

Werkstoffe und Fertigung I
Prof.Dr. K. Wegener

Wintersemester 2006/07

Name	
Vorname	
Legi-Nr.	

Übung 6

Elastizität, Plastizität

Musterlösung

Ausgabe: 12.01.2007

Abgabe: 19.01.2007

Lernziele

Werkstoffe und Fertigung I, Kap. 5, Kap. 6

Kerninformationen

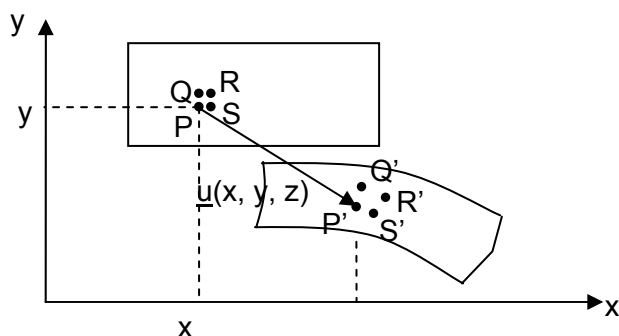
1. Elastizität, Spannungstensor

Durch Freischneiden eines Körpers kann man die inneren Kräfte „sichtbar“ machen. Diese sind i.a. über den Querschnitt verteilt und unterschiedlich, je nach Lage innerhalb des Schnittes und natürlich auch je nach Lage des Schnittes im Körper. Da an einem sehr kleinen Flächenelement auch nur sehr kleine Kräfte angreifen, dividiert man diese Kräfte durch die Flächen und erhält Spannungen. Man unterscheidet Normalspannungen (Zug oder Druck), welche senkrecht auf einem betrachteten Flächenelement stehen, und Schubspannungen, die tangential am Flächenelement wirken.

Wenn man die Spannungen an einem Flächenelement der Schnittfläche kennt, genügt das nicht, um Aussagen über Spannungen im selben Punkt zu machen, wenn der Schnitt in anderer Richtung durch denselben Punkt geführt worden wäre. Es braucht zum Beispiel die Kenntnis der Spannungen an den Seitenflächen eines Elementarwürfels, der an der betrachteten Stelle aus dem Körper geschnitten wurde. Diese Spannungen bilden den sogenannten **Spannungstensor**. Aus ihm erhält man durch Multiplikation mit dem Flächennormalenvektor eines interessierenden Flächenelementes die Spannungen an diesem Element

2. Dehnung und Scherung aus Verschiebungsänderung

Wenn ein Körper bewegt und belastet wird, lässt sich seine Lage am Ende des Vorganges (oder zu einem bestimmten Zeitpunkt) durch ein Vektorfeld $\underline{u}$ darstellen. Der Vektor $\underline{u}(x, y, z)$ zeigt vom Punkt P in (x, y, z) des unverschobenen, unbelasteten Körpers zum Punkt P', der neuen Lage von P. Indem man die Verschiebung von Nachbarpunkten Q, R, S nach Q', R', S' betrachtet, kann man Dehnungen und Scherungen berechnen, welchen der Körper in P unterworfen ist.



$$\epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx}; \quad \gamma_{xy} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx}$$

3. Schmid'sches Schubspannungsgesetz

Grundform für einachsige Spannung σ :

$$\tau = \sigma \cdot \cos\lambda \cdot \cos\theta$$

τ ist die Schubspannungskomponente in Richtung der Geraden g in der Ebene E , wenn die Richtung von σ mit der Ebenen-Normalen n den Winkel θ und mit g den Winkel λ einschliesst. (τ ist die Schubkraftkomponente bezogen auf die *schiefe Fläche*, σ die Zugkraft bezogen auf die *Stirnfläche*)

4. Erweitertes Schmid'sches Schubspannungsgesetz:

Mehrere einachsige Spannungszustände lassen sich überlagern. Die gemeinsame resultierende Schubspannung τ in einer bestimmten Richtung beträgt:

$$\tau = \sum_i \sigma_i \cdot \cos\lambda_i \cdot \cos\theta_i$$

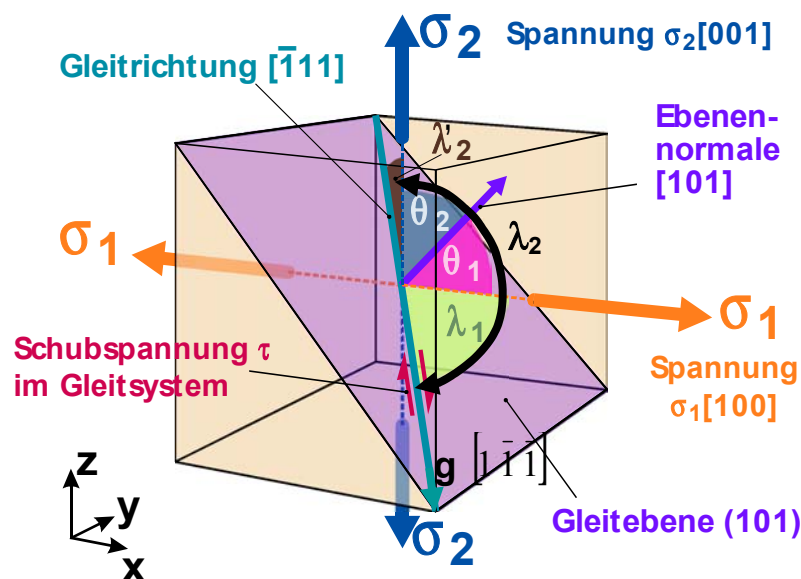
Für korrekte Addition der Schubspannungskomponenten Gleitrichtung als Vektor $\underline{g}$ auffassen, λ_i Winkel zwischen Spannungsvektor $\underline{\sigma}_i$ und $\underline{g}$

Bsp.:

Betrachtetes Gleitsystem: (101)[$\bar{1}11$]

Spannung σ_1 in Richtung [100], σ_2 in Richtung [001]

$$\tau = \sigma_1 \cos\lambda_1 \cos\theta_1 + \sigma_2 \cos\lambda_2 \cos\theta_2$$



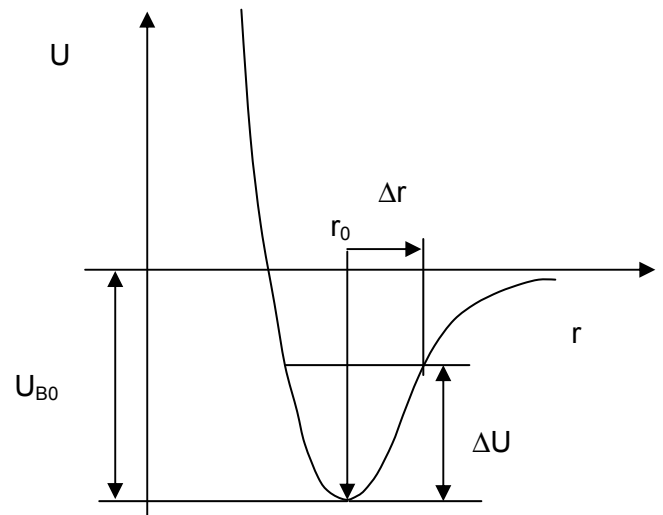
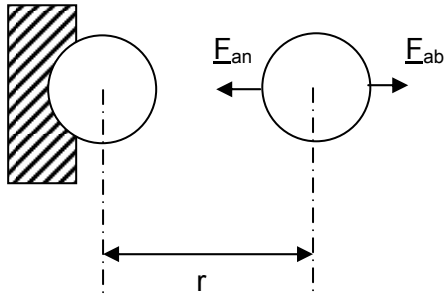
Mit dem Schmid'schen Schubspannungsgesetz kann beurteilt werden, ob ein bestimmter Spannungszustand zur plastischen Verformung eines Bauteiles führt.

$$\text{Fließbedingung: } \tau \geq \tau_{\text{krit}}$$

5. Bindungsenergie

Potential $U(r)$ der anziehenden und abstossenden Kräfte zwischen zwei Atomen.

- Grosse Bindungsenergie U_{B0} bedeutet hohe Schmelztemperatur.
- Kleiner Krümmungsradius der Potentialkurve im Minimum bedeutet hohen E-Modul.



1 Dehnung und Scherung aus Verschiebungsänderung

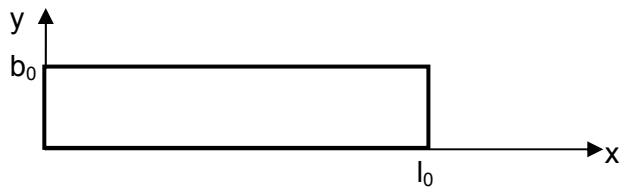
Gegeben ist ein Stab mit quadratischem Querschnitt der Länge l_0 und den Querabmessungen $b_0=c_0$. Er wird einer Belastung unterworfen, welche die Verschiebungen

$$u_x = k_1 \cdot x ; \quad u_y = k_2 \cdot y ; \quad u_z = k_3 \cdot z$$

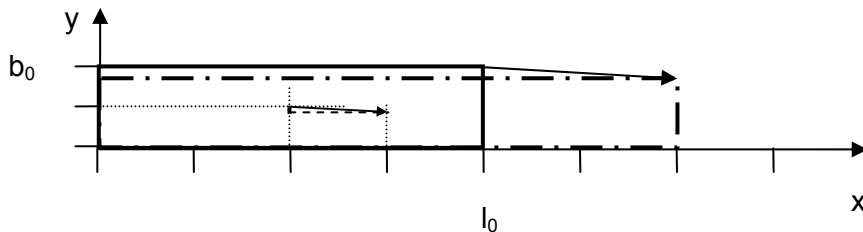
$$k_1 = 0.5 ; \quad k_2 = -0.15 ; \quad k_3 = -0.15$$

bewirkt.

- Zeichnen Sie den Verschiebungsvektor $\underline{u}\left(\frac{l_0}{2}, \frac{b_0}{2}, \dots\right)$ ein.
- Zeichnen Sie den deformierten Körper
- Berechnen Sie Dehnungen $\varepsilon_{..}$ und Scherungen $\gamma_{..}$ aus diesen Verschiebungen.
- Vergleichen Sie ε_{xx} mit ε_{yy} .



Lösung:



$$a) \text{ Verschiebungsvektor in } \left(\frac{l_0}{2}, \frac{b_0}{2}, 0\right): \underline{u}\left(\frac{l_0}{2}, \frac{b_0}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot \frac{l_0}{2} \\ -0.15 \cdot \frac{b_0}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \cdot l_0 \\ -0.075 \cdot b_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Zeichnen Sie den deformierten Körper. Als weiterer Punkt wird $(l_0, b_0, 0)$ abgebildet:

$$\underline{u}(l_0, b_0, 0) = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot l_0 \\ -0.15 \cdot b_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \cdot l_0 \\ -0.15 \cdot b_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

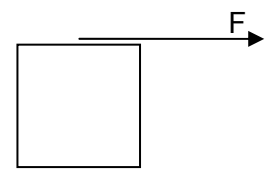
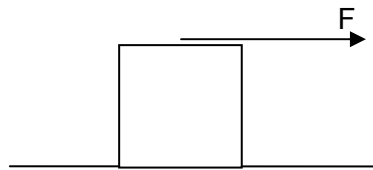
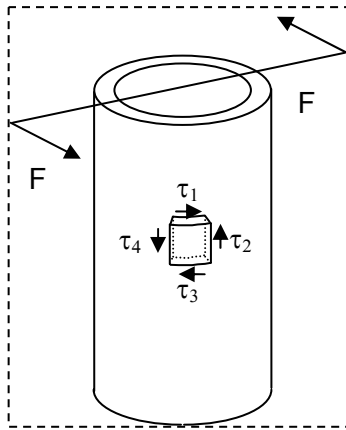
c) Dehnungen $\varepsilon_{..}$ und Scherungen $\gamma_{..}$ aus diesen Verschiebungen:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} = 0.5; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{du_y}{dy} = -0.15; \quad \tau_{xy} = \frac{du_x}{dy} + \frac{du_y}{dx} = 0; \quad \dots$$

$$d) \text{ Vergleichen Sie } \varepsilon_{xx} \text{ mit } \varepsilon_{yy}. \quad \frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{-0.15}{0.5} = -0.3$$

2 Schubspannungen

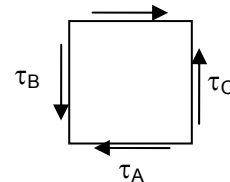
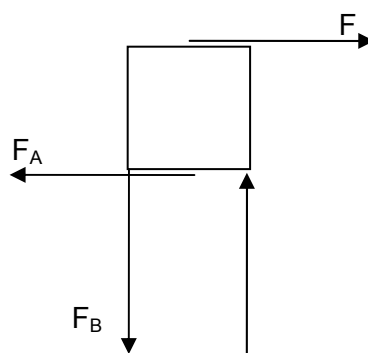
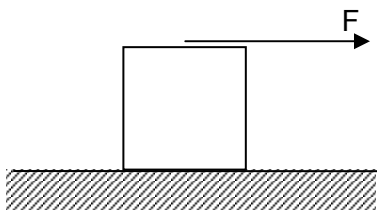
Durch Einleiten eines Drehmomentes in ein Rohr kann man in Flächenelementen wie in der Abbildung eingezeichnet einen Zustand reinen Schubes erzeugen. An kleinen Raumelementen gilt dabei: $\tau_1 = \tau_3$ und $\tau_2 = \tau_4$ (Kräftegleichgewicht in horizontaler und vertikaler Richtung. Das Gesetz von den zugeordneten Schubspannungen sagt zudem, dass $\tau_1 = \tau_2$, resultierendes Drehmoment der Schubkräfte muss Null sein).



Aufgabe

Ein Würfel der Kantenlänge a ist fest mit einer Unterlage verbunden. An der Oberseite des Würfels in Flächenmitte wirkt in horizontaler Richtung die Tangentialkraft F .

- Lösen Sie die Verbindung des Würfels mit der Unterlage. Beschreiben Sie, was passiert.
- Führen Sie nach Bedarf Kräfte an der Unterseite des Würfels ein, um ihn wieder ins Gleichgewicht zu bringen.
- Vergleichen Sie diesen Würfel mit dem Elementarwürfel, wie er zur Definition des Spannungstensors verwendet wurde.



Lösung:

- Der Würfel beschleunigt sich nach rechts und rotatorisch im Uhrzeigersinn.
- Kräfte gemäss Zeichnung, F_A verhindert Horizontalbewegung, F_B und F_C die Rotation.
- Die gleiche Stabilisierung wird erreicht, wenn die Vertikalkräfte statt an den Kanten der Würfelunterseite an seinen Seiten angreifen. Ein Elementarwürfel wird so klein gewählt, dass an einer seiner Flächen nicht unterschiedliche Spannungen angreifen können. F_B und F_C müssen also als Schubkräfte an den seitlichen Flächen angreifen oder bezogen auf die Würfelflächen als Schubspannungen τ_B bzw. τ_C , ebenso wie τ und τ_A .

3 Schubspannung

In einem kfz-Gitter beträgt die Schubspannung τ im $(1\bar{1}1)[011]$ -Gleitsystem 76 MPa.

- a) Wie gross ist die in $[010]$ -Richtung anliegende Normalspannung, aus der τ resultiert?
- b) Beeinflusst eine zusätzliche Normalspannung in $[100]$ -Richtung die Schubspannung? Weshalb / weshalb nicht?

Lösung:

a) Schmid'sches Schubspannungsgesetz $\tau = \sigma_i \cdot \cos\lambda_i \cdot \cos\theta_i$, nach σ aufgelöst:

$$\sigma = \frac{\tau}{\cos\lambda \cdot \cos\theta}$$

Der Winkel θ zwischen Spannungsvektor $\underline{s}$ und der Flächennormalen $\underline{N}$ findet sich in der kfz-Elementarzelle als der grössere Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck aus Seite a ,

Flächendiagonalen FD_1 und Raumdiagonalen RD : $\cos\theta = \frac{a}{RD} = \frac{a}{\sqrt{3} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Oder Skalarprodukt aus $\underline{N}$ und $\underline{s}$: $\cos\theta = \frac{\underline{N} \cdot \underline{s}}{|\underline{N}| \cdot |\underline{s}|} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \bar{1} & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \bar{1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Den Winkel λ zwischen Spannungsvektor $\underline{s}$ und der Gleitrichtung g findet man

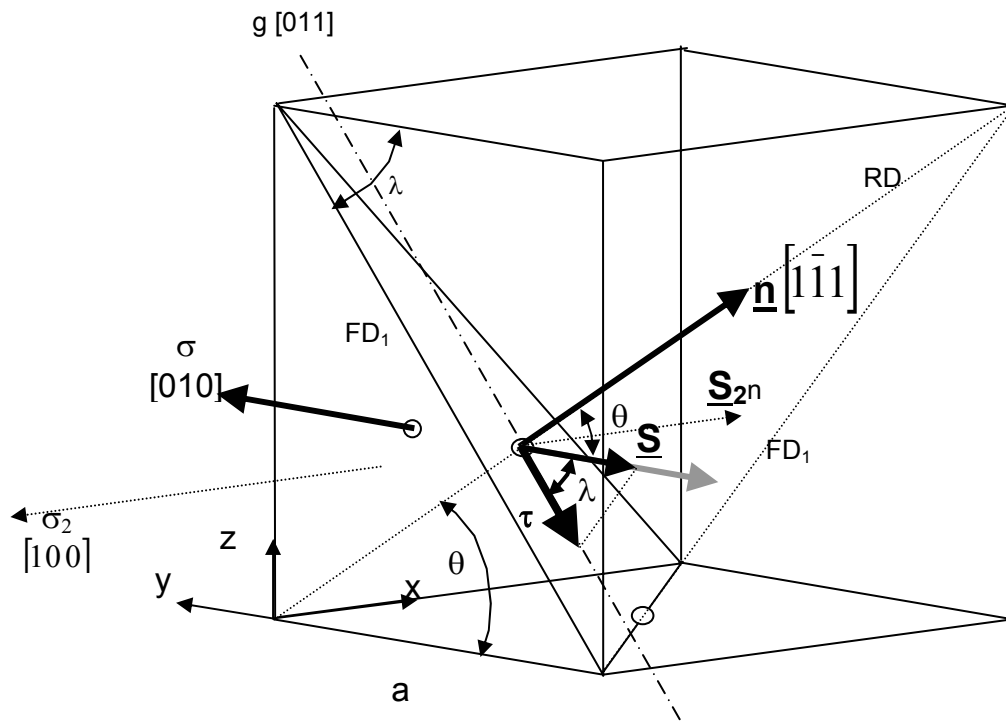
zwischen Kante a und Flächendiagonalen FD_2 : $\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Eingesetzt in Schmid'sches Schubspannungsgesetz:

$$|\sigma| = \frac{\tau}{\cos\lambda \cdot \cos\theta} = \frac{76}{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 76 \cdot \sqrt{6} = 186 \text{ MPa}$$

(Das Vorzeichen der Normalspannung ist nicht bestimmbar, da bei der Schubspannung immer der Betrag angegeben wird.)

b) Die Normalspannung σ_2 in $[100]$ -Richtung hat keinen Einfluss auf das gegebene Gleitsystem, da die durch sie bewirkte Spannung S_2 an der Ebene $(\bar{1}\bar{1}1)$ senkrecht zur Gleitrichtung $[011]$ steht. ($[011] \cdot [100] = 0$), $\cos\lambda_2 = 0$ und damit auch $\tau_2 = 0$.



4 Mehrachsiger Spannungszustand

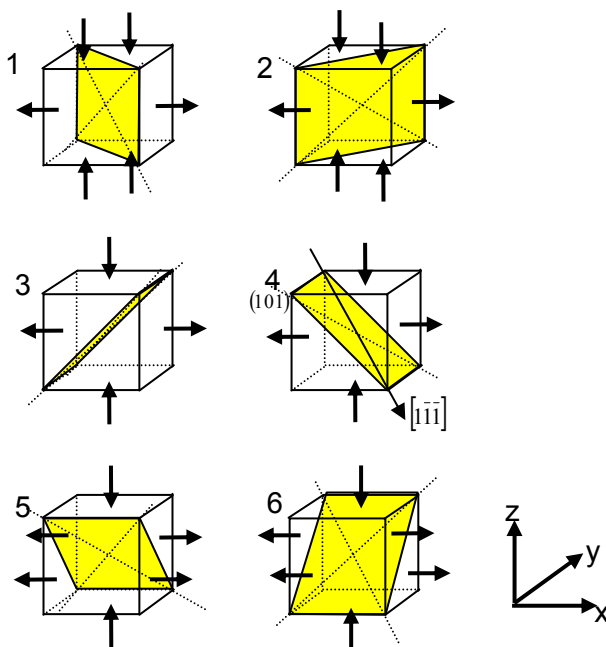
Für einen krz-Kristall beträgt die kritische Schubspannung $\tau_{\text{krit}} = 68 \text{ MPa}$ auf den $\{110\}\langle 111 \rangle$ -Gleitsystemen. Liegt für den folgenden Spannungszustand plastische Verformung vor?

$\sigma_1 = 125 \text{ MPa}$ in $[100]$ -Richtung

$\sigma_2 = -48 \text{ MPa}$ in $[001]$ -Richtung

Lösung

Es müssen alle Gleitsysteme aus der angegebenen Familie $\{110\}\langle 111 \rangle$ betrachtet werden. Bezüglich des angegebenen Spannungszustands sind alle Gleitsysteme auf den Ebenen (101) und $(10\bar{1})$ gleichwertig (Gleitrichtungen liegen symmetrisch zu den Ebenen Krafrichtung-Flächennormalen). Für alle anderen Gleitebenen ist die zu erwartende Spannung kleiner, da die Ebenen dann zu einer der Spannungen parallel liegen. Berechnung für das System $(101)[\bar{1}\bar{1}1]$:



Bei 1 und 2 bewirken nur die horizontalen, bei 5 und 6 nur die vertikalen Normalspannungen Schubspannungen in der markierten Gleitebene. Bei 3 $(10\bar{1})$ und 4 (101) unterstützen sich der horizontale Zug und der vertikale Druck.

Berechnung für das System $(101)[\bar{1}\bar{1}1]$:

Zur Beurteilung, ob bei einem einachsigen Spannungszustand die kritische Schubspannung in einem bestimmten Gleitsystem erreicht ist und das Material also plastisch fließt, ist nur der Betrag, nicht aber die Richtung der Schubspannung von Bedeutung. Werden aber verschiedene einachsige Spannungszustände überlagert und mittels des erweiterten Schmid'schen Schubspannungsgesetzes die resultierende Schubspannung τ berechnet, müssen die Richtungen der Schubspannungskomponenten beachtet werden. Dies kann geschehen, indem man die Gleitrichtung als Vektor auffasst und die Winkel λ_i zwischen dem Spannungsvektor am schiefen Flächenelement und dem Gleitrichtungsvektor einführt. In unserer Aufgabe wird so λ_2 grösser als 90° , $\cos \lambda_2$ negativ. Bei Druckspannungen setzt man für σ negative Werte ein.

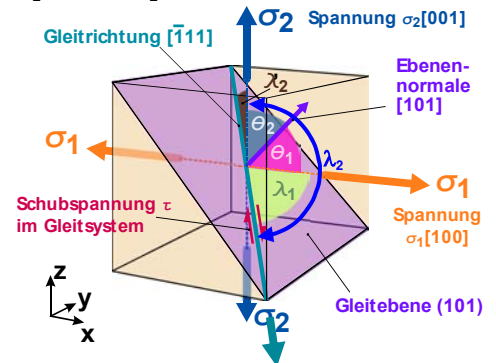
Betrachtetes Gleitsystem: $(101)[\bar{1}\bar{1}1]$

Spannung σ_1 in Richtung $[100]$, σ_2 in Richtung $[001]$

Für Druckspannungen: $\sigma < 0$

$$\tau = \sigma_1 \cos \lambda_1 \cos \theta_1 + \sigma_2 \cos \lambda_2 \cos \theta_2$$

$$\lambda_2 = 180^\circ - \lambda'_2$$

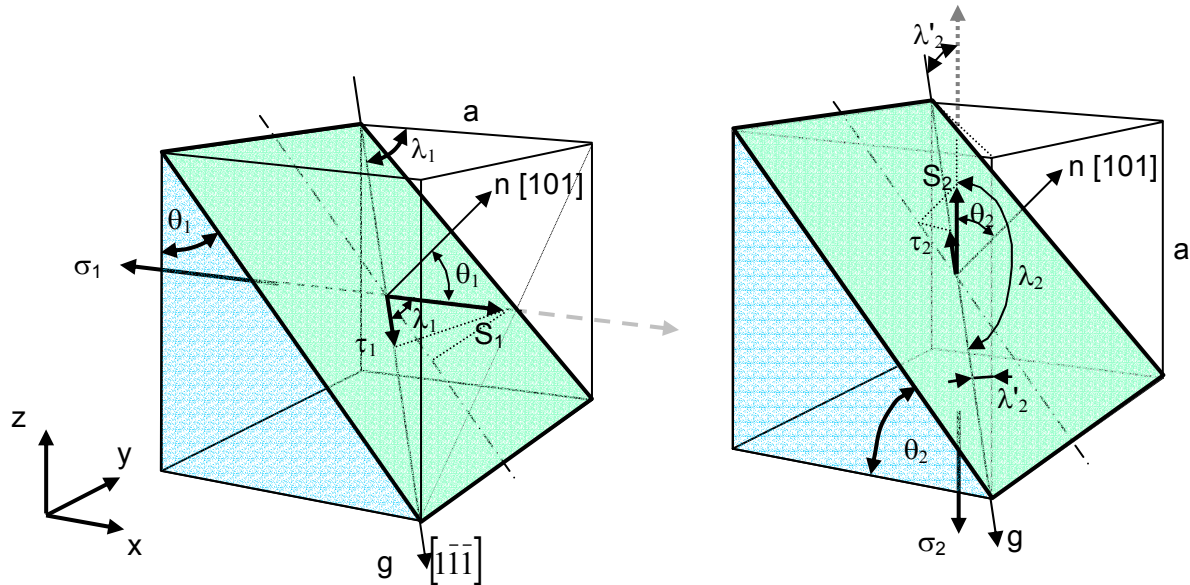


Die beiden einachsigen Spannungszustände sind im Folgenden einzeln gezeichnet. Die Spannung S_i an der schiefen Fläche hält der Spannung σ_i am Flächenelement in der Koordinatenebene das Gleichgewicht. Die Winkel λ_i und θ_i zwischen S_i und g bzw. S_i und n werden im Elementarzellenwürfel gefunden zur Berechnung: λ_1 und λ'_2 in einem Dreieck mit den Seitenlängen $a(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, θ_1 und θ_2 in einem Dreieck mit den Seitenlängen $a(1, 1, \sqrt{2})$.

$$\cos \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \lambda_2 = -\cos \lambda'_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \theta_2$$



$$\begin{aligned} \tau &= \sigma_1 \cdot \cos \lambda_1 \cdot \cos \theta_1 + \sigma_2 \cdot \cos \lambda_2 \cdot \cos \theta_2 = 125 \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} + (-48) \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= (125 + 48) \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ MPa} = 70.6 \text{ MPa} \end{aligned}$$

da $\tau > \tau_{krit}$, $70.6 > 68 \text{ MPa}$, ist **plastische Verformung zu erwarten**.

5 Spannungstensor

In einem Material liegen im Punkt P an Flächenelementen, die senkrecht zu den Achsen des kartesischen Koordinatensystems x, y, z stehen, folgende Spannungen vor:

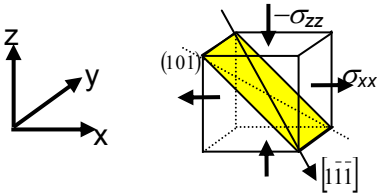
$$\sigma_{xx} = 125 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{zz} = -48 \text{ MPa}$$

σ_{yy} und alle Schubspannungen verschwinden.

- Skizzieren Sie die Situation
- Geben Sie den Spannungstensor für diesen Spannungszustand an.
- Wie gross ist die Schubspannungskomponente τ_g am Flächenelement mit der Normalen (101) in der Richtung $\underline{g} = [\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$

Lösung

a) Situation: 	b) Spannungstensor: $\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix}$
---	--

c) Schubspannungskomponente τ_g :

Spannungsvektor $\underline{S}$ am Flächenelement mit dem Normaleneinheitsvektor $\underline{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(101)$:

(Komponenten von $\underline{S}$ in den Richtungen x, y, z)

$$\underline{S} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} = \begin{pmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{125}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-48}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$$

Schubspannung τ_g in Richtung $\underline{g} = [\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$ ist die Komponente von $\underline{S}$ in dieser Richtung, d.h.

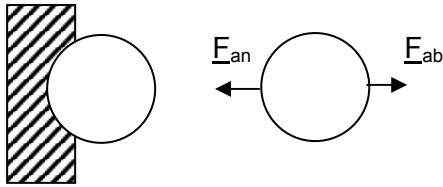
Projektion von $\underline{S}$ auf $\underline{g}$ bzw. Skalarprodukt von $\underline{S}$ mit $\frac{\underline{g}}{|\underline{g}|}$

$$\tau_g = \underline{S} \cdot \frac{\underline{g}}{|\underline{g}|} = \begin{pmatrix} \frac{125}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-48}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{(125 + 48)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 70.64 \text{ MPa}$$

Gleiches Resultat wie Aufgabe 6

6 Bindungsenergie

Zeichnen Sie qualitativ den $U(r)$ -Verlauf des Potentials $U(r)$ der resultierenden der anziehenden und abstossenden Kräfte zwischen zwei Atomen. für zwei Werkstoffe mit der gleichen Gitterkonstanten, die unterschiedliche Schmelztemperaturen und unterschiedliche E-Moduli aufweisen. $T_{SA} > T_{SB}$; $E_A > E_B$

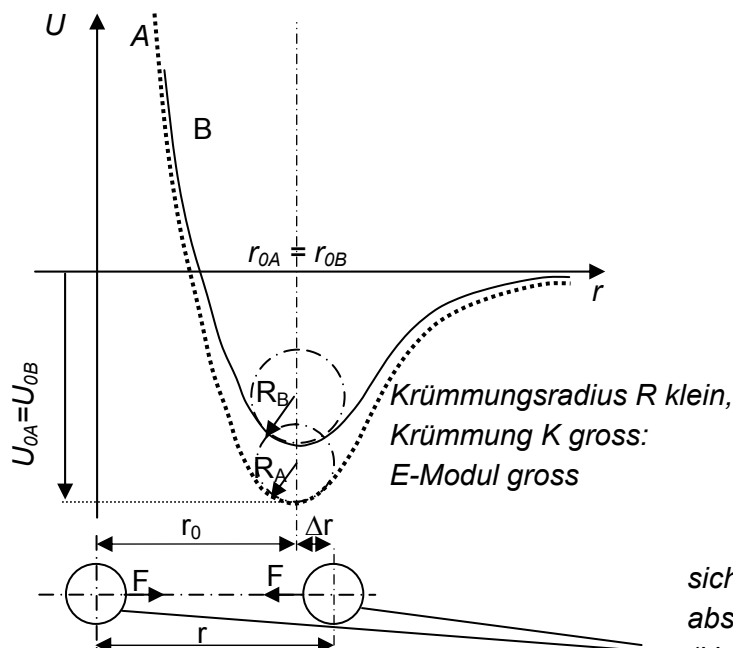


$U(R)$ ist das Potential der anziehenden und abstossenden Kräfte zwischen zwei Atomen, auf Null normiert bei grossem Abstand. U_0 ist das Potential beim Kräftegleichgewicht, der Abstand r_0 entspricht der Gitterkonstanten entspricht.

a) Gleiche Schmelztemperatur T_S heisst $T_{SA} = T_{SB} \Rightarrow |U_{0A}| = |U_{0B}|$

und hier: $T_{SA} > T_{SB} \Rightarrow |U_{0A}| > |U_{0B}|$

b) Die Ableitung des Potentials U nach dem Abstand r ergibt die Kraft F , die Ableitung der Kraft nach dem Abstand ist proportional zum E-Modul: Der E-Modul ist grösser, wenn der Krümmungsradius klein ist: $E_A > E_B \Rightarrow R_A < R_B$



sich anziehende bzw.
abstossende Atome
(kleiner gezeichnet. Nach
üblicher Darstellung wäre
Atomradius= $r_0/2$)

Erläuterungen zu c):

Krümmung K , Krümmungsradius R , mit $K = \frac{1}{R}$:

$$\text{Krümmung: } K = \frac{\frac{d^2U}{dr^2}}{\left[1 + \left(\frac{dU}{dr}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Im Gleichgewichtsabstand $r = r_0$ gelten $\left(\frac{dU}{dr}\right) = 0$ und $K = \frac{d^2U}{dr^2}$

mit $F = \frac{dU}{dr}$ folgt $K = \frac{dF}{dr}$,

als Differenz ausgehend vom Gleichgewichtszustand geschrieben:

$$K = \frac{\Delta F}{\Delta r} = \frac{F - F_0}{\Delta r} \quad \text{mit } F_0 = 0 \text{ folgt } K = \frac{F}{\Delta r},$$

auf Spannung und Dehnung umgerechnet, indem mit der zu einem Atom gehörigen Querschnittsfläche A und dem Atomabstand r_0 erweitert wird:

$$K = \frac{F}{\Delta r} = \frac{\frac{F}{A} \cdot A}{\frac{\Delta r}{r_0} \cdot r_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \frac{A}{r_0} = E \cdot \frac{A}{r_0} \sim E$$