

Werkstoffe und Fertigung I
Prof.Dr. K. Wegener

Wintersemester 2006/07

Name	
Vorname	
Legi-Nr.	

Übung 7

Elastizität, Plastizität, Kriechen

Musterlösung

Ausgabe: 31.01.2007

Abgabe: 02.02.2007

Lernziele

Werkstoffe und Fertigung I, Kap. 6, Kap. 7, Kap. 8

Kerninformationen

1 Plastische Verformungen

Wird ein Körper derart belastet, dass an gewissen Stellen die kritische Schubspannung τ_c erreicht wird, entstehen Verformungen, welche sich bei Entlastung nicht mehr vollständig zurückbilden. Der elastische Verformungsanteil verschwindet bei Entlastung, die plastischen Verformungen bleiben bestehen.

Die plastische Verformung kommt in den meisten Fällen durch Abgleitung unter Schubspannung (Gleitsystem: Gleitebene und Gleitrichtung) zustande, indem Versetzungen laufen.

(Ein weiterer Mechanismus zur Erzeugung von plastischen Verformungen ist die mechanische Zwillingsbildung, vor allem bei tiefen Temperaturen und hohen Verformungsgeschwindigkeiten.)

Die wirkende Schubspannung bringt nicht nur vorhandene Versetzungen zum Laufen, sondern erzeugt auch neue Versetzungen, z.B. in Frank-Read-Quellen.

Aktivierungs(schub-)spannung τ_c (=kritische Spannung = Quellspannung) einer Frank-Read-Quelle:

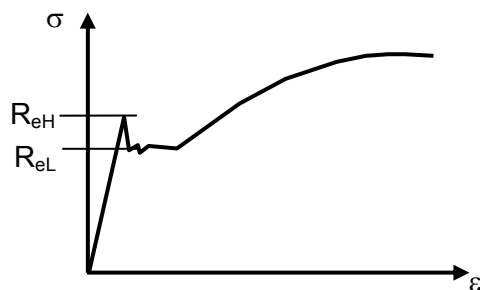
$$\tau_c = \frac{G \cdot b}{S}$$

G: Schubmodul, b: Burgersvektor, S: Abstand von zwei Pin-Punkten

Sind zu viele Versetzungen vorhanden, können sie sich gegenseitig in ihrer Beweglichkeit behindern. Man unterscheidet also mobile Versetzungen und immobile (Waldversetzungen). Letztere sind verantwortlich für die Kaltverfestigung des Materials.

2 Streckgrenze

Wenn in einem Material sehr wenig mobile Versetzungen vorhanden oder diese durch Fremdatome blockiert sind, steigt die Spannung bei Belastung bis zu einem höheren Wert (obere Streckgrenze R_{eH}) an, bevor plastisches Fließen auftritt. Tritt Fließen dann ein, sinkt die



Spannung zunächst wieder ab (untere Streckgrenze, R_{eL}) und bleibt eine Weile auf tieferem Niveau etwa konstant. Die Verformung findet hier an den Rändern eines oder mehrerer Lüdersbänder statt. Haben diese das ganze Bauteil überstrichen, steigt die Fließspannung durch die zunehmende Zahl immobiler Versetzungen wieder an.

In vielen technischen Anwendungen will man plastische Deformationen unbedingt vermeiden. Das Ziel ist eine hohe Streckgrenze R_e .

Dies wird erreicht durch eine hohe kritische Spannung τ_c und geeignete Hindernisse, welche die Pin-Punkte bilden:

Fremdatome, Versetzungen, Korngrenzen, Teilchen einer zweiten Phase.

Erhöhung der Streckgrenze durch:

- Mischkristallhärtung (c : Konzentration der Fremdatome):

$$\Delta\sigma_M \sim \sqrt{c}$$

- Versetzungshärtung (Verfestigung; φ : log. plastische Dehnung):

$\Delta\sigma_V \sim A\varphi^n + B\dot{\varphi}^m$ oder $\Delta\sigma_V \sim \sqrt{\rho_{Vimm}}$, wo ρ_{Vimm} die Dichte der immobilisierten Versetzungen bedeutet.

- Teilchenhärtung (D_T : Teilchenabstand):

$$\Delta\sigma_T \sim \frac{1}{D_T}$$

- Korngrösseneinfluss (D_{KG} : Korndurchmesser):

$$\Delta\sigma_{KG} \sim \frac{1}{\sqrt{D_{KG}}}$$

3 Lineare / logarithmische Dehnung

Lineare Dehnung = technische Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{l_1}{l_0} - 1$$

logarithmische Dehnung = Wahre Dehnung:

$$\varphi = \ln \frac{l_1}{l_0}$$

4 Erholung

Bei etwas erhöhter Temperatur werden

- nulldimensionale Gitterfehler abgebaut (Leerstellen, Frenkel-Defekte, Zwischengitteratome)
- Versetzungen abgebaut (Annihilation, ev. nach vorgängigem Klettern.)
- Versetzungen neu geordnet (Polygonisation und Zellbildung)

5 Rekristallisation

Unter gewissen Bedingungen bildet ein metallischer Werkstoff sein Kristallgefüge neu:

- Der Werkstoff muss vorgängig eine Kaltumformung erfahren haben, damit genügend Versetzungen für die Keimbildung vorhanden sind.
- Die Temperatur muss genügend hoch sein (mindestens $0.4 \cdot T_S$, Schmelztemperatur [K]).

3 Kriechen, Relaxation

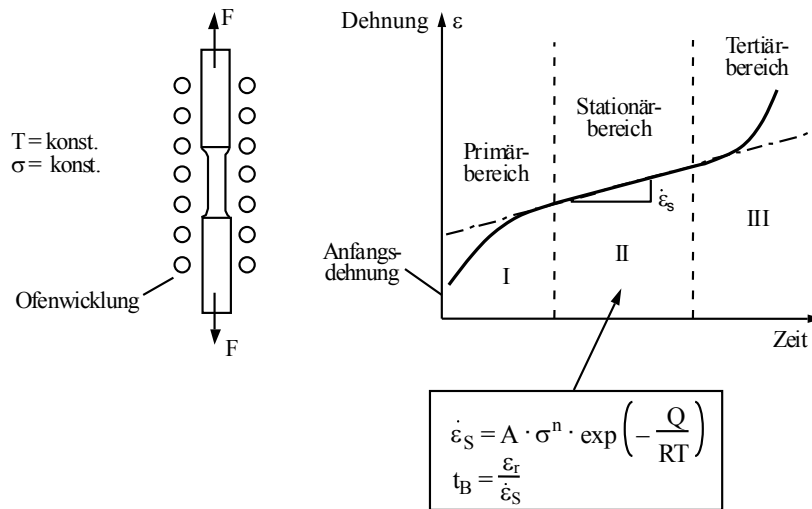
Die Kriechverformungen kommen zustande

- durch Klettern (durch Diffusion von Atomen bzw. Leerstellen) und anschliessendes Laufen von Versetzungen
- durch Diffusion von Atomen, welche den wirkenden Kräften nachgeben
- durch Wegdiffundieren von Kornecken und dadurch ermöglichtem Korngrenzengleiten.

Beim *Kriechen* bleibt die Last auf einem Bauteil konstant. Die Kriechverformung nimmt zu bis zum Bruch.

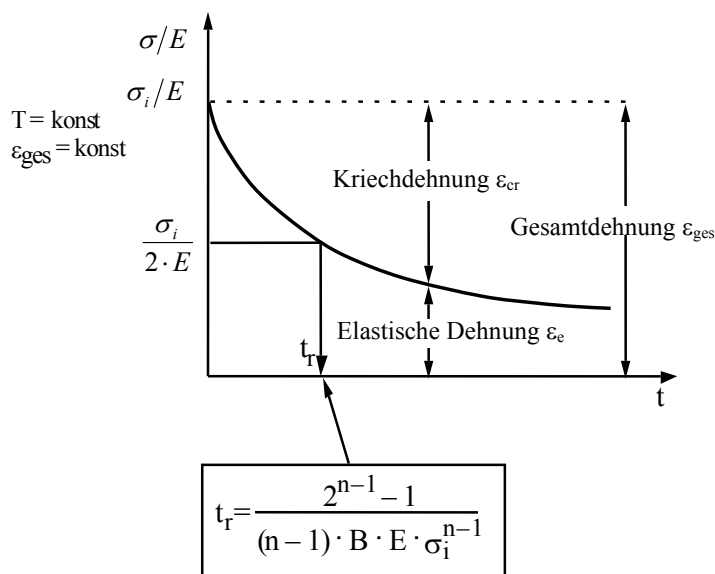
Bei der *Relaxation* wird ein Bauteil einer Dehnung unterworfen, welche über die Zeit konstant gehalten wird. Diese wird zunächst elastisch und allenfalls plastisch aufgenommen. Der elastische Anteil wird mit der Zeit durch die Kriechverformung ersetzt unter proportionaler Verminderung der Spannung, die Gesamtdehnung bleibt konstant.

Kriechkurve



- $\dot{\epsilon}_s = (\dot{\epsilon}_{cr})$, stationäre Fließgeschwindigkeit
 ϵ_r = Grenzdehnung bei Versagen, Kriechbruchdehnung
 t_B = Kriechzeit bis zum Bruch
 σ = Zugspannung
 Q = Aktivierungsenergie
 R = Universelle Gaskonstante
 T = Temperatur

Relaxationskurve:



Die Relaxationszeit t_r ist die Zeit, in welcher die Spannung (und damit die elastische Dehnung, vgl. Grafik) auf die *Hälfte* des Anfangswertes gefallen ist. (Hinweis: Bei den Kunststoffen ist die Relaxationszeit anders definiert)

Allgemein:

$$\frac{1}{\sigma^{n-1}} - \frac{1}{\sigma_i^{n-1}} = (n-1) \cdot B \cdot E \cdot t \quad \text{mit} \quad B = A \cdot \exp\left(\frac{-Q}{RT}\right)$$

In der Zeit t fällt die Spannung vom Anfangswert σ_i auf den Wert σ ab. E : Elastizitätsmodul
 A, n, Q : werkstoffabhängige Konstanten

1 Streckgrenze

Gegeben ist der Gesamtspannungswert der Streckgrenze $\sigma_S = 440 \text{ MPa}$ und die Teilwerte der verschiedenen Verfestigungsarten ($\Delta\sigma_M = 5 \text{ MPa}$, $\Delta\sigma_V = 20 \text{ MPa}$, $\Delta\sigma_T = 50 \text{ MPa}$, $\Delta\sigma_{KG} = 60 \text{ MPa}$). Berechnen Sie

- a) Die Versetzungsgleitspannung $\sigma_{\perp}$
b) $\sigma_{S\text{neu}}$, wenn der Anteil an Fremdatomen verdoppelt und der Teilchenabstand halbiert wird.

Lösung

a) $\sigma_S = 440 \text{ MPa} = \sigma_{\perp} + 5 + 20 + 50 + 60 \text{ MPa}$ $\sigma_{\perp} = 440 - 135 = 305 \text{ MPa}$

b) $\Delta\sigma_M \sim \sqrt{c} ; \rightarrow \Delta\sigma'_M \sim \sqrt{2c} = \sqrt{2} \Delta\sigma_M = 1.414 \cdot 5 = 7.1 \text{ MPa}$
 $\Delta\sigma_T \sim \frac{1}{D_T} ; \rightarrow \Delta\sigma'_T \sim \frac{1}{D_T/2} = \frac{2}{D_T} = 2 \Delta\sigma_T = 2 \cdot 50 = 100 \text{ MPa}$

$\sigma_S = 305 + 7.1 + 20 + 100 + 60 = 492.1 \text{ MPa}$ $\left(1 \text{ MPa} = 1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right)$

2 Lineare und logarithmische Dehnung

- a) Berechnen Sie für eine lineare Dehnung ε von 0%, 1%, 10%, 100% die logarithmische (wahre) Dehnung φ
- b) Das Werkstoffvolumen bleibt bei plastischer Verformung konstant. Formulieren Sie diesen Sachverhalt mit linearen und logarithmischen Dehnungen

Lösung

Lineare Dehnung:
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{l_1}{l_0} - 1$$

Logarithmische Dehnung:
$$\varphi = \ln \frac{l_1}{l_0} = \ln(\varepsilon + 1)$$

$\varepsilon =$	0	0.01	0.1	1
$\varepsilon + 1 =$	1	1.01	1.1	2
$\varphi =$	0	0.00995	0.095	0.693

Volumen nach plastischer Verformung $V = l \cdot b \cdot h$
 Volumen des unverformten Körpers $V_0 = l_0 \cdot b_0 \cdot h_0$

Volumen ist vor und nach plastischer Verformung gleich gross:

$$V - V_0 = 0; \quad \frac{V}{V_0} = 1$$

Volumenkonstanz ausgedrückt durch lineare Dehnungen:

mit $l = (l_0 + \Delta l) \cdot \frac{l_0}{l_0} = (1 + \varepsilon) \cdot l_0, \dots$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{l_0 \cdot (1 + \varepsilon_l) \cdot b_0 \cdot (1 + \varepsilon_b) \cdot h_0 \cdot (1 + \varepsilon_h)}{l_0 \cdot b_0 \cdot h_0} = (1 + \varepsilon_l) \cdot (1 + \varepsilon_b) \cdot (1 + \varepsilon_h) = 1$$

ausmultipliziert:

$$\varepsilon_l + \varepsilon_b + \varepsilon_h + \varepsilon_l \cdot \varepsilon_b + \varepsilon_l \cdot \varepsilon_h + \varepsilon_b \cdot \varepsilon_h + \varepsilon_l \cdot \varepsilon_b \cdot \varepsilon_h = 0$$

für kleine ε gilt für Volumenkonstanz: $\varepsilon_l + \varepsilon_b + \varepsilon_h \approx 0$

Volumenkonstanz ausgedrückt durch logarithmische Dehnungen:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{l \cdot b \cdot h}{l_0 \cdot b_0 \cdot h_0} = 1$$

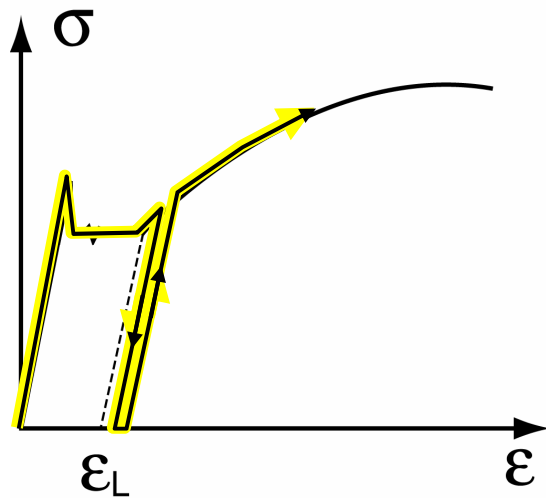
logarithmieren:

$$\ln\left(\frac{l \cdot b \cdot h}{l_0 \cdot b_0 \cdot h_0}\right) = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) + \ln\left(\frac{b}{b_0}\right) + \ln\left(\frac{h}{h_0}\right) = 0$$

gültig für beliebige φ : $\varphi_l + \varphi_b + \varphi_h = 0$

3 Reckalterung, Dressieren

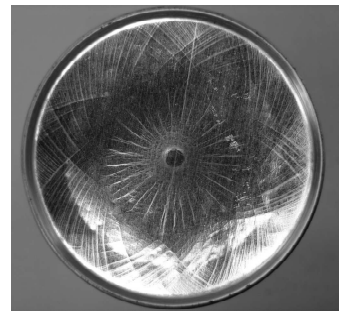
Sie wollen Blech kaltumformen. Das Material zeigt eine ausgeprägte Streckgrenze mit Lüdersband.



- Warum ist dieses Verhalten ungünstig für Ihren Prozess?
- Worauf ist es zurückzuführen?
- Wie können Sie die Nachteile umgehen.
- Sind Ihre Massnahmen nachhaltig, was ist zu tun?

Lösung:

- Ungleichmässiges Fliessverhalten im Bereich der Lüdersdehnung, unerwünschte Fliessfiguren.*
- Fremdatome erhöhen die Streckgrenze, indem sie Versetzungen am Laufen hindern.*
- Plastische Vorverformung mit $\epsilon_p \geq \epsilon_L$. Wie in Diagramm eingezeichnet. Nach Entlastung und erneuter Belastung ist der Spannungs-Dehnungs-Verlauf kontinuierlich.*
- Nach einer gewissen Zeit sind die Fremdatome wieder in die Versetzungen zurückdiffundiert und erzeugen wieder ein Lüdersband (Reckalterung). Massnahme: Erneute plastische Verformung (Dressurstich).*



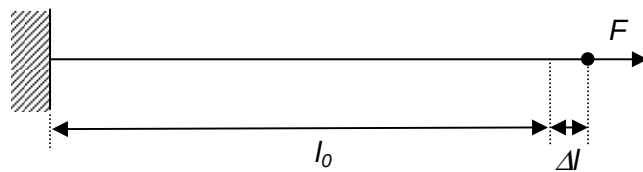
Beispiel zur Illustration:
Dosenboden

4 Plastische Dehnung: Energieaufnahmevermögen

Ein Steinschlagfangnetz soll den Absturz von Felsblöcken auf eine Strasse verhindern. Das Netz besteht aus Seilen, die aus Stahldrähten aufgebaut sind.

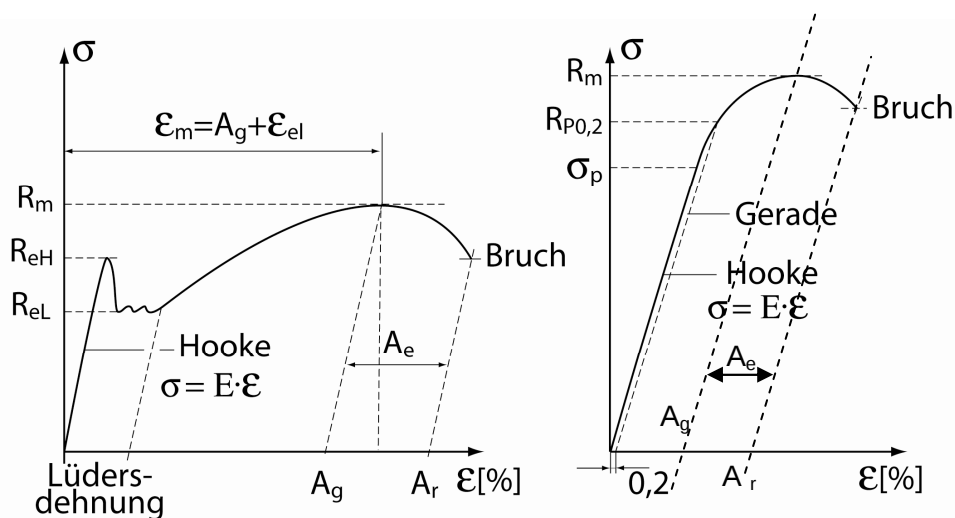
Im Zugversuch wurde mit diesem Draht bei einer Messlänge von l_{10} eine Bruchverlängerung von Δl_1 gemessen, bei einer Probe der Länge l_{20} eine solche von Δl_2 .

- Welche Energie kann ein Draht der Länge l_{30} bis zum Bruch durch plastisches Fließen aufnehmen (näherungsweise Berechnung)?
- Wie gross ist die elastische Energie des Drahtes unmittelbar vor dem Bruch?
Annahme: Bruchspannung = R_m .
- Sie möchten die Fließkurve für den Bereich der Gleichmassdehnung mit der Ludwிகgleichung beschreiben. Der Exponent n von ϵ sei $n=0.5$. Wie gross wählen Sie den Vorfaktor C von ϵ ? (Der Einfluss der Dehngeschwindigkeit werde vernachlässigt).



Drahtlänge	l_{30}	=	3	m
Drahtdurchmesser	d	=	2	mm
Drahtquerschnitt	A	=	3.14	mm ²
Festigkeit des Drahtes	R_m	=	1400	N/mm ²
Elastizitätsgrenze des Stahldrahtes	$R_{p0.2}$	=	950	N/mm ²
Länge Probe 1	l_{10}	=	0.1	m
Länge Probe 2	l_{20}	=	0.2	m
Totale Verlängerung bis Bruch Probe 1	Δl_1	=	0.007	m
Totale Verlängerung bis Bruch Probe 2	Δl_2	=	0.012	m

Lösung:



a) Die bleibende Verlängerung Δl_1 nach Bruch kommt zustande aus einem längenproportionalen Anteil, der plastischen Gleichmassdehnung - allenfalls eine Lüdersdehnung enthaltend - und einem einmaligen Anteil wegen der Brucheinschnürung.

$$\Delta l_1 = \Delta l_{1g} + \Delta l_{1e}$$

Die längenproportionale Verlängerung der Probe 2 ist hier doppelt so gross wie diejenige der Probe 1 wegen der doppelt so grossen Probenlänge ($\Delta l_{ig} = l_i \cdot A_g$). Die Verlängerung infolge Brucheinschnürung ist bei beiden gleich ($\Delta l_{1e} = \Delta l_{2e}$; $\Delta l_{1e} = l_1 \cdot A_{1e}$; $A_{1e} \neq A_{2e}$).

$$\Delta l_{2g} = 2 \Delta l_{1g}, \text{ somit}$$

$$\Delta l_1 = \Delta l_{1g} + \Delta l_{1e} = 0.007 \text{ m}$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_{2g} + \Delta l_{2e} = 2 \Delta l_{1g} + \Delta l_{1e} = 0.012 \text{ m}$$

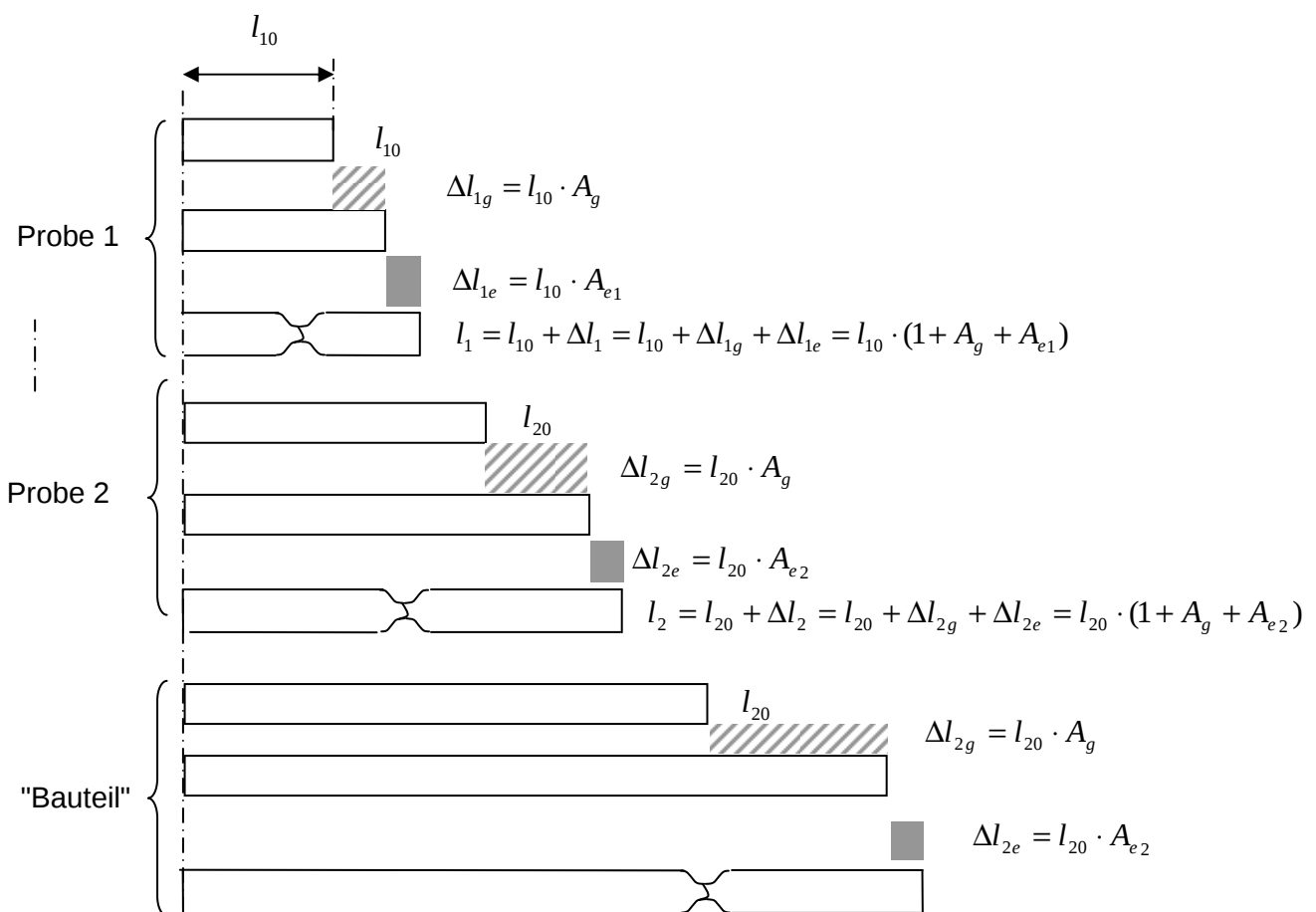
Subtraktion ergibt:

$$\Delta l_{1g} = 0.005 \text{ m} \text{ und eingesetzt: } \Delta l_{1e} = 0.002 \text{ m.}$$

$$\text{Gleichmassdehnung } A_g = \Delta l_{1g} / l_1 = 0.005 / 0.1 = 0.05 = 5\%$$

Verlängerung eines Drahtes der Länge $l_3 = 3 \text{ m}$ bis zum Bruch:

$$\Delta l_3 = l_3 \cdot A_g + \Delta l_{1e} = 3 \text{ m} \cdot 0.05 + 0.002 \text{ m} = 0.15 \text{ m} + 0.002 \text{ m} = 0.152 \text{ m}$$

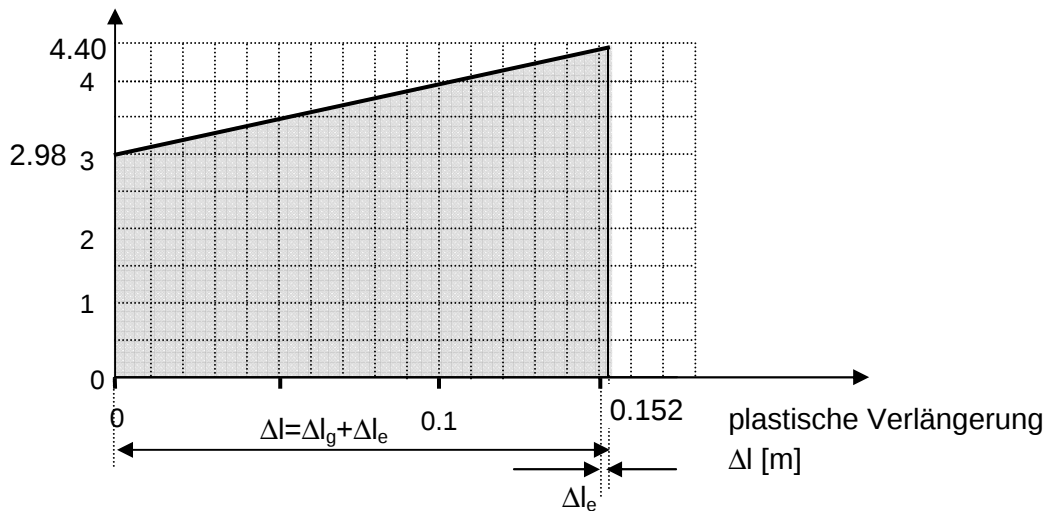


Zugkraft F im Draht [kN]

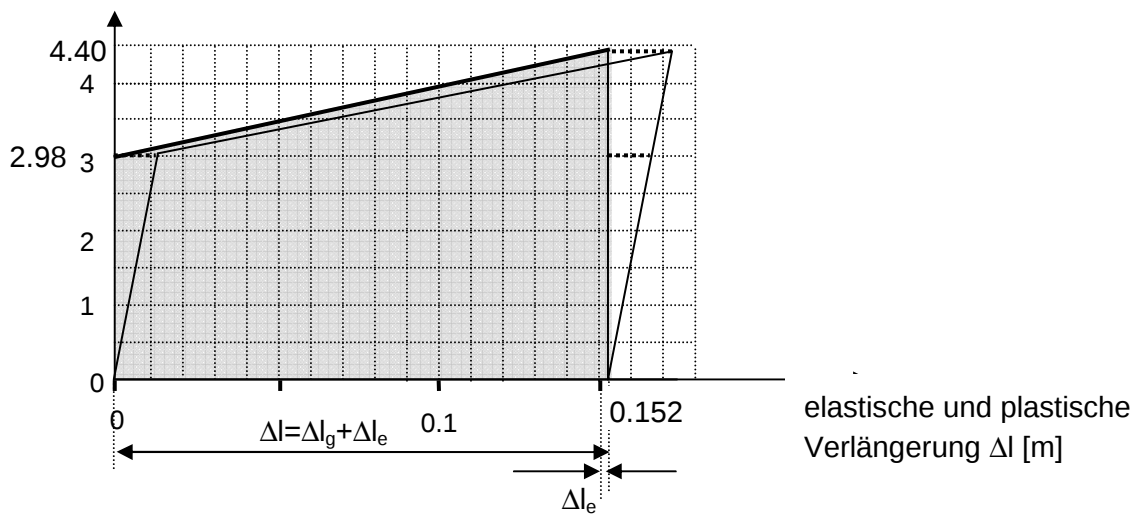
- bei Erreichen der Elastizitätsgrenze: $F_{RP} = R_{p0.2} \cdot A = 950 \cdot 3.14 \frac{N}{mm^2} \cdot mm^2 = 2980 N$

- bei Maximalspannung: $F_m = R_m \cdot A = 1400 \cdot 3.14 \frac{N}{mm^2} \cdot mm^2 = 4400 N$

Zugkraft im Draht [kN]



Zugkraft im Draht [kN]



Die durch plastische Verformung bis zum Bruch aufgenommene Arbeit E_B ist Kraft mal Weg, im Diagramm also die graue Fläche:

$$E_B = \frac{R_{p0.2} + R_m}{2} \cdot A \cdot \Delta l_3 = \frac{950 + 1400}{2} \frac{N}{mm^2} \cdot 3.14 mm^2 \cdot 0.152 m = 561 J$$

b) Elastische Energie des Drahtes kurz vor dem Bruch:

Elastische Dehnung vor dem Bruch: $\varepsilon_{el} = R_m / E = 1400 / 210000 = 0.0067$

Für einen Draht der Länge $l = 3m$ ergibt sich die elastische Verlängerung Δl_{el} kurz vor Bruch:

$$\Delta l_{el} = \varepsilon_{el} \cdot l_{30} = 0.0067 \cdot 3m = 0.02 m$$

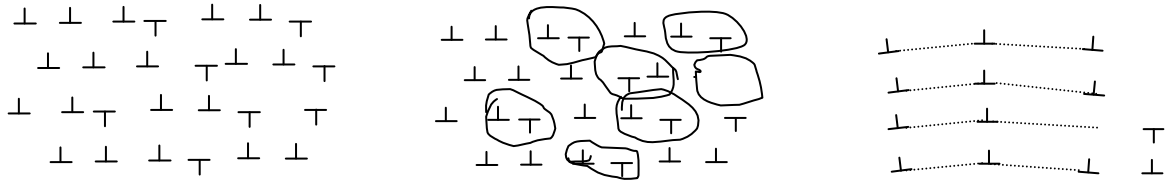
Die gespeicherte elastische Energie ist

$$\frac{F_B \cdot \Delta l_{el}}{2} = \frac{4396 N \cdot 0.02 m}{2} = 44 J$$

5 Erholung

Gegeben ist das schematische Abbild eines Materials mit Versetzungen.

Beschreiben Sie was passiert, wenn das Material einige Zeit bei einer Temperatur von $0.3 T_s$ gehalten wird und zeichnen Sie den Endzustand.



Lösung

Bei 30% der Schmelztemperatur laufen folgende Vorgänge ab.

Abbau nulldimensionaler Gitterfehler: Doppelleerstellen, Frenkeldefekt, Zwischengitteratome.

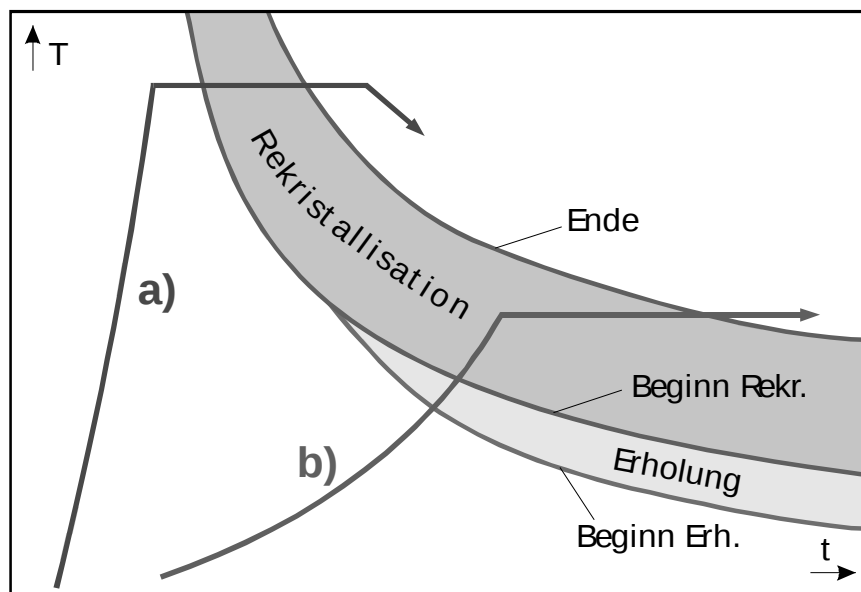
Annihilation von Versetzungen entgegengesetzten Vorzeichens in der gleichen Ebene, ev. nach vorangegangenem Klettern. (Bild).

Polygonisation. d.h. die Versetzungen ordnen sich in Ebenen an. (Bild)

6 Rekristallisation

Stark verformte (80%) Stahlbleche sollen rekristallisierend gegläht werden. Dazu stehen die abgebildeten Zeit-Temperatur-Verläufe a) und b) zur Diskussion.

- Bei welchem Verlauf ist eher mit Grobkornbildung zu rechnen? Weshalb?
(Man nehme an, dass keine Sekundärrekristallisation stattfindet).



Lösung

Durch die Erholung beim Verlauf b) werden bereits Gitterbaufehler abgebaut. Die Fehler sind aber Keimstellen für die Rekristallisation. Weniger Keimstellen bedeuten weniger neue Körner und deshalb gröberes Korn.

Allerdings laufen alle Vorgänge bei höherer Temperatur schneller ab, sodass zur gleichen Zeit bei den höheren Temperaturen die Körner schon grösser sind.

7 Turbinenschaufel

Im Innern der Endstufe einer Düsenjet-Turbine herrschen Temperaturen von bis zu 1200 °C. Um eine optimale Leistungsübertragung zu gewährleisten, beträgt der Spalt zwischen den rotierenden Schaufelenden und dem Turbinengehäuse nur wenige Millimeter. So kann es vorkommen, dass nach einigen tausend Flugstunden einzelne Schaufeln ausgewechselt werden müssen, da sie, bedingt durch Kriechprozesse, länger geworden sind und deshalb Gefahr laufen, das Gehäuse zu berühren. Der Flugzeug-Turbinenhersteller „Tolls-Toyce“ gewährleistet deshalb seinen Kunden, dass bei einer Betriebstemperatur der Turbine von $T_1 = 1000\text{ °C}$ die Schaufeln erst nach $t_1 = 10'000$ Flugstunden ausgewechselt werden müssen. Die Fluggesellschaft „Aero Hot“, ein Kunde von „Tolls-Toyce“, hält sich jedoch nicht an diese Richtlinie und betreibt die Turbinen bei $T_2 = 1100\text{ °C}$. Wann müssen bei diesen Bedingungen die ersten Schaufeln ersetzt werden? Die Aktivierungsenergie für stationäres Kriechen beträgt für Titan, aus dem die Schaufeln gefertigt sind, 290'000 J/mol.

Lösung

Basisgleichungen für die Kriechrate $\dot{\varepsilon}$ bzw. die Kriechdehnung ε im stationären Bereich:

$$\dot{\varepsilon} = B \cdot \sigma^n = A \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{Q}{R \cdot T}\right)$$

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon} \cdot t = A \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{Q}{R \cdot T}\right) \cdot t$$

Fall 1: $T_1 = 1000\text{ °C} = 1273\text{ K}$; $t_1 = 10'000\text{ h}$

Fall 2: $T_2 = 1100\text{ °C} = 1373\text{ K}$; $t_2 = ?\text{ h}$

Für beide Fälle ist die Kriechverformung am Ende der Gebrauchsdauer gleich gross:

$$\varepsilon_{krit1}(t_1) = \varepsilon_{krit2}(t_2)$$

$$\varepsilon_{krit1} = A \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{Q}{R \cdot T_1}\right) \cdot t_1 = A \cdot \sigma^n \cdot \exp\left(-\frac{Q}{R \cdot T_2}\right) \cdot t_2 = \varepsilon_{krit2}$$

$$t_2 = t_1 \cdot \frac{\exp\left(-\frac{Q}{R \cdot T_1}\right)}{\exp\left(-\frac{Q}{R \cdot T_2}\right)} = t_1 \cdot \exp\left[\left(-\frac{Q}{R \cdot T_1}\right) - \left(-\frac{Q}{R \cdot T_2}\right)\right] = t_1 \cdot \exp\left(\frac{Q}{R} \left[\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right]\right)$$

mit der universellen Gaskonstanten $R = 8.31\text{ J/mol K}$:

$$t_2 = 10000\text{ h} \cdot \exp\left(\frac{290000\text{ J/mol}}{8.31\text{ J/mol K}} \left[\frac{1}{1373\text{ K}} - \frac{1}{1273\text{ K}}\right]\right) = 1360\text{ h} \hat{=} 13.6\%$$

8 Spannungsrelaxation

Zwei Stahlschrauben A und B ($n=5$), die ein Kraftwerk-Turbinengehäuse zusammenhalten, wurden vor Inbetriebnahme der Turbine unterschiedlich stark vorgespannt. Fällt die Vorspannung der Schaufeln auf den halben Wert, müssen die Schrauben erneut vorgespannt werden. Für Schraube A ist dies bereits nach $t_A = 2$ Jahren der Fall, für Schraube B erst nach $t_B = 4$ Jahren.

- Welche Schraube wurde mehr vorgespannt?
- Um wie viel mehr?

Lösung

Zur Verfügung stehen:

Aus $\dot{\varepsilon}_{cr} = B \cdot \sigma^n$ und $\varepsilon_{ges} = \varepsilon_e + \varepsilon_{cr} (+ \varepsilon_p) = \text{const.}$ und $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$ folgt

$$\frac{1}{\sigma^{n-1}} - \frac{1}{\sigma_i^{n-1}} = (n-1) \cdot B \cdot E \cdot t : \text{In der Zeit } t \text{ fällt die Spannung vom Anfangswert } \sigma_i \text{ auf } \sigma.$$

Die Zeit, in welcher die Spannung auf den halben Anfangswert fällt, heisst Relaxationszeit t_r :

$$t_r = \frac{2^{n-1} - 1}{(n-1) \cdot B \cdot E \cdot \sigma_i^{n-1}}$$

Anwendung

2 Fälle:

$$\begin{aligned} \sigma_{iA} : t_{rA} &= 2a \\ \sigma_{iB} : t_{rB} &= 4a \end{aligned}$$

$$\frac{t_{rB}}{t_{rA}} = \frac{\frac{2^{n-1} - 1}{(n-1) \cdot B \cdot E \cdot \sigma_{iB}^{n-1}}}{\frac{2^{n-1} - 1}{(n-1) \cdot B \cdot E \cdot \sigma_{iA}^{n-1}}} = \frac{\sigma_{iA}^{n-1}}{\sigma_{iB}^{n-1}} \rightarrow \frac{\sigma_{iA}}{\sigma_{iB}} = \left(\frac{t_{rB}}{t_{rA}} \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{4a}{2a} \right)^{\frac{1}{5-1}} = 2^{0.25} = 1.19$$

- Schraube A wurde mehr vorgespannt
- Um 19% auf den 1.19-fachen Wert.