_i$

- $y(0) = Tx(0) = T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\dot{y}(0) = T\dot{x}(0) = T \begin{pmatrix} \omega_1 b_1 \\ \omega_2 b_2 \\ \omega_3 b_3 \end{pmatrix}$

- $Ta = (y_0)$, $T(\omega_i b_i) = T\tilde{b}_i = (\dot{y}_0)$

- Da T orthogonal und normiert: $T^{-1} = T^T$

⇒ $a = T^T (y_0)$

$$\ddot{y}_1(t) = -2y_1(t) + y_2(t)$$

Bsp: $\ddot{y}_2(t) = y_1(t) - 2y_2(t) + y_3(t)$

$$\ddot{y}_3(t) = y_2(t) - 2y_3(t)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm \sqrt{2}$$

Eigenräume: $E_{-2} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $E_{-2 \pm \sqrt{2}} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Orthogonale Basis zu A:

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T := (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = Tx(t) = \begin{pmatrix} u^{(1)} & u^{(2)} & u^{(3)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \left[a_1 \cos(\sqrt{2}t) + b_1 \sin(\sqrt{2}t) \right] \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ & + \left[a_2 \cos(\sqrt{2-\sqrt{2}}t) + b_2 \sin(\sqrt{2-\sqrt{2}}t) \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ & + \left[a_3 \cos(\sqrt{2+\sqrt{2}}t) + b_3 \sin(\sqrt{2+\sqrt{2}}t) \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \dot{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ta = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad T\tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{b}_i := \omega_i b_i$$

$\tilde{b} = 0 \rightarrow b = 0$ da T regulär.

$$A = T^T \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cos(\sqrt{2}t) \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ -\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} \quad \text{Allg. Lösung}$$

II) Systeme erster Ordnung

- $\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0$ in Matrixschreibweise
- Eigenwerte und dazugehörige Eigenvektoren ausrechnen
- Eigenvektoren in T schreiben: $T := (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$
- $y(t) = Tx(t)$ Koordinatentransformation (später)
- $\dot{x}(t) = Dx(t)$
- **Ansatz:** $x_j(t) = c_j e^{\lambda_j t}, \quad j = 1, \dots, n$
- $y(t) = Tx(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} (u^{(1)}) + c_2 e^{\lambda_2 t} (u^{(2)}) + \dots + c_n e^{\lambda_n t} (u^{(n)})$
- $T \cdot c = y_0$ Koeffizienten mit Anfangswerten bestimmen

Bsp: $\dot{y}_1(t) = 3y_1(t) + 4y_2(t), \quad y_1(0) = 6$
 $\dot{y}_2(t) = 3y_1(t) + 2y_2(t), \quad y_2(0) = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 6 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow u^{(1)} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = c_1 e^{6t} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T \cdot c = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}: \quad \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} 4c_1 - c_2 = 6 \\ 3c_1 - c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = -2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_1(t) = 4e^{6t} + 2e^{-t}}}$$

$$\underline{\underline{y_2(t) = 3e^{6t} - 2e^{-t}}}$$