Werkstoffe und Fertigung I
Prof.Dr. K. Wegener
Wintersemester 2006/07

Seminarübung 7

Elastizität, Plastizität

Musterlösung

Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigung, ETH Zentrum
Übungsassistenz: Niklas Rotering, Michael Kelterborn, Florian Hofmann, Tobias Ott, Tobias Nösekabel, Daniel Sutter; Robin Vujanic, Peter Vogel.
Koordination: Willi Müller, CLA F21.1, Tel. 01 633 23 84, wm@iwf.mavt.ethz.ch

Lernziele

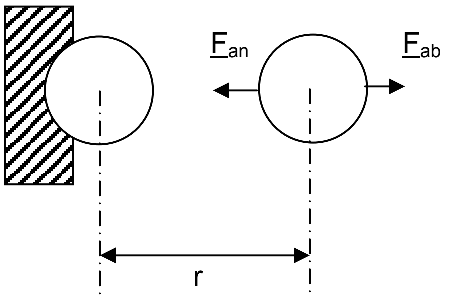
Lernziele: Werkstoffe und Fertigung I, Kap. 5, Kap. 6

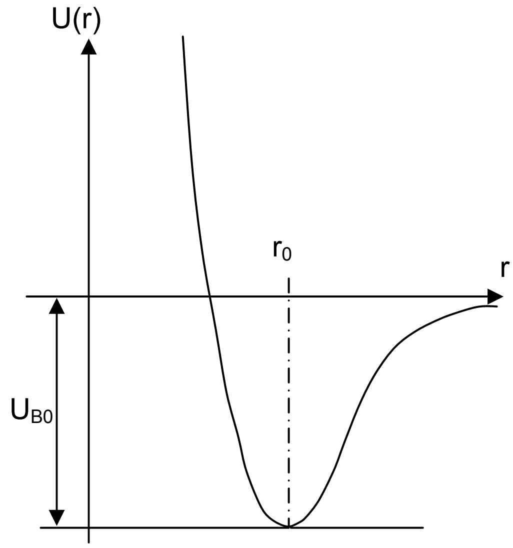
Kerninformationen

1. Bindungsenergie

Potential U(r) der anziehenden und abstossenden Kräfte zwischen zwei Atomen.

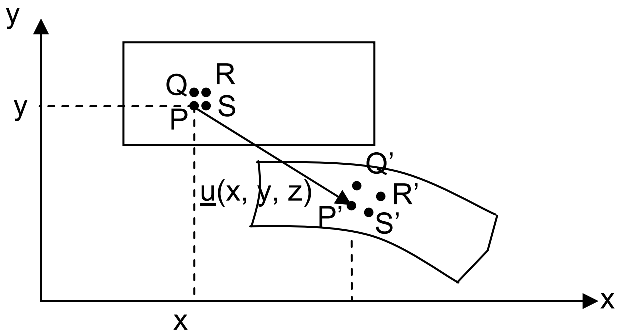
- Grosse Bindungsenergie U_{B0} bedeutet hohe Schmelztemperatur.
- Kleiner Krümmungsradius der Potentialkurve im Minimum bedeutet hohen E-Modul.
- r_0 ist der Gleichgewichts-Atomabstand (davon abhängig die Gitterkonstanten "Kantenlänge der Elementarzelle")





2. Dehnung und Scherung aus Verschiebungsänderung

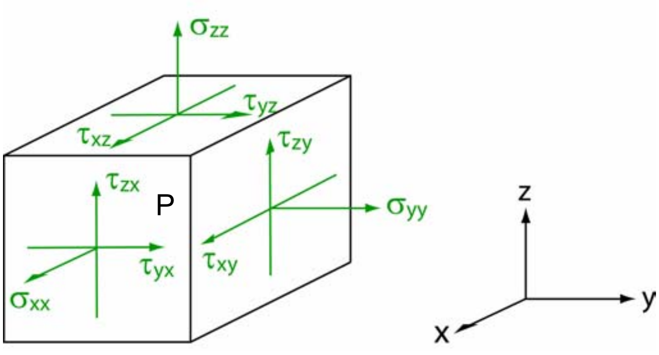
Wenn ein Körper bewegt und belastet wird, lässt sich seine Lage am Ende des Vorganges (oder zu einem bestimmten Zeitpunkt) durch ein Vektorfeld $\underline{u}$ darstellen. Der Vektor $\underline{u}$(x, y, z) zeigt vom Punkt P in (x, y, z) des unverschobenen, unbelasteten Körpers zum Punkt P', der neuen Lage von P. Indem man die Verschiebung von Nachbarpunkten Q, R, S nach Q', R', S' betrachtet, kann man Dehnungen und Scherungen berechnen, welchen der Körper in P' unterworfen ist.

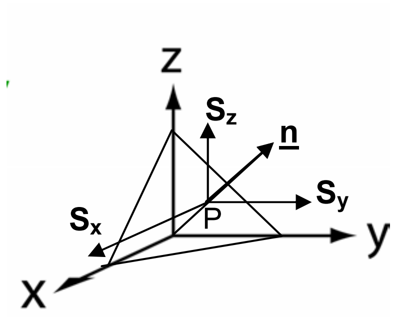


$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}$$

3. Elastizität, Spannungstensor

Durch Freischneiden eines Körpers kann man die inneren Kräfte „sichtbar" machen. Diese sind i.a. über den Querschnitt verteilt und unterschiedlich, je nach Lage innerhalb des Schnittes und natürlich auch je nach Lage des Schnittes im Körper. Da an einem sehr kleinen Flächenelement auch nur sehr kleine Kräfte angreifen, dividiert man diese Kräfte durch die Flächen und erhält Spannungen. Man unterscheidet Normalspannungen σ (Zug oder Druck), welche senkrecht auf einem betrachteten Flächenelement stehen, und Schubspannungen τ, die tangential am Flächenelement wirken.



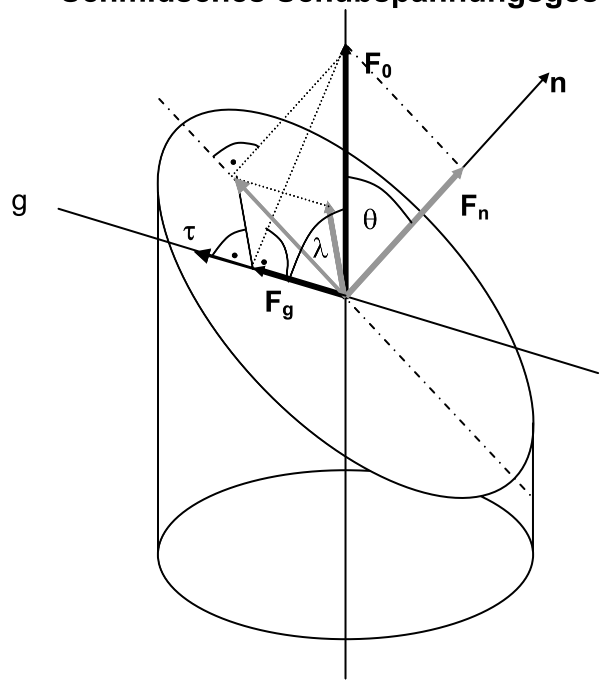


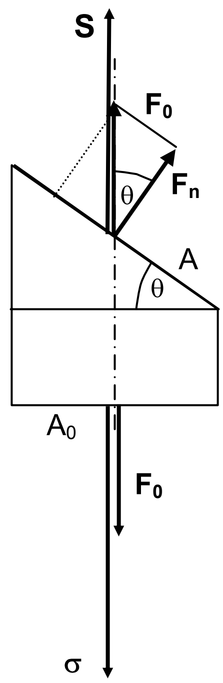
Wenn man die Spannungen an einem Flächenelement der Schnittfläche kennt, genügt das nicht, Aussagen über Spannungen im selben Punkt P zu machen, wenn der Schnitt in anderer Richtung durch P geführt worden wäre. Es braucht zum Beispiel die Kenntnis der Spannungen an den Seitenflächen eines Elementarwürfels, der an der betrachteten Stelle aus dem Körper geschnitten wurde (Bild links). Diese Spannungen bilden den sogenannten **Spannungstensor** $\underline{\underline{T}}$.

$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Aus ihm erhält man durch Multiplikation mit dem Flächennormaleneinheitsvektor $\underline{n}$ eines interessierenden Flächenelementes (ebenfalls durch den Punkt P geschnitten) den Spannungsvektor $\underline{S}$ an diesem Element, mit den Komponenten von $\underline{S}$ im Koordinatensystem des Würfels: $\underline{S} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n}$

4. Schmidsches Schubspannungsgesetz.





Wenn ein mit der Kraft $\underline{F}_0$ unter Zug belasteter Körper schräg zu der Kraftrichtung geschnitten wird und in dieser Schnittfläche A ein Richtungsvektor $\underline{g}$ definiert ist, dann gibt das Schmidsche Schubspannungsgesetz die Spannungskomponente τ an, welche an der Fläche A in Richtung $\underline{g}$ wirkt, ausgedrückt durch die Zugspannung σ, das ist die auf den Querschnitt A_0 senkrecht zur Achse bezogene Zugkraft F_0, durch den Winkel λ zwischen der Kraft $\underline{F}_0$ und dem Richtungsvektor $\underline{g}$ und den Winkel θ zwischen der Kraft $\underline{F}_0$ und der Flächennormalen $\underline{n}$ von A.

$$\tau = \sigma \cdot \cos\lambda \cdot \cos\theta \qquad \text{mit} \qquad \sigma = \frac{F}{A_0}$$

- Die gleiche Information wäre auch aus dem Spannungstensor zu gewinnen.
- Nebst der Grundform für einachsige Spannung können auch mehrere lineare Spannungszustände überlagert werden.

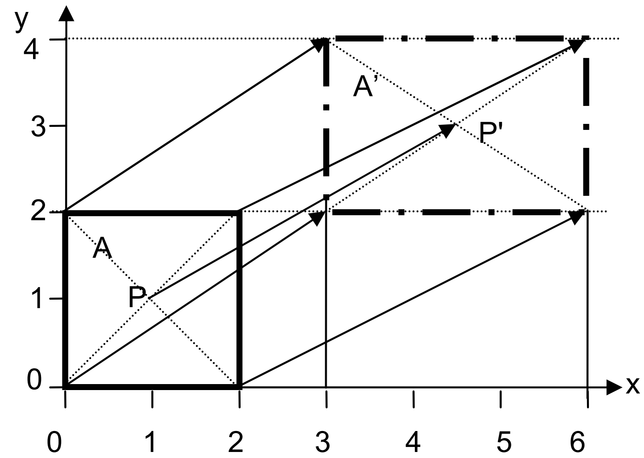
1 Dehnung und Scherung aus Verschiebungsänderung

Gegeben ist eine quadratische Platte A mit der Kantenlänge b. Sie wird einer Belastung unterworfen, welche die Platte in die Position A' verschiebt bzw. deformiert.

a) Zeichnen Sie die Verschiebungsvektor $\underline{u}$ für die Eckpunkte und einen beliebigen Punkt (x, y) ein.
b) Geben Sie die obigen Verschiebungsvektoren $\underline{u}$ als Funktionen von x und y an.
c) Berechnen Sie Dehnungen $\varepsilon_{..}$ und Scherungen $\gamma_{..}$ aus diesen Verschiebungen.

Lösung

a) *Verschiebungsvektoren. Grundsätzlich ist man frei, einen beliebigen Punkt (x, y) mit einem beliebigen anderen Punkt (x', y') zu verbinden. Im Hinblick auf Teilaufgabe b) wird damit noch zugewartet.*



b) *Gesucht wird eine möglichst einfache Abbildung.*
Mit den Ansätzen $u_x(x, y) = a+b*x+c*y$; $u_y(x, y) = d+e*x+f*y$
und der Zuordnung der Eckpunkte findet man:

$u_x(x, y) = 3+0.5*x$; $u_y(x, y) = 2$

Es wird nun als zusätzlicher Punkt P (x=1, y=1) gewählt. Er wird um $\underline{u}$ = (3.5, 2) nach P' (4.5, 3) verschoben.

c)

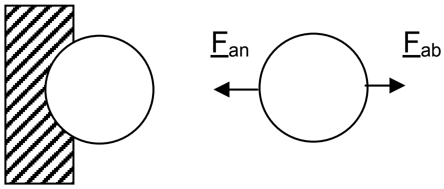
$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} = 0.5;\ \varepsilon_{yy} = \frac{du_y}{dy} = 0;\ \gamma_{xy} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} = 0;\ ...$$

Die Dehnungen und Scherungen sind überall im Körper gleich gross bzw. null.

2 Bindungsenergie

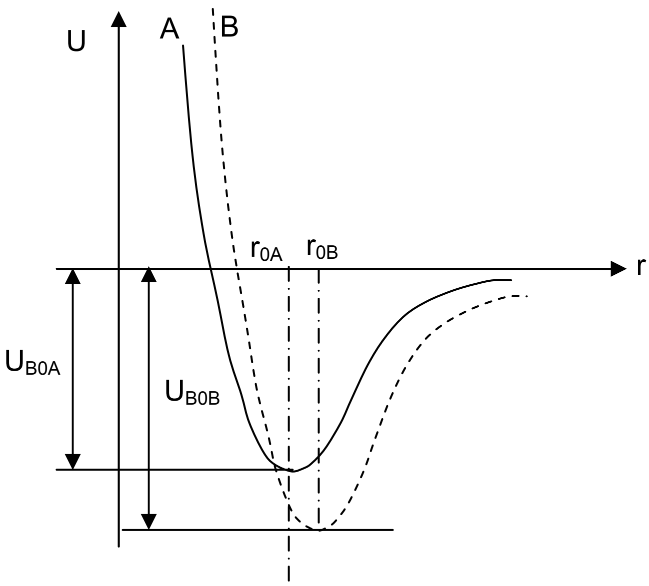
Zeichnen Sie qualitativ den U(r)-Verlauf des Potentials U(r) der Resultierenden der anziehenden und abstossenden Kräfte zwischen zwei Atomen für zwei Werkstoffe gleichen Gittertyps, aber mit unterschiedlichen Gitterkonstanten und unterschiedlichen Schmelztemperaturen

$a_{0A} < a_{0B}$; $T_{SA} < T_{SB}$



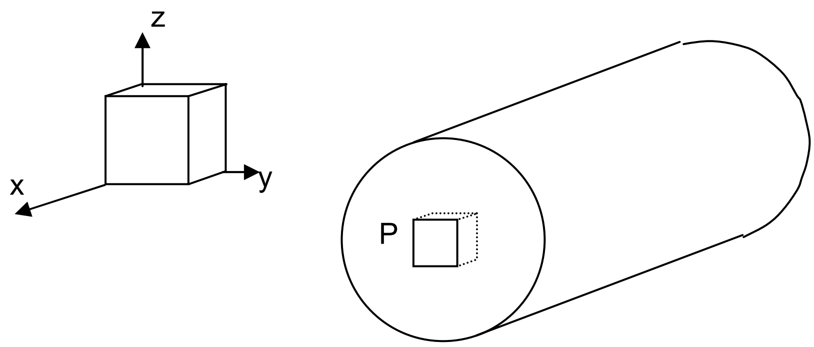
Lösung

- *Je grösser die Bindungsenergie U_{B0}, desto grösser die Schmelztemperatur.*
- *Das Potentialminimum liegt beim Gleichgewichtsabstand r_0 zweier Atome. Dieser ist proportional zu der Gitterkonstanten.*



3 Elastizität, Spannungstensor

Sie schneiden einen zylindrischen Körper senkrecht zu seiner Achse. Sie legen ein Koordinatensystem in den Punkt P und isolieren einen Elementarwürfel, an welchem Sie folgende Spannungen feststellen:

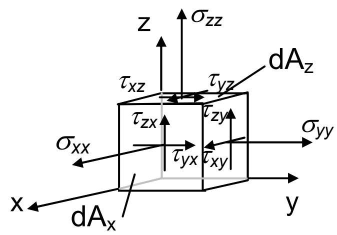


σ_{xx} = 100 N/mm^2
σ_{yy} = 0 N/mm^2
σ_{zz} = -100 N/mm^2

τ_{xy} (= τ_{yx}) = 100 N/mm^2
τ_{zx} = 0 N/mm^2
τ_{zy} = 0 N/mm^2

a) Geben Sie den Spannungstensor T für den Punkt P an.
b) Berechnen Sie mit dem Spannungstensor T die Spannungen an einem Flächenelement durch Punkt P mit dem Normalenvektor (101), gemessen im definierten Koordinatensystem.

Lösung:



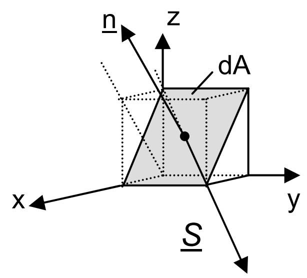
Der Spannungstensor ist (Werte in N/mm^2)

$\underline{T}$ =

$\sigma_{xx} = 100$	$\tau_{xy} = 100$	$\tau_{xz} = 0$
$\tau_{yx} = 100$	$\sigma_{yy} = 0$	$\tau_{yz} = 0$
$\tau_{zx} = 0$	$\tau_{z} = 0$	$\sigma_{zz} = -100$

(Nach dem Satz über die zugeordneten Schubspannungskomponenten gilt $\tau_{xy}=\tau_{yx}$,...)

Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$ am Flächenelement, im x, y, z-System:



$$\underline{n} = \frac{\underline{N}}{|\underline{N}|} = \frac{(1{,}0{,}1)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, 0,\, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (0.707,\, 0,\, 0.707)$$

Der Spannungsvektor $\underline{S}$ am Flächenelement mit dem Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$ bzw. seine Komponenten in x, y, z-Richtung betragen:

$\underline{S} = \underline{T} \cdot \underline{n}$ *[N/mm^2]*

$$S_x = \sigma_{xx} \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z = 100 \cdot 0.707 + 100 \cdot 0 + 0 \cdot 0.707 = 70.7$$
$$S_y = \tau_{yx} \cdot n_x + \sigma_{yy} \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z = 100 \cdot 0.707 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.707 = 70.7$$
$$S_z = \tau_{zx} \cdot n_x + \tau_{zy} \cdot n_y + \sigma_{zz} \cdot n_z = 0 \cdot 0.707 + 0 \cdot 0 - 100 \cdot 0.707 = -70.7$$

Somit $\underline{S} = (70.7,\, 70.7,\, -70.7)$

4 Schmidsches Schubspannungsgesetz

In einem Körper ist ein kubisches Koordinatensystem definiert. An einem $(0\ 1\ 0)$- Flächenelement wirkt eine reine Zugspannung σ von 200 MPa. Die Flächen $(1\ 0\ 0)$ und $(0\ 0\ 1)$ sind spannungsfrei.

- Wie gross ist die Schubspannung an einer $(1\ \bar{1}\ 1)$-Fläche in Richtung $g = [0\ 1\ 1]$?

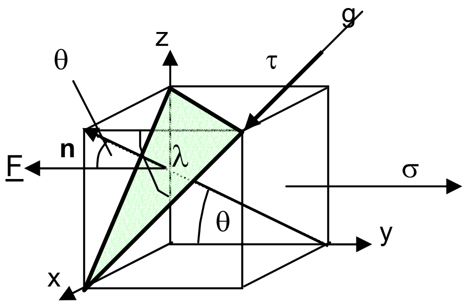
Lösung:

λ *= Winkel zwischen der Kraft F an der* $(1\ \bar{1}\ 1)$*-Fläche und g.*

θ *= Winkel zwischen der Kraft an der* $(1\ \bar{1}\ 1)$*-Fläche und n.*

Die Winkel werden zwischen geeignet gelegenen Parallelen zu den interessierenden Richtungen gemessen.

Aus der Figur herausgelesen: $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}; \quad \cos\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$$\tau = \sigma \cdot \cos\lambda \cdot \cos\theta = 200\ MPa \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 200 \cdot 0.408$$

$$\tau = 81.6\ MPa = 81.6\ N/mm^2$$

Alternativ können auch Skalarprodukte zwischen F und n bzw. F und g gebildet werden.