Werkstoffe und Fertigung I
Prof.Dr. K. Wegener

Wintersemester 2006/07

Name	
Vorname	

Übung 1
Zugstab, Idealstruktur

Musterlösung

Ausgabe: 27.10.2006

Abgabe: 03.11.2006

Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigung, ETH Zentrum

Übungsassistenz: Willi Müller, CLA F21.1, wm@iwf.mavt.ethz.ch

WF Übung 1: Zugstab, Idealstruktur 27.10./ 03.11.2006

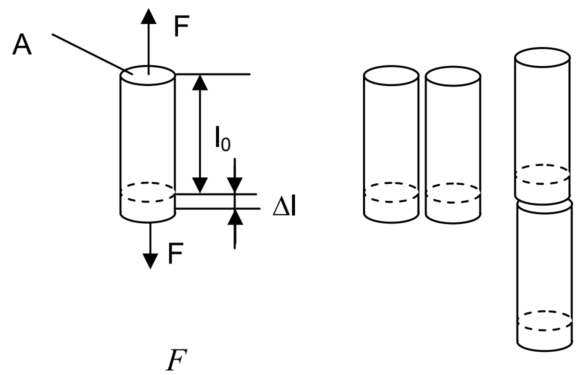
Lernziele

Werkstoffe und Fertigung I, Kap. 0, Lernziele 4,5,7; Kap. 1, Lernziele 1–5

Kerninformationen

Spannung und Dehnung

Ein Werkstoff unter Krafteinfluss
deformiert sich.
Man führt spezifische Grössen ein, um
von der Bauteilgeometrie unabhängig zu werden.



Am Beispiel des Zugstabes:

Zugspannung σ = Kraft F pro Querschnittsfläche A $\quad \sigma = \frac{F}{A}$

Dehnung ε = Verlängerung Δl pro ursprüngliche Länge l_0 $\quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Das sind lineare Zusammenhänge: Doppelt so grosse Fläche bei gleicher Spannung heisst doppelt so grosse Kraft (z.B. zwei Stäbe parallel). Doppelt so grosse Länge bei gleicher Spannung heisst gleiche Dehnung, aber doppelt so grosse Verlängerung (zum Beispiel zwei Stäbe in Serie).

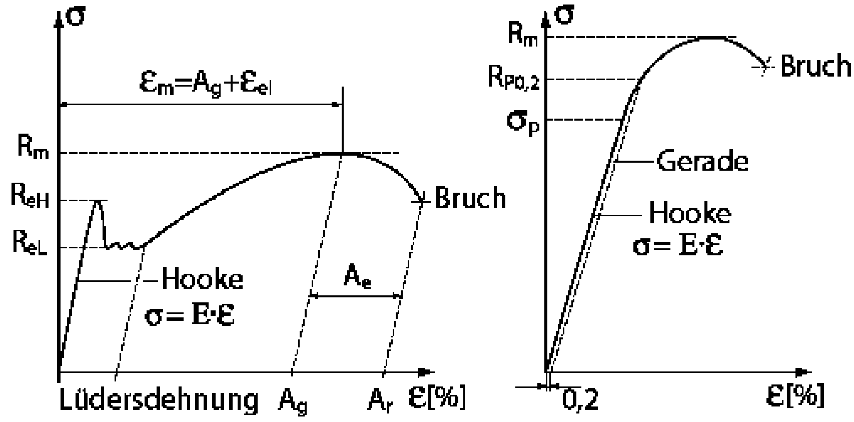
Zusammenhang Spannung → Dehnung
Wie stark sich ein Werkstoff unter Zugspannungseinfluss dehnt, hängt vom Material und seinem Zustand, z.B. Temperatur ab.

Für viele Materialien besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Belastung und Dehnung: Doppelt so grosse Belastung heisst doppelt so grosse Dehnung. Dieser Zusammenhang heisst **Hooksches Gesetz** und gilt bis zu einem gewissen Grenzmass der Spannung, der Proportionalitätsgrenze σ_P.

Hookesches Gesetz $\quad \sigma = E \cdot \varepsilon$

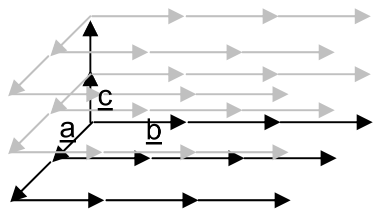
Der Proportionalitätsfaktor **E** heisst **Elastizitätsmodul** oder E-Modul. (Er entspricht der Spannung, die nötig wäre, um den Stab auf die doppelte Länge zu ziehen. Die meisten Materialien brechen lang vor Erreichen dieses Wertes).
Es sind beide Fragestellungen möglich: Man belastet einen Stab mit der Spannung σ und misst, wie stark er sich dehnt, oder man unterwirft den Stab einer Dehnung ε und misst die entstehende Spannung.
Bei Spannungen höher als die Proportionalitätsgrenze gilt das Hookesche Gesetz nicht mehr, die Dehnung wächst überproportional zur Spannung. Bei Entlastung zieht sich der Stab wieder zusammen, aber nur um den elastischen Anteil, es bleibt eine Restdehnung bestehen. Als Grenzspannung, ab welcher plastische Dehnung auftritt, wird bei kontinuierlichem Spannungs-Dehnungs-Verlauf technisch die Spannung $R_{P0.2}$ definiert, bei welcher nach Entlastung 0.2% bleibende Dehnung vorliegen, oder bei ausgeprägtem Spannungsabfall im Spannungs-Dehnungs-Verlauf die Streckgrenze R_{EH}. Lüdersdehnung ist der Dehnungsbereich etwa

konstanter Spannung nach Erreichen der Streckgrenze bis die Spannung beginnt, weiter anzusteigen.



Spannungsumrechnung
1 Pa = 1 N/m^2
1MPa =10^6 Pa = 10^6 N/m^2 = 10^6 N/m^2 10^{-6} m^2/mm^2 = 1 N/mm^2
(MPa: Megapascal, N: Newton, kN: Kilonewton)

Kristallzustand der Materie

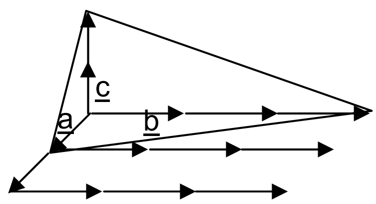


Durch Addition der ganzahligen Vielfachen der Basisvektoren a, b, c:
h a + j b + k c wird ein Gitter definiert.
Ein Gitterpunkt P wird durch den vom Nullpunkt ausgehenden zu ihm führenden Vektor bestimmt:
r = u a +v b + w c

Die Beträge a, b, c sind die Gitterkonstanten, wie auch die Zwischenwinkel α (zwischen b und c), β, γ. u, v, w sind die Koordinaten des Punktes P.

Gittergeraden gehen durch zwei Punkte A, B des Gitters.
Beispielsweise wird A als Nullpunkt angenommen und von da aus gezählt, wieviele a, b, c zurückgelegt werden müssen, um zu B zu gelangen, Angabe [u v w] , z.B. $[1\bar{2}5]$, der Überstrich bedeutet „minus“, entgegen der Pfeilrichtung.
Das gleiche Resultat erhält man durch Bilden der Differenz r_B-r_A.

Gitterebenen werden durch die Millerschen Indizes angegeben:



Die Achsabschnitte werden gemessen, die reziproken Werte daraus gebildet und davon das kleinste ganzzahlige Vielfache angegeben:
Achsabschnitte: 1, 3, 2; reziproke Werte: 1, 1/3, ½, erweitern mit 6:
Millersche Indizes: (6 2 3).
Wenn die Ebene durch den Nullpunkt geht, muss kurzzeitig ein anderer Gitterpunkt als Nullpunkt angenommen werden.
Bei kubischen Gittern geben die Millerschen Indizes die Komponenten des Normalenvektors auf die Ebene an.
Koordinationszahl: Anzahl der nächsten Nachbarn eines Atoms.
Packungsdichte: Die Atome werden als Kugeln aufgefasst, die so gross sind, dass sie sich berühren, aber nicht überschneiden. Die Packungsdichte ist das Kugelvolumen, das sich innerhalb der Elementarzelle befindet, dividiert durch das Volumen der Elementarzelle.
Benennung einer Textur: Angabe von Walzebene und Walzrichtung im Koordinatensystem der Elementarzelle in Idealer Lage, d.h. der am häufigsten vorkommenden Lage.

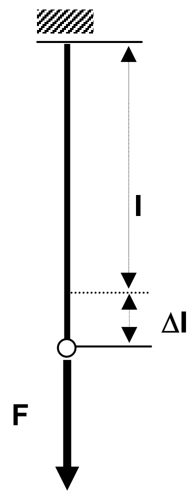
1 Spannung und Dehnung

Gegeben ist ein Stab mit folgenden Daten:

Länge l_0:	1 m
Rundstab, Durchmesser d_B:	20 mm
Material:	S 235 JR G2
Zugfestigkeit R_m:	370 N/mm^2
Streckgrenze R_e:	235 N/mm^2
Elastizitätsmodul E:	$211 \cdot 10^3$ N/mm^2
Dichte ρ:	$7.8 \cdot 10^3$ kg/m^3

Fragen

a) Bei welcher Last F_S beginnt sich der Stab plastisch zu deformieren?
b) Bei welcher Last F_B ist der Bruch des Stabes zu erwarten?
c) Wie gross sind bei F_S die elastische Dehnung ε_{el} und die Verlängerung Δl des Stabes?
d) Wie lang darf der senkrecht hängende Stab gemacht werden, dass er unter seiner Eigenlast gerade bricht. Diese Länge heisst Reisslänge.



Lösung

a) Beginn der plastischen Deformation:

$$\sigma = R_e; \quad \sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F_S = R_e \cdot A = 235\,N/mm^2 \cdot 314.16\,mm^2 = \underline{\underline{73.8\,kN}}$$

mit Querschnitt des Stabes $\quad A = d_A^2\ \pi/4 = 20^2 \cdot \pi/4 = 314.16\ mm^2$

b) Bruchkraft:

$$\sigma = R_m; \quad \sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow F_B = R_m \cdot A = 370\,N/mm^2 \cdot 314.16\,mm^2 = \underline{\underline{116\,kN}}$$

c) Elastische Dehnung ε_{el} und Verlängerung Δl des Stabes bei F_S :

Die Dehnung berechnet sich mit dem Hookeschen Gesetz aus der Zugspannung und dem Elastizitätsmodul: Die Spannung entspricht der Streckgrenze:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{R_e}{E} = \frac{235 N/mm^2}{211 \cdot 10^3 N/mm^2} = 0.001114\ [1] = 0.1114\,\%$$

Die Verlängerung eines Stabes berechnet sich aus seiner Dehnung multipliziert mit seiner Länge:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = 0.001114 \cdot 1m = 1.11\ mm$$

d) An der Bruchgrenze entspricht die Eigenlast F_E der Bruchkraft F_B . Die Eigenlast F_E ist Masse mal Erdbeschleunigung („spezifische Erdanziehungskraft“), die Masse ist Volumen mal Dichte ρ.

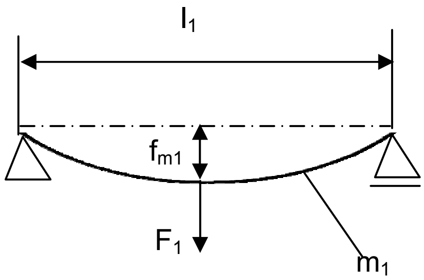
$$F_B = F_E = \rho \cdot g \cdot A \cdot l \Rightarrow l = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{F_B}{A} = \frac{1}{\rho \cdot g} \cdot R_m = \frac{1}{7.8 \cdot 10^3\, kg/m^3 \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} \cdot R_m$$

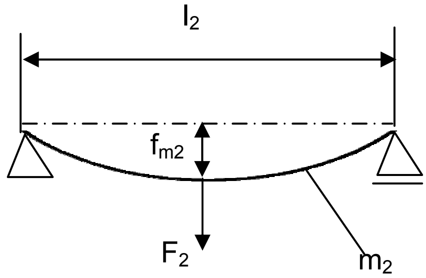
$$\underline{\underline{l}} = \frac{370 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}{76518 \frac{\frac{kg \cdot m}{s^2}}{m^3}} = \frac{370 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}{76518 \frac{1}{m} \cdot \frac{N}{m^2}} = \underline{\underline{4835m}}$$

$$10^6 \frac{N}{m^2} = 1 \frac{N}{mm^2} = 1MPa$$

2 Durchbiegung

Zwei horizontale Stäbe von rundem Vollquerschnitt und der gleichen Länge $l_1 = l_2$ und Masse $m_1 = m_2$ sind beidseitig aufgelegt. Stab 1 besteht aus Aluminium, Stab 2 aus Stahl. Sie werden in der Mitte je mit der Kraft F senkrecht belastet. Wie verhalten sich die Durchbiegungen f_{m1}/f_{m2} in Stabmitte? Die Eigenlast sei vernachlässigbar.





Gegeben sind

die Formel für die Durchbiegung f_m in Stabmitte

lautet: $f_m = \dfrac{F \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I_y}$ wobei $I_y = \dfrac{\pi \cdot d^4}{64}$ und die Masse $m = \rho \cdot d^2 \cdot \dfrac{\pi}{4} \cdot l$

$E_{Al} = 7 \cdot 10^4 N/mm^2$ $\qquad E_{St} = 21 \cdot 10^4 N/mm^2$

$\rho_{Al} = 2.7 \cdot 10^3 kg/m^3$ $\qquad \rho_{St} = 7.8 \cdot 10^3 kg/m^3$

Lösung

$$m = \rho \cdot d^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l \Rightarrow d^2 = \frac{m}{\rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l} \qquad I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi}{64} \cdot \left(\frac{m}{\rho \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l} \right)^2$$

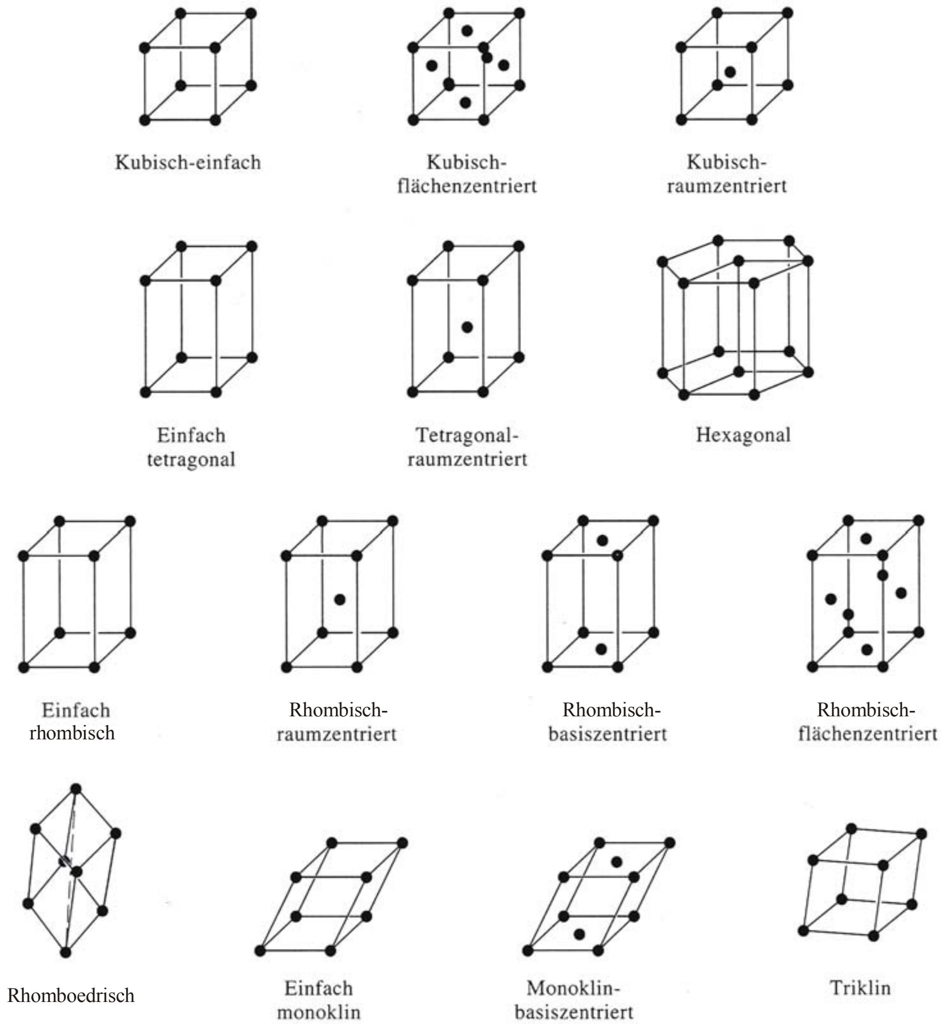
$$\frac{f_{m1}}{f_{m2}} = \frac{\dfrac{F_1 \cdot l_1^3}{48 \cdot E_1} \cdot \dfrac{64}{\pi} \cdot \left(\dfrac{\rho_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l_1}{m_1} \right)^2}{\dfrac{F_2 \cdot l_2^3}{48 \cdot E_2} \cdot \dfrac{64}{\pi} \cdot \left(\dfrac{\rho_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l_2}{m_2} \right)^2} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{f_{Al}}{f_{St}} = \frac{21 \cdot 10^4}{7 \cdot 10^4} \cdot \left(\frac{2.7}{7.8} \right)^2 = 0.359}}$$

Anmerkung Durchmesserverhältnis:

$$m = \rho \cdot d^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l \qquad \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{\dfrac{m_1}{\rho_1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l_1}}{\dfrac{m_2}{\rho_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot l_2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d_{Al}}{d_{St}} = \sqrt{\frac{\rho_{St}}{\rho_{Al}}} = \sqrt{\frac{7.8 \ g/cm^3}{2.7 \ g/cm^3}} = \sqrt{2.89} = 1.70$$

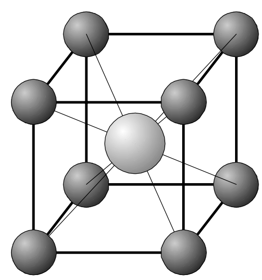
3 Bravais-Gitter

Bravais zeigte 1850, dass sich aufgrund der Symmetrien aus den 7 Kristallsystemen lediglich 14 Typen von Translationsgittern (sog. Bravais-Gitter, s. Abbildung) bilden lassen. Die Punkte in der Darstellung repräsentieren dabei nicht etwa *Atompositionen*, sondern Punkte, die sich durch Translation ineinander überführen lassen, bzw. Punkte mit gleicher Umgebung.



[Q: Askeland]

a) Nebenstehend ist die Elementarzelle von Cäsiumchlorid (CsCl) abgebildet. Welcher Gittertyp ist es im Sinne von Bravais?

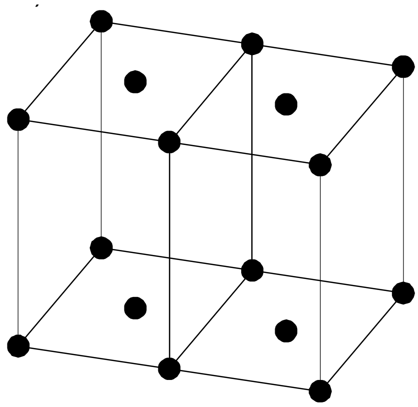


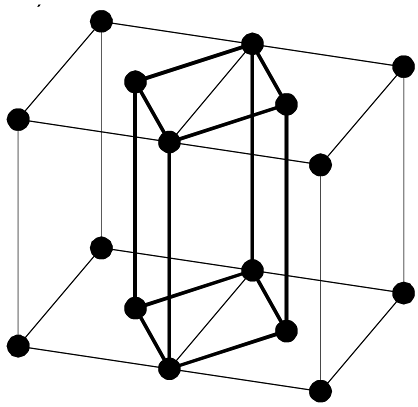
b) Einige denkbare Gittertypen erscheinen nicht in der Liste der Bravais-Gitter, weil sie sich auf bereits vorhandene Gittertypen zurückführen lassen. Durch welchen Gittertyp können Sie ein **‹tetragonal-basiszentriertes› Gitter** ersetzen?

Lösung:

a) Ein kubisch raumzentriertes Gitter nach Bravais lässt sich durch eine Verschiebung um $\frac{a_0}{2}[111]$ mit sich selbst zur Deckung bringen. Beim CsCl-Gitter ist dies nicht der Fall, da bei dieser Operation die beiden Ionen vertauscht würden. Die kleinste mögliche Translation ist a_0 [100], das Gitter somit kubisch primitiv.

b) Betrachten wir zwei Elementarzellen eines tetragonal-basiszentrierten Gitters. Die quadratischen Grundflächen weisen in ihrer Mitte je ein zusätzliches Atom auf (Abbildung links). Es ist nun möglich, mit zwei solchen Zentralatomen und zwei Eckatomen wiederum die quadratische Grundfläche eines neuen Gitters ohne Zentralatom zu bilden (Abbildung rechts, fette Linien). Ein tetragonal-basiszentriertes Gitter lässt sich also immer auf ein tetragonal einfaches zurückführen.





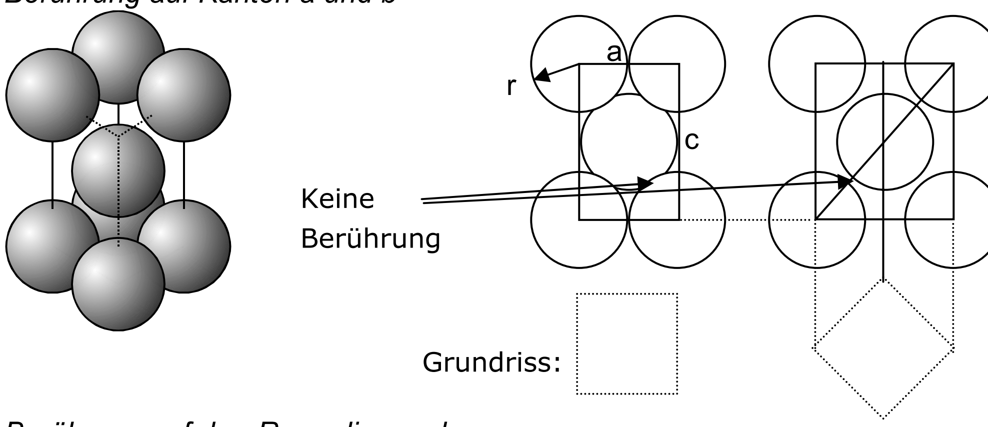
4 Packungsdichte von Indium

Indium weist ein tetragonal raumzentriertes Gitter auf mit den Gitterparametern **a = b = 325 pm** und **c = 495 pm**. Die Atome, als Kugeln aufgefasst, berühren sich mindestens an einer Stelle. Berechnen Sie die Packungsdichte.

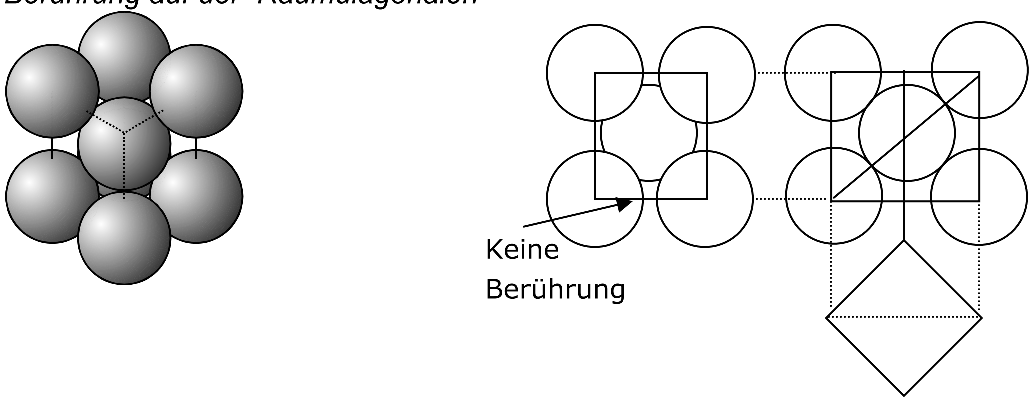
Lösung:
Atomradius als Funktion von a_0, c_0 :

Zwei Möglichkeiten, wie sich die Atome im Gitter berühren (wenn Gitterkonstanten gegeben sind, sind Zwischenräume zwischen Atomen möglich, Überschneidungen nicht):

Berührung auf Kanten a und b



Berührung auf der Raumdiagonalen



Zwei Lösungswege:
1) Annahme des Grenzfalles zwischen den beiden Möglichkeiten: Atome berühren sich auf den Kanten a, b ***und*** *den Raumdiagonalen. Berechnung des Verhältnisses c_0/a_0. Ist die gegebene Elementarzelle schlanker, d.h. c_0/a_0 grösser als im Grenzfall, liegt Berührung nur in a und b vor, wenn kleiner, nur auf den Raumdiagonalen (für $c_0 \geq a_0$).*

$$\Rightarrow a_0 = 2\,r \text{ und } RD = \sqrt{2a_0^2 + c_0^2} = 4\,r$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a_0^2 + c_0^2} = 2a_0 \Rightarrow \text{ Grenzverhältnis: } \frac{c_0}{a_0} = \sqrt{2} = 1.41$$

In der vorliegenden Aufgabe ist $\frac{c_0}{a_0} = \frac{495}{325} = 1.52$ *, also Berührung auf a und b*

$$\Rightarrow a_0 = 2 \cdot r\,, \quad r = \frac{a_0}{2} = \frac{325}{2} = 163\,pm$$

2) Man berechnet mit den gegebenen Werten für a_0, c_0 zwei Atomradien, r_1 für Berührung auf a, r_2 für Berührung auf der Raumdiagonalen:

$$r_1 = a_0/2 = 163 \text{ und } r_2 = RD/4 = \sqrt{2a_0^2 + c_0^2}\Big/4 = 169 \quad \Rightarrow \min(r_1, r_2)$$

Die Lösung ist der kleinere Radius r_1. Dies ergibt Berührung auf a und b und Zwischenräume auf der Raumdiagonalen. r_2 ergäbe Berührung auf der Raumdiagonalen und Überschneidung auf a und b.

$$\Rightarrow a_0 = 2 \cdot r\,, \quad r = \frac{a_0}{2} = 163\,pm$$

Totales Atomvolumen innerhalb der Elementarzelle, d.h. Volumen von $8 \cdot \frac{1}{8} + 1 = 2$ *Atomen*

$$V_A = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 3.628 \cdot 10^7 \ pm^3$$

Volumen der Elementarzelle: $V_E = a_0^2 \cdot c_0 = 5.23 \cdot 10^7\,pm^3$

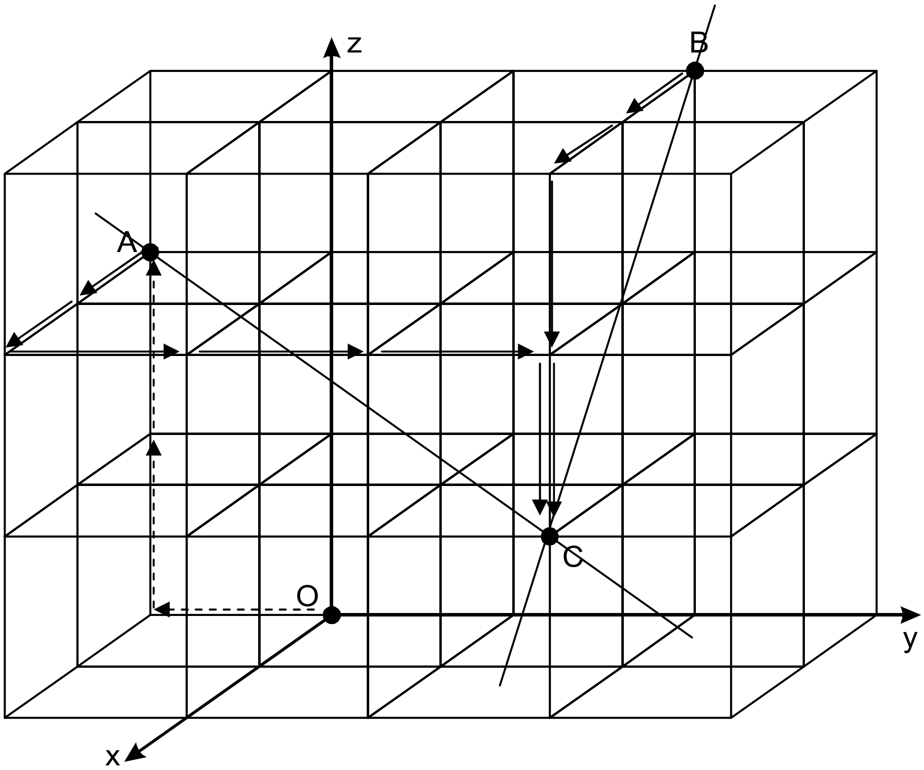
$\Rightarrow$ *Packungsdichte* $PD = \frac{3.628 \cdot 10^7}{5.23 \cdot 10^7} = 0.694$

5 Gitterpunkte und –geraden

Im untenstehenden kubischen Gitter sind die Punkte **A**, **B** und **C** gegeben.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte an.

b) Geben Sie die Koordinaten der Gittergeraden $\overline{\textbf{AC}}$ und $\overline{\textbf{BC}}$ an.



Lösung:

a) Koordinaten der Punkte A: 0, -1, 2; B: 0, 2, 3; C: 2, 2, 1

b) Koordinaten der Gittergeraden
A als Nullpunkt angenommen: $\overline{\textbf{AC}}$ *:* $\left(2\,3\,\bar{1}\right)$*,*
B als Nullpunkt angenommen: $\overline{\textbf{BC}}$*:* $\left(2\,0\,\bar{2}\right)$

Differenzbildung der Vektoren von $0 \rightarrow C;\ 0 \rightarrow A;$ *bzw.* $0 \rightarrow C;\ 0 \rightarrow B$ *:*
$\overline{\textbf{AC}}$ *:* $\underline{r}_C - \underline{r}_A = (221) - \left(0\bar{1}2\right) = \left(23\bar{1}\right)$*,*
$\overline{\textbf{BC}}$*:* $\underline{r}_C - \underline{r}_B = (221) - (023) = \left(20\bar{2}\right) \rightarrow \left(10\bar{1}\right)$

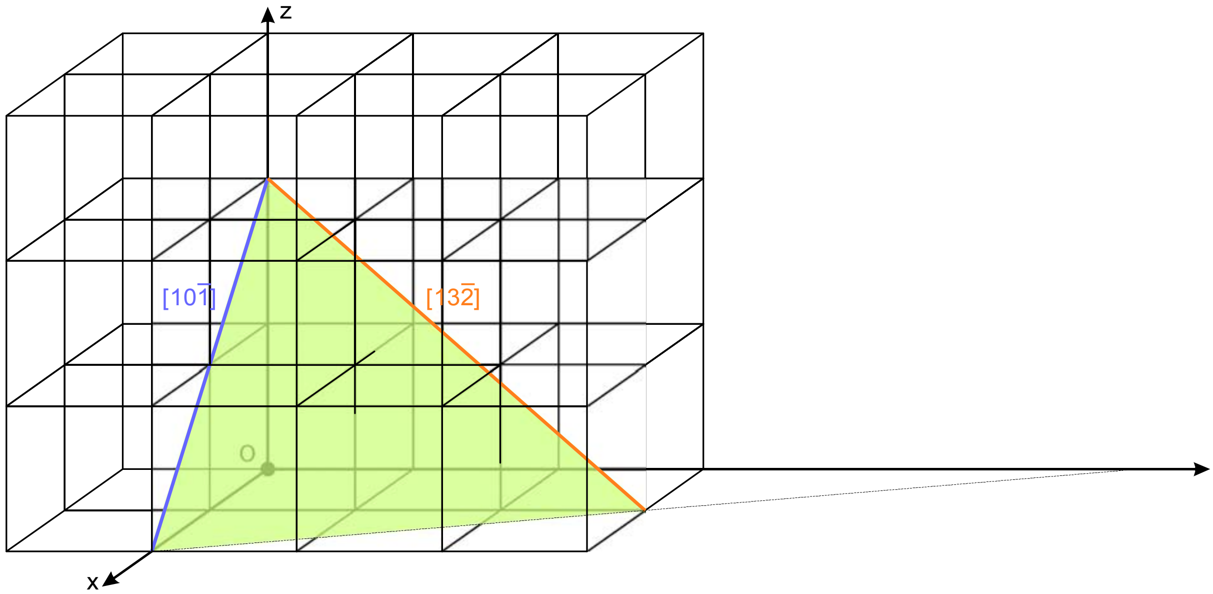
oder die Schritte von A nach C bzw. B nach C in Richtung der Koordinatenachsen abgezählt.

6 Gitterebenen

a) Zeichnen Sie die Geraden **[10$\bar{1}$]** und **[13$\bar{2}$]** sowie die von diesen Geraden aufgespannte Ebene in das gegebene kubische Gitter ein.

Lösung

a) *Zum Zeichen der Geraden wird der Punkt 0,0,2 im alten Koordinatensystem als neuer Nullpunkt angenommen:*



b) Millersche Indizes

1. Weg: Aus Achsenabschnitten. $a_x = 2$, $a_y = 6$, $a_z = 2$

⇒ *reziproke Werte: ½, 1/6, ½*

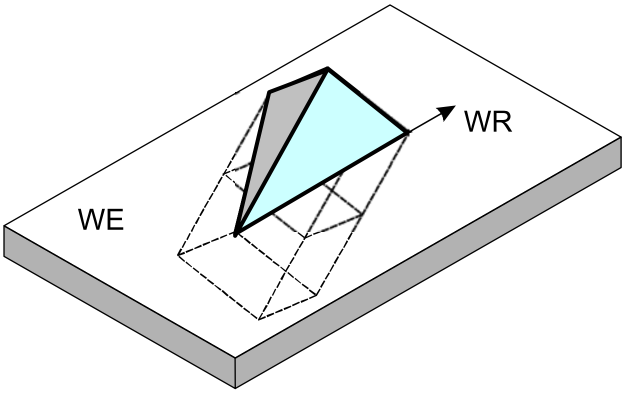
⇒ *kleinstes ganzzahliges Vielfaches: Ebene = (313).*

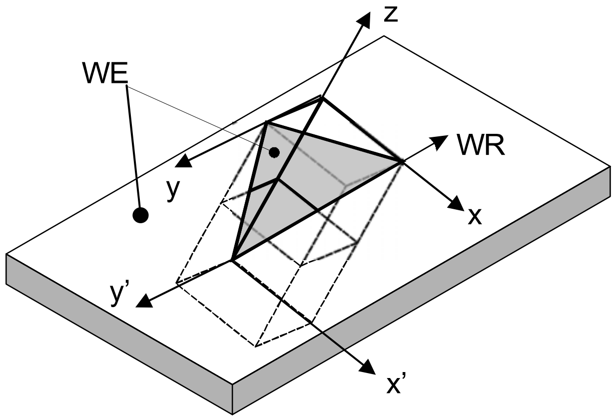
2. Weg: Vektorprodukt der beiden gegebenen Vektoren ergibt den Normalenvektor der Ebene. Dieser stimmt beim kubischen Gitter mit den Millerschen Indizes überein:

$$\{10\bar{1}\,] \times [13\bar{2}\,] = \begin{bmatrix}1\\0\\\bar{1}\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\3\\\bar{2}\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot\bar{2}-3\cdot\bar{1}\\ \bar{1}\cdot 1-\bar{2}\cdot 1\\ 1\cdot 3-1\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\3\end{bmatrix} = (3\,1\,3)$$

7 Textur

In der untenstehenden Skizze ist die ideale Lage zweier Elementarzellen in einem texturierten Blech gezeichnet.
Bezeichnen Sie diese Lage mit einer {hkl}⟨uvw⟩-Angabe.





Lösung:
(Linkes Bild zur Verdeutlichung. Zwei Elementarzellen ragen wie ein Eisberg partiell aus der Walzebene).
Die Walzebene und die Walzrichtung werden in einem Koordinatensystem der Elementarzelle in Idealer Lage dargestellt (oder eine in der Walzebene liegende Gitterebene bzw. eine mit der Walzrichtung übereinstimmende Gittergerade).

Walzebene: Millersche Indizes: Achsabschnitte $1,1,-2 \rightarrow 1,1,-\frac{1}{2} \rightarrow \ (22\bar{1})$

Die Walzrichtung lässt sich leichter im Koordinatensystem x', y', z bestimmen:
Walzrichtung: $[102]$

Texturbezeichnung mit genauen Ebenen- und Richtungsindizes: $(22\bar{1})[102]$

Meist werden für Walzebene und Walzrichtung je Familienbezeichnungen angegeben:
$\{221\}\langle 120\rangle$, *oft auch ohne Beachtung der Klammerkonvention:* $(221)[120]$