Werkstoffe und Fertigung I
Prof.Dr. K. Wegener
Wintersemester 2006/07

Seminarübung 2
Spannung und Dehnung, Idealstruktur

Musterlösung

Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigung, ETH Zentrum
Übungsassistenz: Niklas Rotering, Florian Hofmann, Michael Kelterborn, Tobias Ott, Tobias Nösekabel, Daniel Sutter; Peter Vogel, Robin Vujanic.
Koordination: Willi Müller, CLA F21.1, Tel. 01 633 23 84, wm@iwf.mavt.ethz.ch

Lernziele

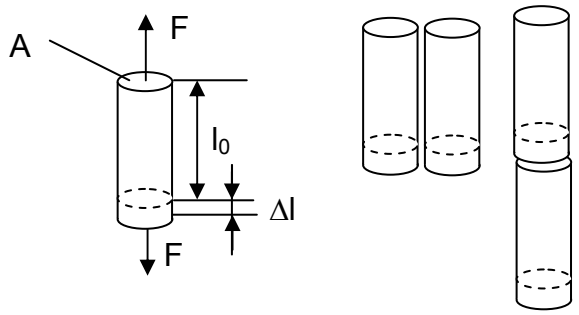
Werkstoffe und Fertigung I, Kap. 0, Lernziel 4, Kap. 1, Lernziele 1-3.

Kerninformationen

Spannung und Dehnung

Ein Werkstoff unter Krafteinfluss deformiert sich.
Man führt spezifische Grössen ein, um von der Bauteilgeometrie unabhängig zu werden.

Am Beispiel des Zugstabes



Zugspannung σ = Kraft F pro Querschnittsfläche A $\sigma = \frac{F}{A}$

Dehnung ε = Verlängerung Δl pro ursprüngliche Länge l $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

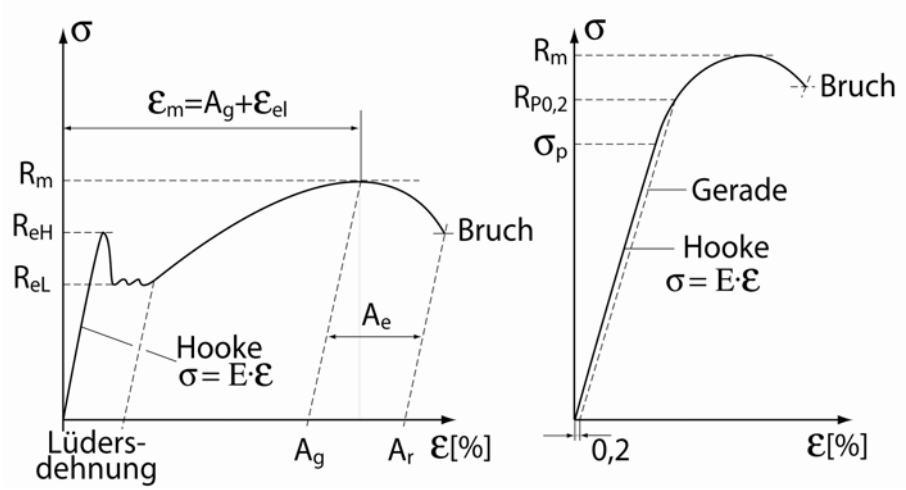
Das sind lineare Zusammenhänge: Doppelt so grosse Fläche bei gleicher Spannung heisst doppelt so grosse Kraft (z.B. zwei Stäbe parallel). Doppelt so grosse Länge bei gleicher Spannung heisst gleiche Dehnung, aber doppelt so grosse Verlängerung (zum Beispiel zwei Stäbe in Serie).

Zusammenhang Spannung → Dehnung
Wie stark sich ein Werkstoff unter Zugspannungseinfluss dehnt, hängt vom Material und seinem Zustand, z.B. Temperatur ab.

Für viele Materialien besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Belastung und Dehnung: Doppelt so grosse Belastung heisst doppelt so grosse Dehnung. Dieser Zusammenhang heisst **Hooksches Gesetz** und gilt bis zu einem gewissen Grenzmass der Spannung, der Proportionalitätsgrenze σ_P.

Hookesches Gesetz $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Der Proportionalitätsfaktor **E** heisst **Elastizitätsmodul** oder E-Modul. (Er entspricht der Spannung, die nötig wäre, um den Stab auf die doppelte Länge zu ziehen. Die meisten Materialien brechen lang vor Erreichen dieses Wertes).
Es sind beide Fragestellungen möglich: Man belastet einen Stab mit der Spannung σ und misst, wie stark er sich dehnt, oder man unterwirft den Stab einer Dehnung ε und misst die entstehende Spannung.
Bei Spannungen höher als die Proportionalitätsgrenze gilt das Hookesche Gesetz nicht mehr, die Dehnung wächst überproportional zur Spannung. Zunächst verhält sich das Material immer noch elastisch, d.h. bei Entlastung verschwindet die Dehnung vollständig. Bei höheren Belastungen dehnt sich das Material plastisch, d.h. bei Entlastung bleibt eine Restdehnung bestehen. Als Grenzspannung, ab welcher plastische Dehnung auftritt, wird bei kontinuierlichem Spannungs-Dehnungs-Verlauf technisch die Spannung $R_{P0.2}$ definiert, bei welcher nach Entlastung 0.2% bleibende Dehnung vorliegen, oder bei ausgeprägtem Spannungsabfall im Spannungs-Dehnungs-Verlauf die Streckgrenze R_{EH}. Lüdersdehnung ist der Dehnungsbereich etwa konstanter Spannung nach Erreichen der Streckgrenze bis die Spannung beginnt, weiter anzusteigen.

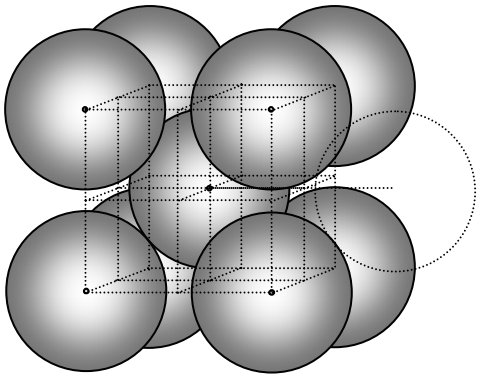


Spannungsumrechnung
1 Pa = 1 N/m^2
1MPa =10^6 Pa = 10^6 N/m^2 = 10^6 N/m^2 10^{-6} m^2/mm^2 = 1 N/mm^2
(MPa: Megapascal, N: Newton, kN: Kilonewton)

Raumgitter und Kristallsysteme

Jeder Gitterpunkt eines Raumgitters kann durch Kombination von ganzzahligen Vielfachen dreier Basisvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ beschrieben werden: $\vec{r} = u\vec{a} + v\vec{b} + w\vec{c}$. Die Beträge a_0, b_0, c_0 der Basisvektoren zusammen mit den Zwischenwinkeln γ, α, β nennt man die Gitterkonstanten.
Die Elementarzelle ist die kleinste Einheit des Kristallgitters, die alle Merkmale des gesamten Gitters aufweist (Symmetrien, Stoffzusammensetzung). Im allgemeinsten Fall ist sie ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche. Durch translatorische Aneinanderreihung der Elementarzelle kann das ganze Gitter erzeugt werden. Die Basisvektoren werden so gewählt, dass sie mit den Kanten der Elementarzelle zusammenfallen. Je nach Anordnung der Atome in der Elementarzelle unterscheidet man verschiedene Gittertypen, z.B. kubisch primitiv, kubisch flächenzentriert kfz, kubisch raumzentriert krz, hexagonal dichtest gepackt hdP, tetragonal innenzentriert.
Packungsdichte:
Die Atome werden als Kugeln aufgefasst, die sich an bestimmten Stellen - je nach Gittertyp – berühren. Atome des gleichen chem. Elementes haben gleichen Durchmesser.
Die Packungsdichte ist das Verhältnis des zu der Zelle gehörigen Atom-Kugelvolumens zum Volumen der Elementarzelle. Beim kubisch raumzentrierten Gitter das Volumen von zwei Kugeln (8 Kugeln, die zu 1/8 zu der Zelle gehören plus eine Kugel in der Mitte) dividiert durch das Volumen des Würfels, der durch die Kugelzentren gebildet wird. Zentrale Aufgabe zur Bestimmung der Packungsdichte ist die Abklärung der Berührungspunkte (z.B. Raum- oder Flächendiagonale) und des Zusammenhangs zwischen Kugelradius *r* und Gitterkonstanten a_0, ...

Die Koordinationszahl gibt an, wie viele nächste Nachbarn ein Atom im Gitter hat. Um sie zu bestimmen, müssen auch die Abstände zu den nächst weiter entfernten berechnet werden, um die Annahme zu bestätigen.



Vektorprodukt

Sind ***a*** und ***b*** zwei dreikomponentige (räumliche)Vektoren, so ist ***a***x***b*** jener Vektor, der auf ***a*** und ***b*** normal steht, dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des von ***a*** und ***b*** aufgespannten Parallelogramms ist und der die Rechtsschraubenregel (Rechte-Hand-Regel) erfüllt: Drehen wir ***a*** auf kürzestem Weg in ***b*** und denken uns diese beiden Vektoren mit einer Schraube verbunden, so zeigt ***a***x***b*** in die Bewegungsrichtung der Schraube.

Das **Vektorprodukt** kann aus den Komponenten der beiden Vektoren berechnet werden mit Hilfe der Formel

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{bmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{bmatrix}$$

Textur

Ein einzelner Kristall ist anisotrop, d.h. seine Eigenschaften sind richtungsabhängig, doch zeigt ein Werkstoff bei regelloser Anordnung der Kristallkörner quasi-isotropes Verhalten. Wenn in einem Metallstück die Gitter der Kristallkörner eine bestimmte Lage bevorzugen, die ideale Lage, so spricht man von Textur. Dadurch sind auch die Eigenschaften des Körpers in verschiedenen Richtungen unterschiedlich, anisotrop.
Eine Textur kann man z.B. durch Walzen erzeugen. Eine Textur wird beschrieben, indem Walzebene und Walzrichtung im Koordinatensystem des Kristallgitters eines Kornes in idealer Lage dargestellt werden, Angabe z.B. (110)[001]. Üblich ist die Darstellung als Ebenen- bzw. Richtungs*familien*, mit Unterdrückung der negativen Vorzeichen, auch bei Schreibweise mit ()-[]-Klammern.

1 Spannung und Dehnung

Gegeben sind zwei Stäbe gleicher Länge, unterschiedlichen Querschnittes und aus Stahl unterschiedlicher Qualität.

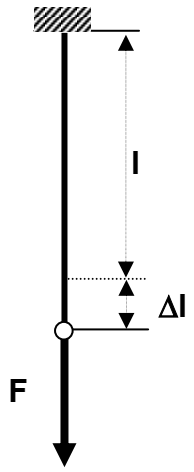
Stab A:		Stab B:	
Länge l_0:	2 m	Länge l_0:	2 m,
Rundstab, Durchmesser d_A:	5 mm	Rundstab, Durchmesser d_B:	10 mm
Material:	42 CrMo 4	Material:	S 235 JR G2
Zugfestigkeit R_m:	1100 N/mm^2	Zugfestigkeit R_m:	370 N/mm^2
Elastizitätsgrenze $R_{p0.2}$:	900 N/mm^2	Streckgrenze R_e:	235 N/mm^2
Elastizitätsmodul E:	$216 \cdot 10^3$ N/mm^2	Elastizitätsmodul E:	$211 \cdot 10^3$ N/mm^2

Randbedingungen und Annahmen

- Sie wollen die Stäbe nur zu 66.7% ihrer Streckgrenze/Elastizitätsgrenze ausnützen (Sicherheit gegen Fliessen S_F= 1.5).

Fragen

1. Welche Last F_A kann der Stab A tragen?
2. Welche Last F_B kann der Stab B tragen?
3. Wie gross sind die Dehnung ε_A und die Verlängerung Δl_A von Stab A?
4. Wie gross sind die Dehnung ε_B und die Verlängerung Δl_B von Stab B?
5. Zeichnen Sie die Querschnitte der Stäbe A und B im Massstab 1:1 auf Ihr Papier.



Lösung:

1. Mögliche Last F_A

Zugkraft ist Zugspannung mal Querschnittsfläche des Stabes: $F_A = \sigma_A \cdot A_A$
Als zulässige Spannung sind 66.7% der Elastizitätsgrenze gegeben. Die Zugspannung soll unter der Kraft F_A *gerade diesen Wert erreichen.*

Stab A

Zulässige Spannung	$\sigma_{zulA} = R_{p0.2}/S_F = 900\ N/mm^2/1.5 = 600\ N/mm^2$
Querschnitt des Stabes	$A_A = d_A^2 \cdot \pi/4 = 5^2 \cdot \pi/4 = 19.635\ mm^2$
Zulässige Last	$F_A = A_A \cdot \sigma_{zulA} = 19.635 \cdot 600\ mm^2 \cdot N/mm^2 = 11.8\ kN$

2. Mögliche Last F_B

Stab B

Zulässige Spannung	$\sigma_{zulB} = R_{p0.2}/S_F = 235\ N/mm^2/1.5 = 156.7\ N/mm^2$
Querschnitt des Stabes	$A_B = d_A^2 \cdot \pi/4 = 10^2 \cdot \pi/4 = 78.54\ mm^2$
Zulässige Last	$F_B = A_B \cdot \sigma_{zulB} = 78.54 \cdot 156.7\ mm^2 \cdot N/mm^2 = 12.3\ kN$

3. Dehnung und Verlängerung Stab A
Die Verlängerung eines Stabes berechnet sich aus seiner Dehnung multipliziert mit seiner Länge:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l$$

Die Dehnung berechnet sich mit dem Hookeschen Gesetz aus der Zugspannung und dem Elastizitätsmodul:

$$\varepsilon = \sigma / E$$

Die Spannung ist gleich der jeweiligen zulässigen Spannung und bekannt.

Dehnung von Stab A unter Last F_A: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{600}{216 \cdot 10^3} = 0.00278\ [1]$

Verlängerung von Stab A unter Last F_A: $\Delta l = l \cdot \varepsilon = l \cdot \frac{\sigma}{E} = 2 \cdot \frac{600}{216 \cdot 10^3} = 0.00555 [m]$

4. Dehnung von Stab B unter Last F_B: $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{156.7}{211 \cdot 10^3} = 0.000743\ [1]$

Verlängerung von Stab B unter Last F_B: $\Delta l = l \cdot \varepsilon = l \cdot \frac{\sigma}{E} = 2 \cdot \frac{156.7}{211 \cdot 10^3} = 0.001485 [m]$

5. Querschnitte der Träger

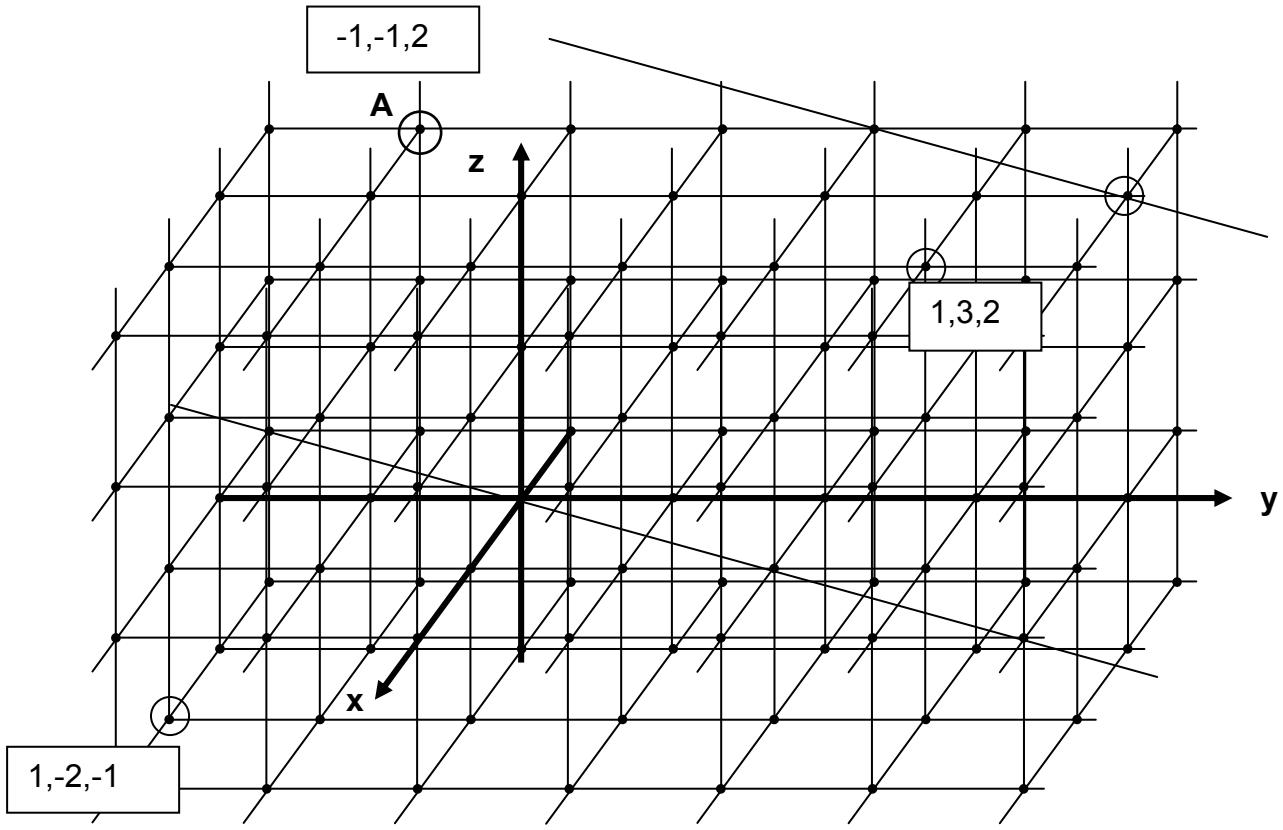
A: Durchmesser 5 mm

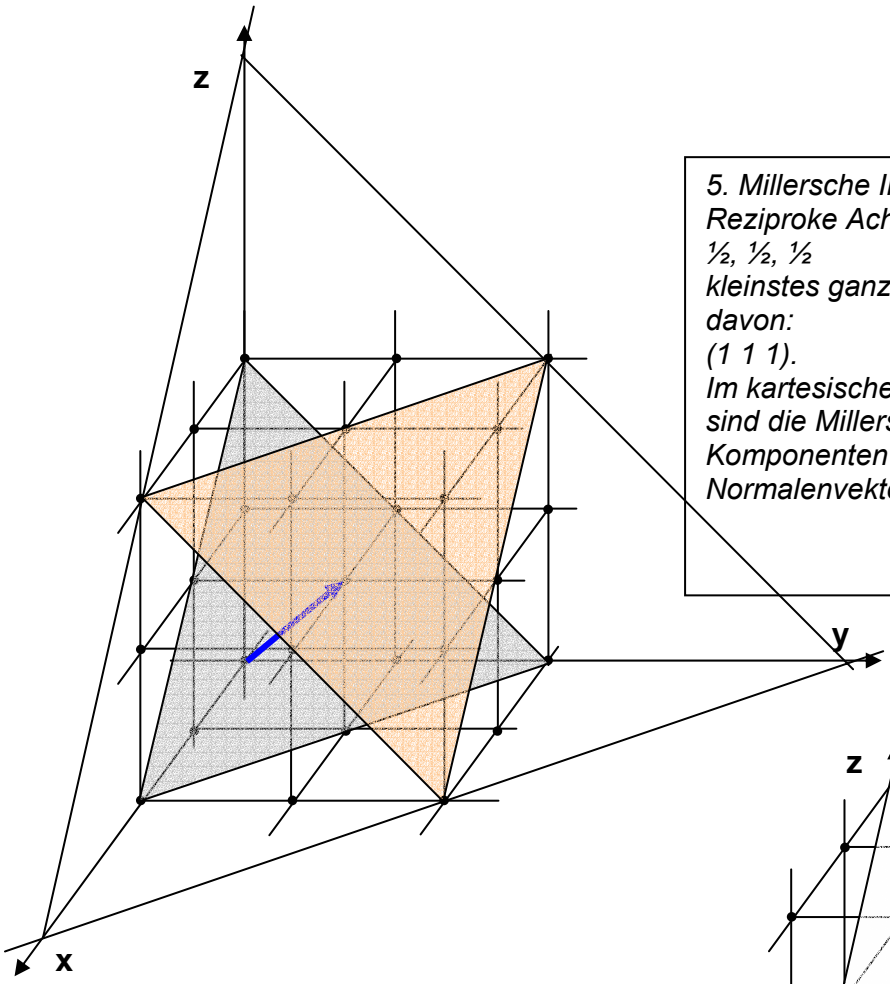
B: Durchmesser 10 mm

2 Punkte, Geraden, Ebenen im Raumgitter, Millersche Indizes

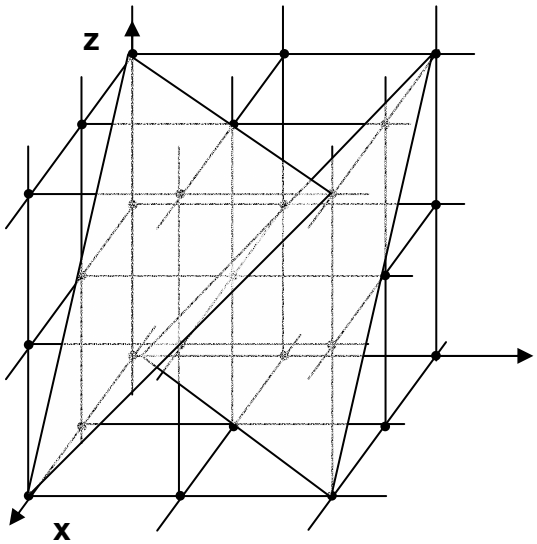
Fragen und *Lösungen*:

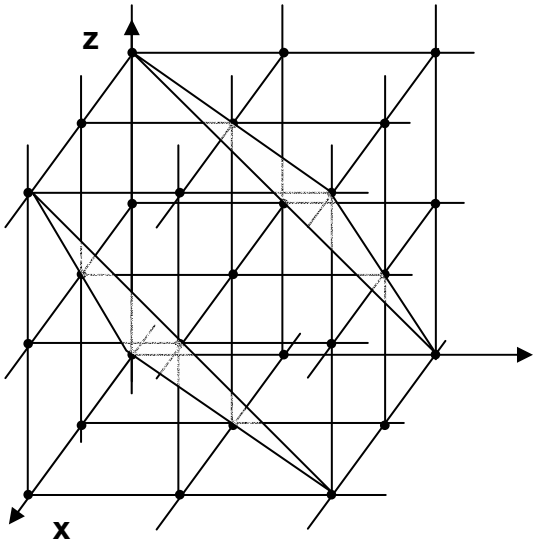
1. Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an. → *-1,-1,2*
2. Zeichnen Sie im Gitter die Punkte 1,3,2; 1, -2, -1 ein.
3. Zeichnen Sie im Gitter zwei der Geraden [1, 2, 0], eine davon durch den Punkt 0, 4, 2
4. Zeichnen Sie in der kleinen Figur die Ebene mit den Achsabschnitten 2, 2, 2 ein (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen).
5. Geben Sie die Millerschen Indizes dieser Ebene an.
6. Zeichnen Sie einen Normalenvektor auf diese Ebene.
7. Zeichnen Sie die Ebene mit den Millerschen Indizes (1,1,1) durch den Punkt 2, 2, 0 (Schnittgeraden mit den Flächen des Würfels, der durch die Raumdiagonale 2,2,2 aufgespannt wird)
8. Zeichnen Sie analog zu Teilaufgabe 7 die gesamte Ebenenfamilie {1 1 1}.
9. Liegt die Gerade [0 1 1] in {1 1 1}?
   → *Wenn eine Gerade in einer Ebene liegt, steht der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Normalenvektor auf die Ebene, das Skalarprodukt verschwindet. Das Skalarprodukt zwischen [0 1 1] und (1 1 1) sowie* $(\bar{1}\,1\,1)$ *ergibt 2, hingegen zwischen [0 1 1] und* $(1\,\bar{1}\,1)$ *sowie* $(1\,1\,\bar{1})$ *Null.*
   →*Die Gerade [0 1 1] liegt in zwei von den vier Ebenen der Ebenenfamilie {1 1 1}?*

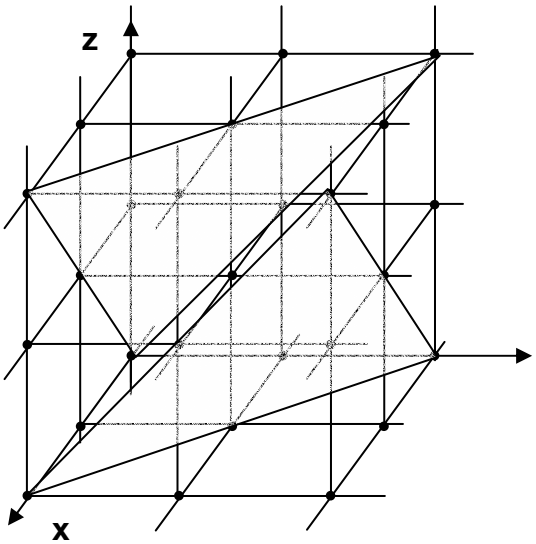




5. Millersche Indizes:
Reziproke Achsabschnitte:
½, ½, ½
kleinstes ganzzahliges Vielfaches davon:
(1 1 1).
Im kartesischen Koordinatensystem sind die Millerschen Indizes die Komponenten eines Normalenvektors: 1,1,1





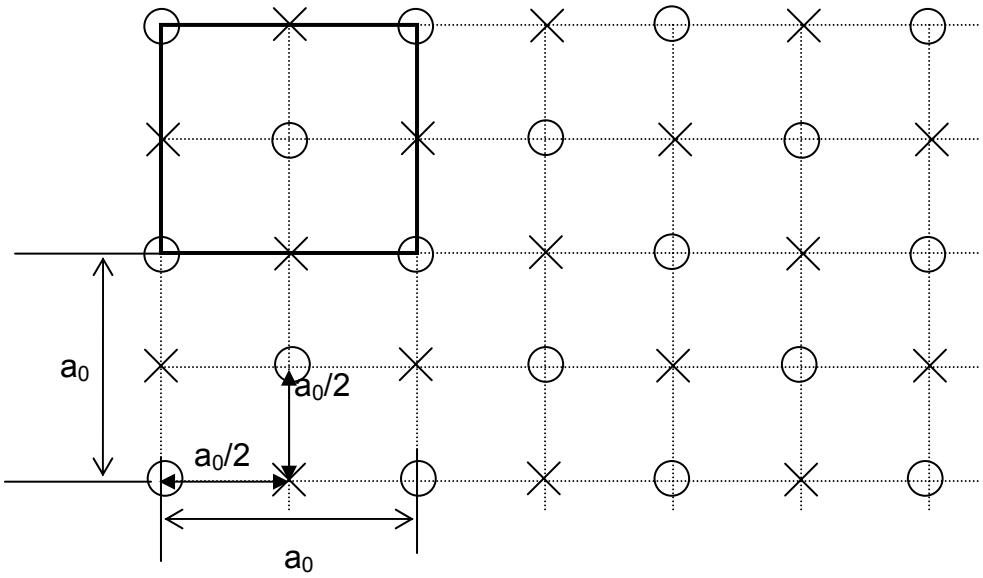


3 kfz-Gitter

Dargestellt ist die Schicht A einer kubisch flächenzentrierten Elementarzelle.

1. Zeichnen Sie einen etwas grösseren Bereich dieser Schicht durch translatorische Wiederholung der Elementarzelle.
2. Pausen Sie das Gitter durch auf Pauspapier.
3. Um wie viel können Sie das Gitter verschieben, bis es wieder mit sich in Deckung ist?
4. Zeichnen Sie die Atome der darüberliegenden Schicht B in die Vorlage ein, z. B. mit Kreuzen (x).
5. Vergleichen Sie mittels der Pause die Lagen A und B.

Lösung



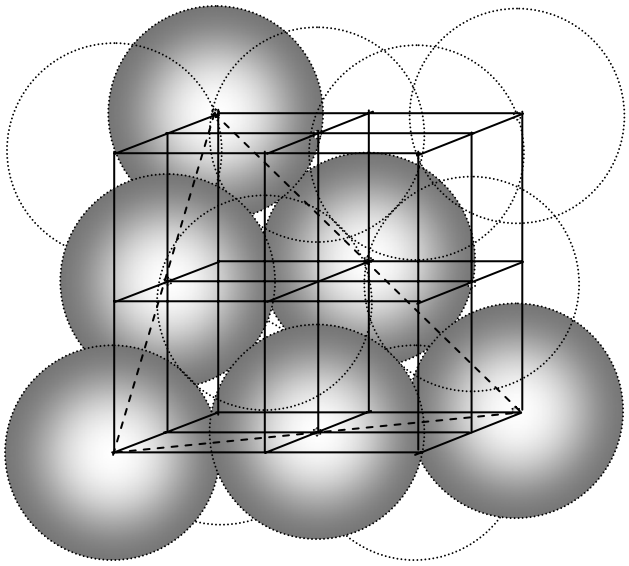
Verschiebung um a_0 in horizontaler oder vertikaler Richtung oder um je $a_0/2$ in beiden Richtungen führt wieder auf dasselbe Gitter.

Die Schicht B ist das gleiche Gitter wie die Schicht A, um $a_0/2$ verschoben.

4 kfz-Gitter, dichtest gepackte Ebenen

Heben Sie eine der dichtest gepackten Ebenen (1 1 1) der kubisch flächenzentrierten Elementarzelle durch Bemalen hervor. (Vgl. Aufgabe 2.)

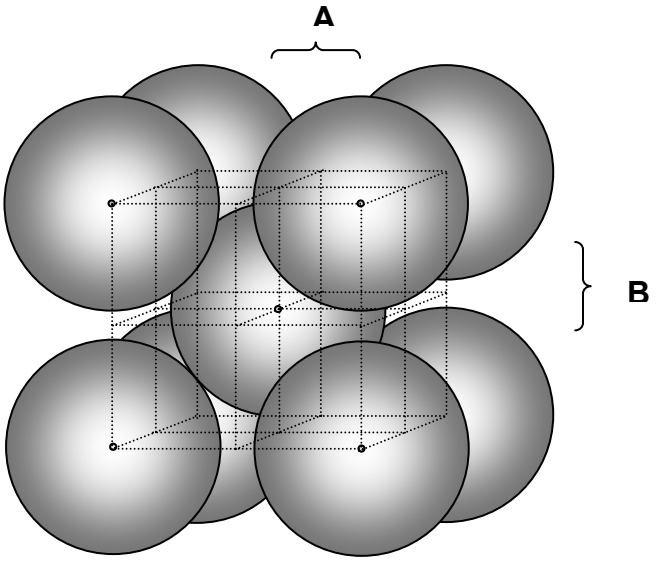
Lösung



5 krz-Gitter, Packungsdichte

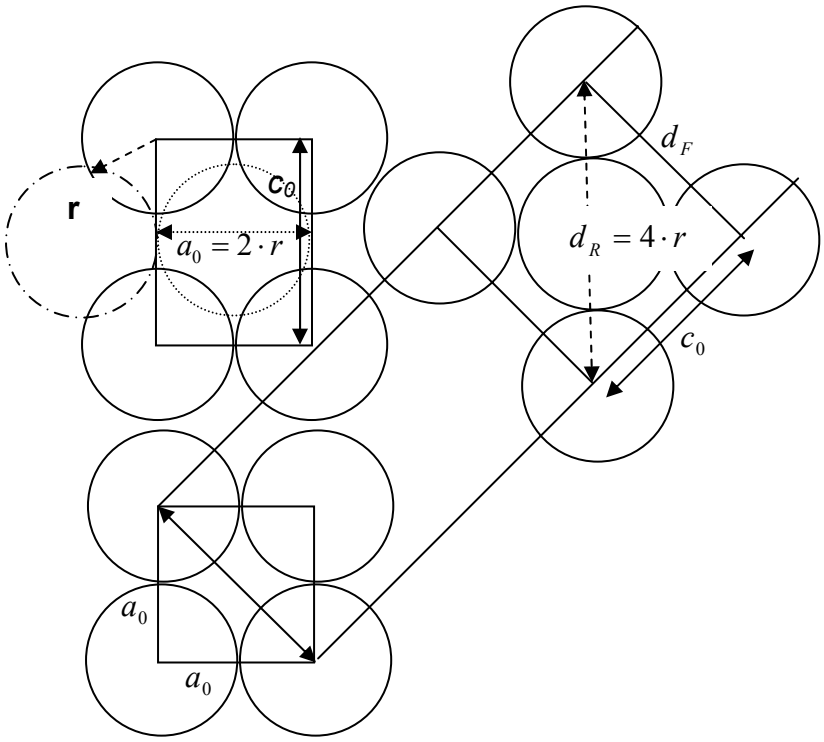
Berechnen Sie die Packungsdichte und die Koordinationszahl für folgende Elementarzellen:

1. Tetragonal raumzentriert, Berührung der Atome in Raumdiagonalen und in A
2. Tetragonal raumzentriert, Berührung der Atome in Raumdiagonalen und in B
3. Kubisch raumzentriert, Berührung in der Raumdiagonalen.



Lösung:

1. Berührung in A und Diagonalen



Volumen einer Kugel (Atom): $V_A = r^3 \cdot \frac{\cdot 4\pi}{3}$

Aus Aufriss oder Grundriss erkennt man: $a_0 = 2 \cdot r$. *Im Grundriss sieht man für die Flächendiagonale mit Pythagoras:*

$$d_F = a_0 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r$$

Durch Umklappen wird die Diagonalebene mit der Raumdiagonalen d_R in wahrer Grösse dargestellt. Diese entspricht einer dichtest gepackten Gerade und hat die Länge 4r. Nochmals Pythagoras:

$$c_0 = \sqrt{d_R^2 - d_F^2} = \sqrt{(16-8)} \cdot r = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot r$$

$\rightarrow c_0 = d_F$, *die Zentren der Atome bilden in der Diagonalebene ein Quadrat.*

Atomvolumen in der El.-zelle:

$$V_{AE} = 2 \cdot r^3 \cdot \frac{\cdot 4\pi}{3}$$

Elementarzellenvolumen:

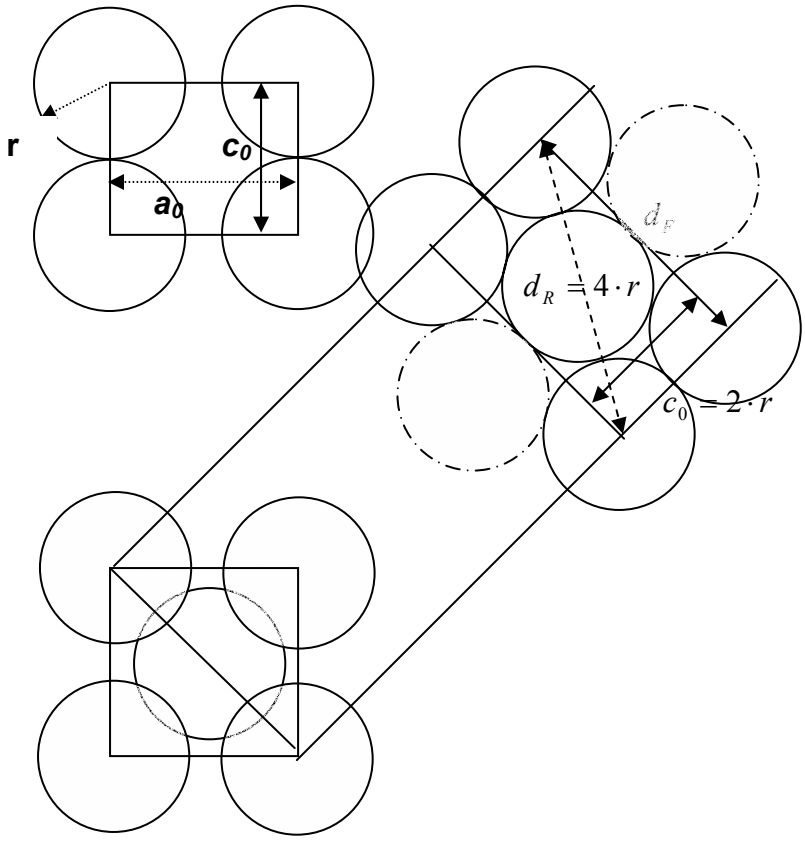
$$V_E = a_0^2 \cdot c_0 = 4 \cdot r^2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot r = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot r^3$$

Packungsdichte

$$P = \frac{V_{AE}}{V_E} = \frac{\frac{8}{3} \cdot \pi}{8 \cdot \sqrt{2}} = 0.7404$$

Koordinationszahl: 12

2. Berührung in B und Diagonalen



Man beginnt bei der umgeklappten Diagonalebene. Die Raumdiagonale ist 4r, c_0 ist 2r. Daraus errechnen sich die Flächendiagonale und a_0.

$$d_F = \sqrt{d_R^2 - c_0^2} = \sqrt{16-4} \cdot r = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r$$

$$d_F = a_0 \cdot \sqrt{2} \rightarrow a_0 = \sqrt{6} \cdot r$$

Volumen von 2 Atomen, wie oben:

$$V_{AE} = 2 \cdot r^3 \cdot \frac{\cdot 4\pi}{3}$$

Volumen Elementarzelle:

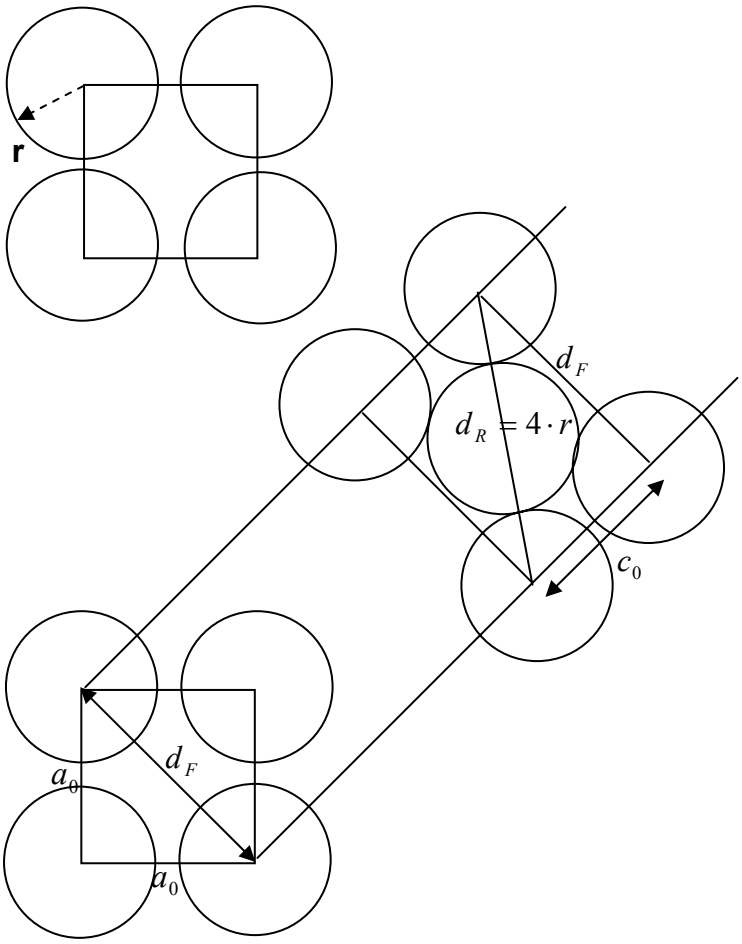
$$V_E = a_0^{\ 2} \cdot c_0 = 12 \cdot r^3$$

Packungsdichte:

$$P = \frac{V_{AE}}{V_E} = \frac{\frac{8}{3} \cdot \pi}{12} = 0.698$$

Koordinationszahl: 10

3. Kubisch raumzentriert, Berührung in Diagonalen



$$c_0 = a_0$$

$$d_R = 4 \cdot r$$

$$d_F = \sqrt{2} \cdot a_0$$

$$d_R = \sqrt{d_F^2 + c_0^2}$$

$$4 \cdot r = \sqrt{3} \cdot a_0 \rightarrow a_0 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot r$$

Volumen von 2 Atomen, wie oben:

$$V_{AE} = 2 \cdot r^3 \cdot \frac{\cdot 4\pi}{3}$$

Volumen Elementarzelle:

$$V_E = a_0^{\ 3} = \frac{64}{3 \cdot \sqrt{3}} \cdot r^3$$

Packungsdichte:

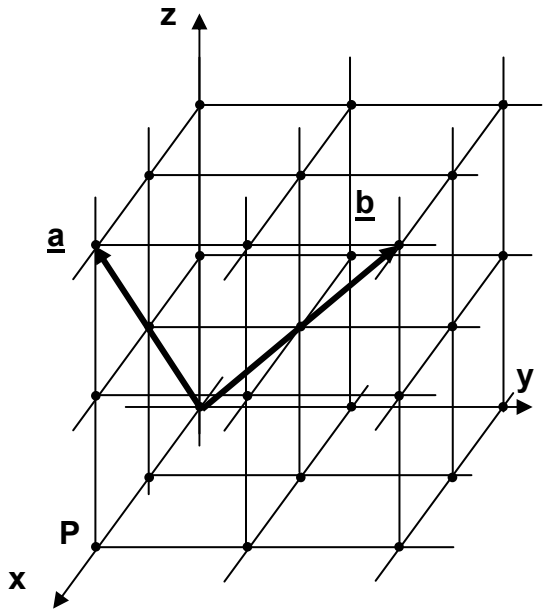
$$P = \frac{V_{AE}}{V_E} = \frac{\frac{8}{3} \cdot \pi}{\frac{64}{3 \cdot \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \pi = 0.680$$

Koordinationszahl: 8

6 Vektorprodukt

Berechnen Sie das Vektorprodukt der beiden Vektoren a und b.

1. Was bedeutet das Resultat?
2. Vergleichen Sie es mit den Millerschen Indizes der durch a und b aufgespannten Ebene.



Lösung: Vektorprodukt *a=2,0,2, b=2,2,2*

$$\begin{matrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix} \qquad \underline{a} \times \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1) Man erhält einen Normalenvektor zu den Vektoren a und b bzw. zu der Ebene, welche durch die beiden Vektoren aufgespannt wird.

2) Der Punkt P wird als Koordinatenursprung betrachtet:
Achsabschnitte : $-2, \infty, 2$ *;*

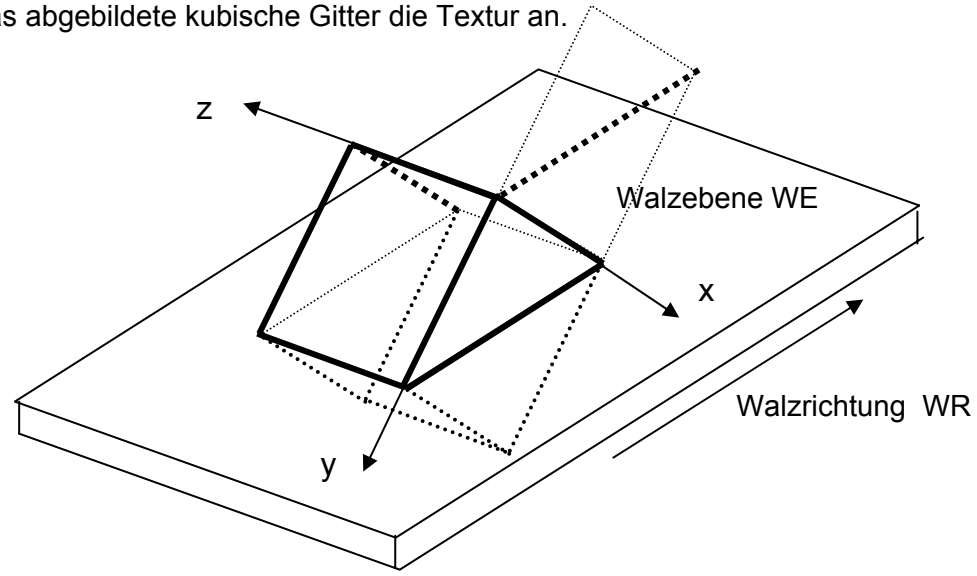
reziproke Werte: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{\infty}, \frac{1}{2}$

Erweitern mit 2:→ Millersche Indizes: $(\bar{1}01)$

Vergleich: Die beiden Methoden liefern Vektoren, welche in Richtung und Orientierung übereinstimmen und sich nur im Betrag unterscheiden.

7 Textur

Geben sie für das abgebildete kubische Gitter die Textur an.



Lösung:
Die Walzebene schneidet die Achsen in $(1, 1, \infty)$*, die Millerschen Indizes der Ebene sind also (1 1 0). Die Walzrichtung ist* $[1\bar{1}0]$
Die Textur lautet also (1 1 0) $[1\bar{1}0]$*. Als Ebenen-/Richtungsfamilien:* $\{110\}\langle 110\rangle$ *oder vereinfacht:* $(110)[110]$.