

Werkstoffe und Fertigung II  
Prof.Dr. K. Wegener

Sommersemester 2007

|          |  |
|----------|--|
| Name     |  |
| Vorname  |  |
| Legi-Nr. |  |

## Übung 8

## Ermüdung

---

## Musterlösung

Ausgabe: 29.3.2007

Abgabe: 3.04.2007

## Lernziele

Werkstoffe und Fertigung I, Kap. 9

## Kerninformationen

### Ermüdung

|                                 |                                                    |                                              |                                                         |
|---------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Mittelspannung:                 | $\sigma_m = \frac{\sigma_o + \sigma_u}{2}$         | Spannungsausschlag<br>(Spannungsamplitude) : | $\sigma_a = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{2}$              |
| Zeitlicher<br>Spannungsverlauf: | $\sigma = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin \omega t$ | Schwingungsbreite:                           | $\Delta\sigma = 2 \cdot \sigma_a = \sigma_o - \sigma_u$ |

Wöhlerkurve: Gibt für eine bestimmte Mittelspannung  $\sigma_m$  an, bei welchem Spannungsausschlag  $\sigma_A$  welche Lastspielzahlen  $N$  von 90% der Proben ertragen werden können, ohne zu brechen.

### Wöhlerermüdung (High Cycle Fatigue, HCF)

**Dauerfestigkeit:**  $\sigma_D = \sigma_m \pm \sigma_A = \sigma_{Do}, \sigma_{Du}$  (zwei der vier Grössen  $\sigma_{Do}, \sigma_{Du}, \sigma_m, \sigma_A$  müssen angegeben werden). Für diese Spannungswerte können beliebig hohe Lastspielzahlen ohne Bruch ertragen werden.

**Zeitfestigkeitsbereich:** Die Basquin-Beziehung gibt den Zusammenhang zwischen der Schwingbreite  $\Delta\sigma$  und der Bruchlastspielzahl  $N_B$ :  $\Delta\sigma \cdot N_B^a = C_B$  mit  $\Delta\sigma = 2 \cdot \sigma_A$ .

**Plastoermüdung** (Low Cycle Fatigue LCF): Plastische Verformung in jedem Schwingspiel.

Das Coffin-Manson-Gesetz gibt den Zusammenhang zwischen der plastischen Dehnung  $\Delta\epsilon_{pl}$  (doppelte Dehnungsamplitude) und der Bruchlastspielzahl  $N_B$ :  $\Delta\epsilon_{pl} \cdot N_B^b = C_{MC}$  mit  $\Delta\epsilon_{pl} = 2 \cdot \epsilon_A$

Das *Smith-Diagramm* stellt die von einer Werkstoffprobe bei Schwingbeanspruchung dauernd ertragbaren Spannungen dar (Dauerfestigkeitsdiagramm). Über der Mittelspannung  $\sigma_m$  (Abszisse) werden  $\sigma_{Do} = \sigma_m + \sigma_A$  und  $\sigma_{Du} = \sigma_m - \sigma_A$  aufgetragen sowie  $\sigma_m$  selber als 45°-Gerade.

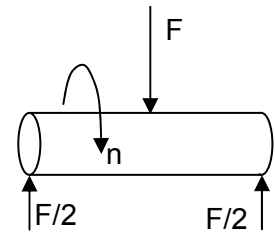
Gestaltfestigkeitsdiagramm: Oberflächen-, Grössen- und Kerbeeinflüsse eines Bauteiles werden berücksichtigt:

Rechnung mit Formzahlen  $\alpha_k$ : Die dynamischen bzw. statischen Festigkeitswerte einer Normprobe werden um den Grössenfaktor, den Oberflächenfaktor und die Stützwirkung (Wechselfestigkeitsverhältnis  $\delta_{Wk}$ ), bzw. die statischen Kerbstützfaktoren umgerechnet und analog zum Smithdiagramm dargestellt. Die gefundenen Festigkeitswerte  $\sigma_A, \sigma_S, \sigma_B$  werden mit den um die Formzahlen erhöhten nominellen Beanspruchungen unter Berücksichtigung von Sicherheitsfaktoren und Betriebsfaktoren verglichen um zu beurteilen, ob das Teil unter der vorliegenden Beanspruchung dauerfest ist und weder plastisch fliesst noch bricht.

Rechnung mit Kerbwirkungszahlen  $\beta_k$ : Die Gestaltwechselfestigkeit wird aus der Wechselfestigkeit der Normprobe berechnet durch Berücksichtigung von Oberflächen- und Grösseneinfluss und der Kerbwirkungszahl. Diese Werte werden mit der statischen Bruchspannung und Fließgrenze im Gestaltfestigkeitsdiagramm dargestellt und unter Berücksichtigung von Betriebs- und Sicherheitsfaktoren mit den Nominalspannungen der Beanspruchung verglichen.

# 1 Ermüden

Eine Welle des Durchmessers  $d$  dreht mit der Drehzahl  $n$  und erfährt dadurch eine schwingende Nominalbeanspruchung  $\sigma_{mn}$ ,  $\sigma_{an}$  als Zug-/Druckspannungen aus Biegung. Die konstruktiven Kerben werden durch die Kerbwirkungszahl  $\beta_k$  berücksichtigt. Geplant ist eine totale Betriebszeit von 2 Jahren.



- Zeichnen Sie ein Gestaltfestigkeitsdiagramm
- Werten Sie die Festigkeitsbedingungen aus.
- Können Sie die geplante Lebensdauer erreichen?

Mittelspannung Zug aus Biegung, nominal  $\sigma_{mn} = 25 \text{ MPa}$

Spannungsamplitude Zug/Druck aus Biegung, nominal  $\sigma_{an} = 25 \text{ MPa}$

Kerbwirkungszahl  $\beta_k = 1.9$

|                                          |                                 |                                  |                                |
|------------------------------------------|---------------------------------|----------------------------------|--------------------------------|
| Durchmesser                              | $d = 20 \text{ mm}$             | Grösseneinflussfaktor            | $b_0 = 0.94 \text{ (d=20 mm)}$ |
| Drehzahl                                 | $n = 2850 \text{ U/min}$        | Oberflächenfaktor                | $b_s = 0.85$                   |
| Werkstoff Stahl: Probendurchmesser 10 mm |                                 | Betriebsfaktor                   | $C_B = 1.2$                    |
| Wechselfestigkeit                        | $\sigma_w = 200 \text{ N/mm}^2$ | Sicherheitsfaktor gegen Fließen  | $S_F = 1.5$                    |
| Bruchlast                                | $\sigma_B = 500 \text{ N/mm}^2$ | Sicherheitsfaktor gegen Bruch    | $S_B = 2.5$                    |
| Streckgrenze                             | $\sigma_S = 350 \text{ N/mm}^2$ | Sicherheitsfaktor gegen Ermüdung | $S_D = 1.5$                    |

## Lösung

Anzahl Lastschwingspiele in 2 Jahren  $N = 2850 \frac{1}{\text{min}} \cdot 60 \frac{\text{min}}{\text{h}} \cdot 24 \frac{\text{h}}{\text{d}} \cdot 365 \frac{\text{d}}{\text{a}} \cdot 2 = 3.0 \cdot 10^9$

Die Welle muss dauerfest sein, da Lastspielzahl  $> 10^7$ .

### a) Gestaltfestigkeitsdiagramm

Umrechnung der Festigkeitswerte der ungekerbten Probe auf das gekerbte Bauteil:

Wechselfestigkeit:

$$\sigma_{wk} = b_0 \cdot b_s \cdot \frac{1}{\beta_k} \cdot \sigma_w = 0.94 \cdot 0.85 \cdot \frac{1}{1.9} \cdot 200 \text{ N/mm}^2 = 0.421 \cdot 200 \text{ N/mm}^2 = 84.1 \text{ N/mm}^2$$

Streckgrenze:

$$\sigma_{sk} = b_0 \cdot b_s \cdot \frac{1}{\beta_k} \cdot \sigma_S = 0.94 \cdot 0.85 \cdot \frac{1}{1.9} \cdot 350 \text{ N/mm}^2 = 0.421 \cdot 350 \text{ N/mm}^2 = 147 \text{ N/mm}^2$$

Bruchlast:

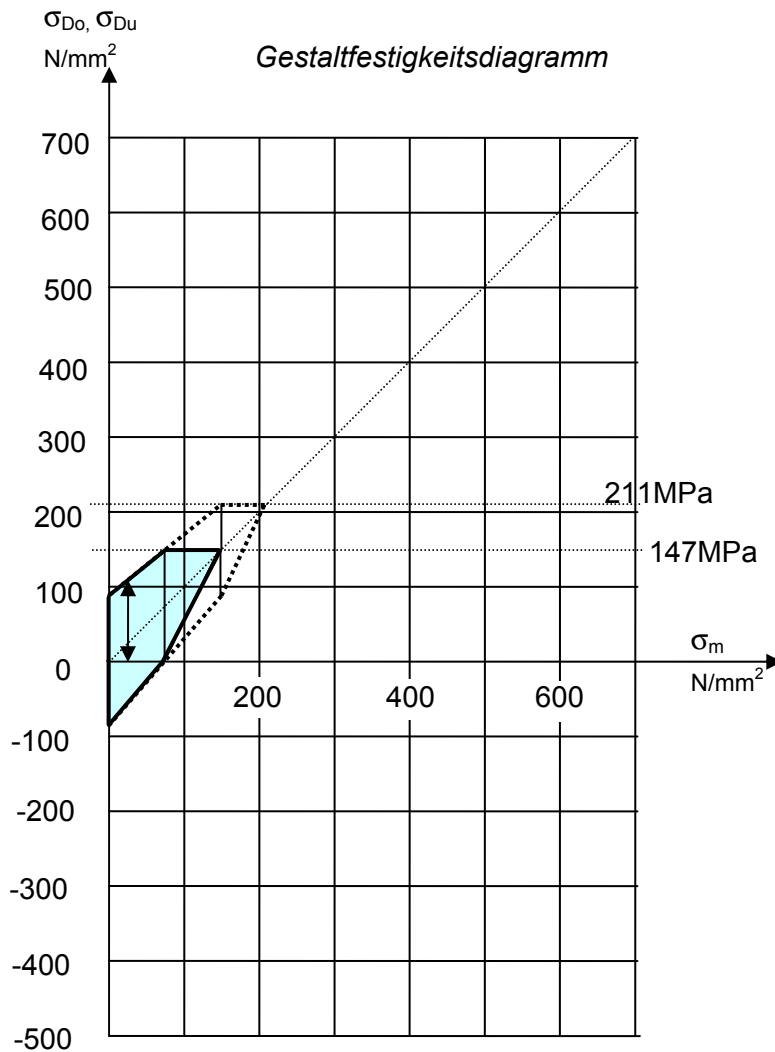
$$\sigma_{Bk} = b_0 \cdot b_s \cdot \frac{1}{\beta_k} \cdot \sigma_B = 0.94 \cdot 0.85 \cdot \frac{1}{1.9} \cdot 500 \text{ N/mm}^2 = 0.421 \cdot 500 \text{ N/mm}^2 = 211 \text{ N/mm}^2$$

Mit diesen Werten wird das genäherte Gestaltfestigkeitsdiagramm gezeichnet:

$$\frac{\sigma_{wk}}{2} = \frac{84.1 \text{ N/mm}^2}{2} = 42 \text{ N/mm}^2 \text{ wird vom Punkt } (\sigma_D = \sigma_{Bk} = 211 \text{ N/mm}^2; \sigma_m = 211 \text{ N/mm}^2)$$

nach links abgetragen, der gefundene Punkt mit  $(\sigma_D = \sigma_{wk} = 84.1 \text{ N/mm}^2; \sigma_m = 0 \text{ N/mm}^2)$

verbunden. Die gefundenen Linien werden so an der 45°-Geraden „gespiegelt“, dass die vertikal gemessenen Abstände gleich sind.



b) Auswertung des Gestaltfestigkeitsdiagrammes und der Festigkeitsbedingungen:

Bei der Mittelspannung von  $\sigma_m = 25 \frac{N}{mm^2}$  wird eine dauernd ertragbare Oberspannung von  $\sigma_{Dko} = 107 \frac{N}{mm^2}$  gemessen und eine Spannungsamplitude von  $\sigma_{Ak} = 107 - 25 = 82 \frac{N}{mm^2}$  berechnet.

Festigkeitsbedingungen:

Ermüden:  $\sigma_{ak} < \sigma_{Azul} = \frac{\sigma_{Ak}}{C_B \cdot S_F} \rightarrow 25 MPa < 45.6 MPa = \frac{82 MPa}{1.2 \cdot 1.5}$  Bedingung erfüllt

Bruch:  $\sigma_{max} < \sigma_{Bzul} = \frac{\sigma_{Bk}}{C_B \cdot S_B} \rightarrow 50 MPa < 70 MPa = \frac{211 MPa}{1.2 \cdot 2.5}$  Bedingung erfüllt

Plastisches Fließen:  $\sigma_{max} < \sigma_{Szul} = \frac{\sigma_{Sk}}{C_B \cdot S_F} \rightarrow 50 MPa < 81.7 MPa = \frac{147 MPa}{1.2 \cdot 1.5}$  Bedingung erfüllt

c) Die Festigkeitsbedingungen sind erfüllt, das Bauteil ist unter der herrschenden Beanspruchung dauerfest. Somit wird auch die Lebensdauer von 2 Jahren erreicht.

## 2 Plastoermüdung (LCF)

---

Bei einem Werkstoff ( $b=0.5$ ) wurde bei einer dynamischen Belastung oberhalb der Streckgrenze eine Bruchlastspielzahl  $N_{B1}=10^3$  gemessen.

Berechnen Sie, welche Bruchlastspielzahl zu erwarten ist, wenn man die plastische Amplitude verdreifacht.

*Lösung:*

*Manson-Coffin-Gesetz (Plastoermüdung)*  $\Delta \varepsilon_{pl} \cdot N_B^b = C_{MC}$

*Bei Verdreifachung der plastischen Amplitude  $\varepsilon_{apl}$  wird auch die plastische Schwingbreite  $\Delta \varepsilon_{pl} = 2 \cdot \varepsilon_{apl}$  verdreifacht:*

$$\Delta \varepsilon_{pl2} = 3 \cdot \Delta \varepsilon_{pl1}$$

$$\Delta \varepsilon_{pl2} \cdot N_{B2}^b = C_{MC} = \Delta \varepsilon_{pl1} \cdot N_{B1}^b$$

$$N_{B2} = \left( \frac{\Delta \varepsilon_{pl1}}{\Delta \varepsilon_{pl2}} \right)^{\frac{1}{b}} \cdot N_{B1} = \left( \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{0.5}} \cdot N_{B1} = 0.11 \cdot N_{B1} = 0.11 \cdot 10^3$$

### 3 Restlebensdauer

Die Zürcher Hardbrücke wird täglich von PKW's Bussen und LKW's genutzt. Vor dem Bau der Brücke wurde für jeden Fahrzeugtyp separat eine Belastungsanalyse durchgeführt und die Bruchlastspielzahl ermittelt mit folgendem Ergebnis:

| Fahrzeugtyp | Bruchlastspielzahl N |
|-------------|----------------------|
| PKW         | $10^8$               |
| Bus         | $3 \cdot 10^6$       |
| LKW         | $10^6$               |

Nach Eröffnung der Hardbrücke stellte sich in einer Verkehrsanalyse heraus, dass die Brücke täglich von 1800 PKW's, 200 Bussen und 100 LKW's befahren wird. Zum Entsetzen der Zürcher Verkehrsplaner wichen diese Werte erheblich von den zur Planung der Brücke herangezogenen Werten ab. Zehn Jahre nach Eröffnung der Brücke wird eine Sperrung der Brücke für PKW's und LKW's ins Auge gefasst.

- Wie lange könnten Sie nun die Brücke noch sicher im VBZ-Bus überqueren?

#### Lösung

*Palmgren-Miner-Regel: Schädigungsvariable*  $D = \sum_i \frac{N_i}{N_{Bi}}$ ; Bruch tritt ein, wenn  $D = 1$

*Belastungszyklen in 10 Jahren:*

*PKW:*  $N_{PKW} = 1800 \cdot 365 \cdot 10 = 6570000$

*Bus:*  $N_{Bus} = 200 \cdot 365 \cdot 10 = 730000$

*LKW:*  $N_{LKW} = 100 \cdot 365 \cdot 10 = 365000$

*Schädigung der Brücke nach 10 Jahren:*

$$D_{10} = \frac{N_{PKW}}{N_{BPKW}} + \frac{N_{Bus}}{N_{BBus}} + \frac{N_{LKW}}{N_{BLKW}} = \frac{6570000}{10^8} + \frac{730000}{3 \cdot 10^6} + \frac{365000}{10^6} = 0.674$$

*Zeit  $t_2$ , in welcher die Schädigungsreserve  $1 - D_{10} = 1 - 0.674 = 0.326$  durch den Bus allein aufgebraucht wird:*

$$1 - D_{10} = \frac{N_{Bus2}}{N_{BBus}} = 0.326 \rightarrow N_{Bus2} = 0.326 \cdot N_{BBus} = 0.326 \cdot 3 \cdot 10^6 = 0.978 \cdot 10^6$$

$$t_2 = \frac{0.978 \cdot 10^6}{200 \cdot 365} = 13.4 \text{ a}$$

## 4 Schädigungsvorgänge bei schwingender Beanspruchung

---

Welche Schädigungsvorgänge laufen bei schwingender Beanspruchung ab?  
(Vgl. Skript)

*Lösung*

- a) *Lokalisierung, Verfestigung: Versetzungen laufen bei Spannungen unterhalb der Fließgrenze auf „persistenten Gleitbändern“ hin- und her. Verfestigung in angrenzenden Bereichen.*
- b) *Risskeimbildung durch*
  - *Extrusionen und Intrusionen mit Bildung von Kerben;*
  - *durch inkompatible Verformung benachbarter Körner;*
  - *Debonding von harten Einschlüssen (Ablösen vom Grundmaterial);*
  - *Brechen harter Einschlüsse*
- c) *Stabile Rissausbreitung: langsames Risswachstum. Bildung von Schwingungsstreifen (Ripples), ev. Rastlinien.*
- d) *Instabiles Risswachstum: Restgewaltbruch.*

## 5 Ermüdungsfeste Werkstoffe

---

Welche Eigenschaften zeichnen ermüdungsfeste Werkstoffe aus?

*Lösung*

*Ermüdungsfeste Werkstoffe haben*

- a) *Hohe Zähigkeit*
- b) *Niedrige Stapelfehlerenergie: geringere Lokalisierungsneigung, weniger persistente Gleitbänder.*
- c) *Feine Gleitverteilung*
- d) *Fehlerfreie Oberflächenschichten*
- e) *Druckspannungen an der Bauteil-Oberfläche*
- f) *Porenfreier Werkstoff (Durchschmieden)*