

Werkstoffe und Fertigung II
Prof.Dr. K. Wegener

Sommersemester 2007

Name	
Vorname	
Legi-Nr.	

Übung 12

Polymere

Musterlösung

Ausgabe: 14.06.2007

Abgabe: 14./21.6.2007

Lernziele Werkstoffe und Fertigung II, Kap. 21, Kap. 22, Kap.23

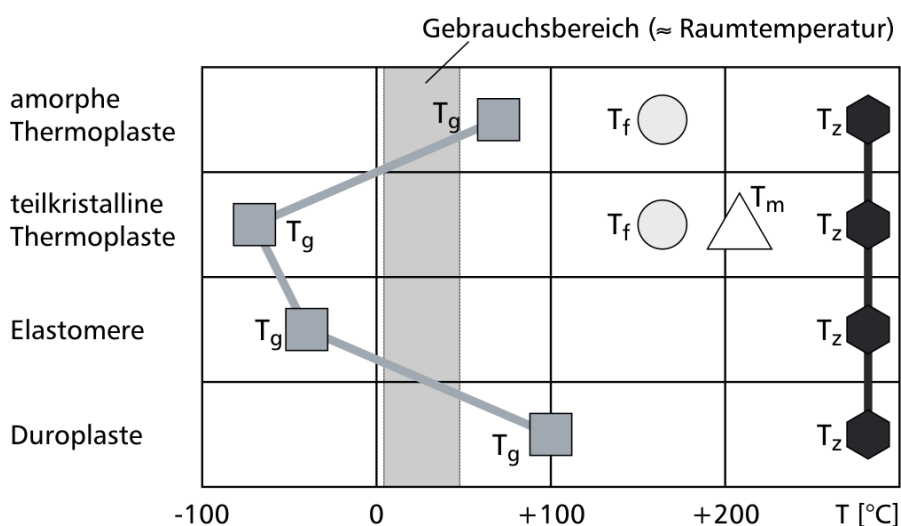
Kerninformationen

1 Bildung von Makromolekülen aus Monomeren

Typische Verknüpfungsarten		
Verknüpfungsart der Grundmoleküle	Beispiele (synthetisch)	
Art der Bindung	Symbol	
Kohlenstoff-Kohlenstoff-Bindung	---C---C---	Polyethylen, Kautschuk
Esterbindung	$\text{---C(=O)---O---C---}$	Polyesterfasern
Amidbindung	$\text{---C(=O)---NH---C---}$	Polyamidfasern (Nylon, Perlon)
Urethanbindung	$\text{---NH---C(=O)---O---}$	Polyurethane
Ätherbindung	---C---O---C---	Polymerisate von Formaldehyd

Reaktionsfähige Endgruppen bei Monomeren
der Wasserstoff bei Aromaten ---H die Hydroxylgruppe von Alkoholen ---OH die Aldehydgruppe des Formaldehyds ---C(=O)H die Carboxylgruppe von organischen Säuren ---C(=O)OH die Isocyanatgruppe von Isocyanaten ---N=C=O die Epoxidgruppe von Polyepoxiden ---CH---CH_2 $\quad \quad \quad \backslash \quad /$ $\quad \quad \quad \text{O}$ die Amidogruppe von Amiden und Polyamiden ---CO---NH_2 die Aminogruppe ---NH_2

2 $T_g - T_f - T_m - T_z$ – Temperaturen

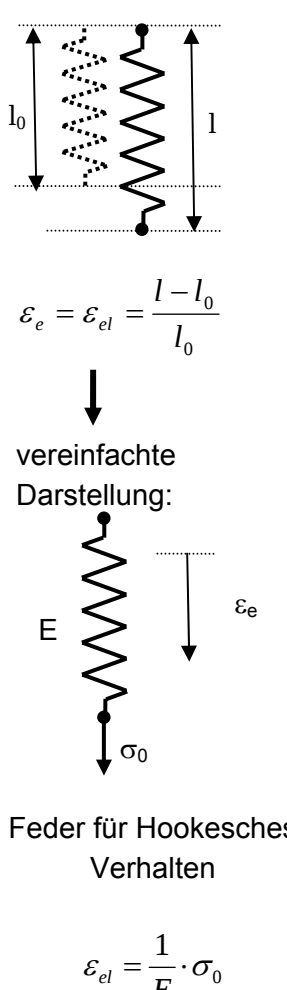
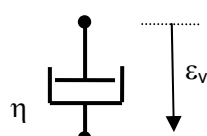
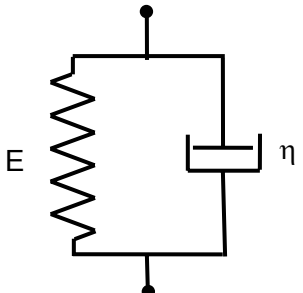


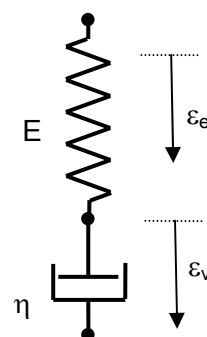
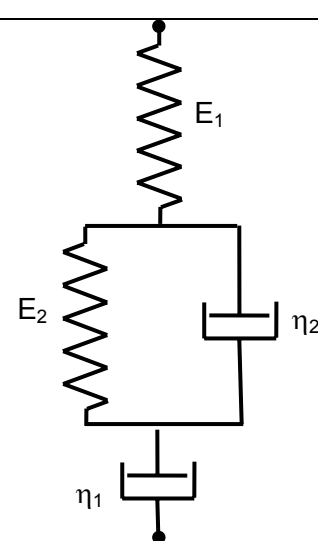
T_g ... Glastemperatur
 T_f ... Fliesstemperatur (Zusammenhalt in den amorphen Bereichen geht verloren)
 T_m ... Schmelztemperatur (Kristallite lösen sich auf)
 T_z ... Zersetzungstemperatur

3 Rheologische Modelle für das Verhalten von Polymeren

Kriechversuche: $\varepsilon = 0$ für $t < 0$; $\sigma = 0$ für $t < 0$; $\sigma = \sigma_0$ für $t \geq 0$

Relaxationsversuche: $\varepsilon = 0$ für $t < 0$; $\sigma = 0$ für $t < 0$; $\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{vis} = \varepsilon_0$ für $t \geq 0$

 $\varepsilon_e = \varepsilon_{el} = \frac{l - l_0}{l_0}$ vereinfachte Darstellung: Feder für Hookesches Verhalten $\varepsilon_{el} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_0$	 Dämpfer für Newtonsches Verhalten $\dot{\varepsilon}_{vis} = \frac{1}{\eta} \cdot \sigma_0$	 mögliche Kombination für viskoelastisches Verhalten Voigt-Kelvin-Modell $\varepsilon_{vel} = \frac{1}{E_r} \cdot \left(1 - \exp\left\{ -\frac{t}{\tau} \right\} \right) \cdot \sigma_0$ $\tau = \frac{\eta}{E}$
--	---	--

	
Maxwell-Modell Kriechen ($\sigma = \text{const}$):	Maxwell-Voigt-Modell: Kriechen ($\sigma = \text{const}$):

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \sigma_0$$

Relaxation: $\varepsilon_0 = \varepsilon_e + \varepsilon_v = \text{const.}$:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{\eta} \cdot t\right) \quad \text{mit } \sigma_0 = \varepsilon_0 \cdot E$$

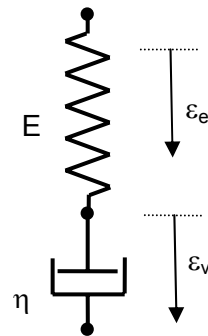
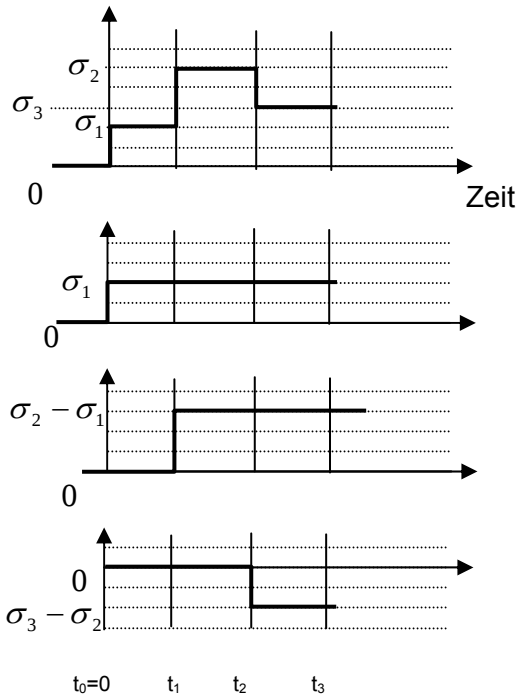
$\eta/E = t_R$ Relaxationszeit $\rightarrow t_R \cdot E/\eta = 1$,

$\exp(-1) = 0.37$

(Spannung σ ist auf 37% abgefallen)

$$\varepsilon_e + \varepsilon_v + \varepsilon_r = \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} \cdot t\right) \right) \right\} \cdot \sigma_0$$

4 Kriechen unter wechselnden Spannungsniveaus, Superpositionsprinzip.



Da die Deformationen von der Zeit und den Spannungen linear abhängen, darf die Gesamtdehnung als Summe der Dehnungen, welche die einzelnen Spannungsanteile jeweils allein bewirken würden, berechnet werden. Die Dauer wird vom Flankenanstieg bis zu der Zeit, zu welcher man die Dehnungen kennen will, hier t_3 , gemessen:

Niveau $\sigma_1 = 2$ während $t_3 - t_0 = 3$, Niveau $\sigma_2 - \sigma_1 = 3$ während $t_3 - t_1 = 2$, Niveau $\sigma_3 - \sigma_2 = -2$ während $t_3 - t_2 = 1$.

Beispiel Maxwell-Modell

$$\varepsilon(t_3) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t_3}{\eta} \right) \sigma_1 + \left(\frac{1}{E} + \frac{t_3 - t_1}{\eta} \right) \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) + \left(\frac{1}{E} + \frac{t_3 - t_2}{\eta} \right) \cdot (\sigma_3 - \sigma_2) = \frac{\sigma_3}{E} + \dots (**)$$

mit obigen Schemazahlen und $E=500$, $\eta=600$:

$$\varepsilon(t_3) = \left(\frac{1}{500} + \frac{3}{600} \right) \cdot 2 + \left(\frac{1}{500} + \frac{2}{600} \right) \cdot 3 + \left(\frac{1}{500} + \frac{1}{600} \right) \cdot (-2)$$

$$= (0.002 + 0.005) \cdot 2 + (0.002 + 0.00333) \cdot 3 + (0.002 + 0.00167) \cdot (-2) = 0.0227$$

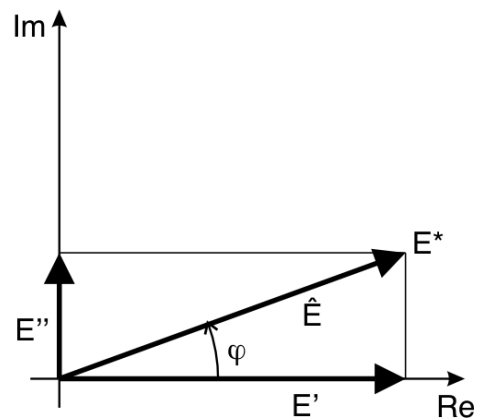
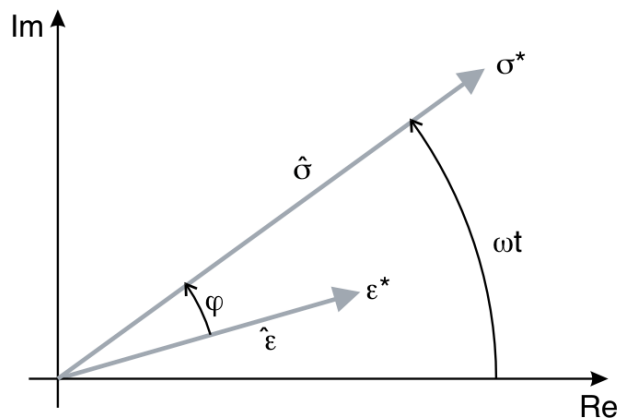
(**) die formelmässige Auswertung zeigt, dass für den elastischen Anteil der Dehnung bei t_3 tatsächlich nur die aktuelle Spannung massgebend ist.

(Anmerkung: Statt der horizontalen Schnitte, wie oben dargestellt, könnten auch vertikale Schnitte gelegt werden, welche die Abschnitte $t_0 \dots t_1$, $t_1 \dots t_2$, $t_2 \dots t_3$ definieren. Dann müssten für die Abschnitte $t_1 \dots t_2$, $t_2 \dots t_3$ Anfangsdehnungen ungleich null berücksichtigt werden. Die unter 2) angegebenen Formeln wären zu modifizieren.)

5 Dynamische Beanspruchung

Kerninformationen

- Spannung, Dehnung und Moduli in der Gauss'schen Zahlenebene



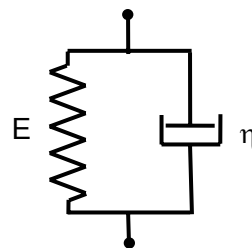
Eulerbeziehung $\sigma^* = \hat{\sigma} \cdot \cos \omega \cdot t + i \cdot \hat{\sigma} \cdot \sin \omega \cdot t = \hat{\sigma} \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \hat{\sigma} \cdot e^{i\omega t} \\ \varepsilon^* &= \hat{\varepsilon} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)} \\ E^* &= \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \cdot e^{i\varphi} \\ E^* &= \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ E^* &= \underbrace{\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \cdot \cos \varphi}_{E'} + i \underbrace{\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} \cdot \sin \varphi}_{E''} \\ E^* &= E' + iE'' \end{aligned}$$

Ableitung nach der Zeit entspricht Multiplikation mit $i\omega$: $\dot{\sigma}^* = i\omega \cdot \sigma^*$; $\dot{\varepsilon}^* = i\omega \cdot \varepsilon^*$

$$\hat{E} = \sqrt{E'^2 + E''^2} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}}$$

Voigt-Kelvin-Modell: $E' = E$, $E'' = \omega \eta$



1 Bindungskräfte bei Polymeren

In Polymeren wirken unterschiedliche Bindungskräfte.

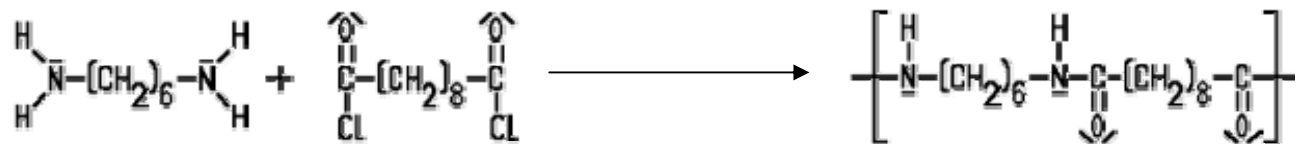
- Wo wirken Hauptvalenzen?
- Von welchem Bindungstyp sind die Hauptvalenzen?
- Wo wirken Nebenvalezen?
- Von welchem Bindungstyp sind die Nebenvalezen?

Lösung

- Die Hauptvalenzen sind die Bindungskräfte innerhalb der Hauptketten und der Nebenketten und der Anschlüsse der Neben- an die Hauptketten.
- Hauptvalenzen sind Atombindungen (Elektronenpaarbindung, kovalente Bindung).
- Die Nebenvalezen wirken zwischen verschiedenen Ketten (Haupt- oder Nebenketten)
- Nebenvalezenkräfte sind
 - Dispersionskräfte (Van-der-Waals-Kräfte)
 - Dipolkräfte
 - Wasserstoffbrücken
 - Ionenbindungskräfte

2 Chemische Verknüpfung von Monomeren

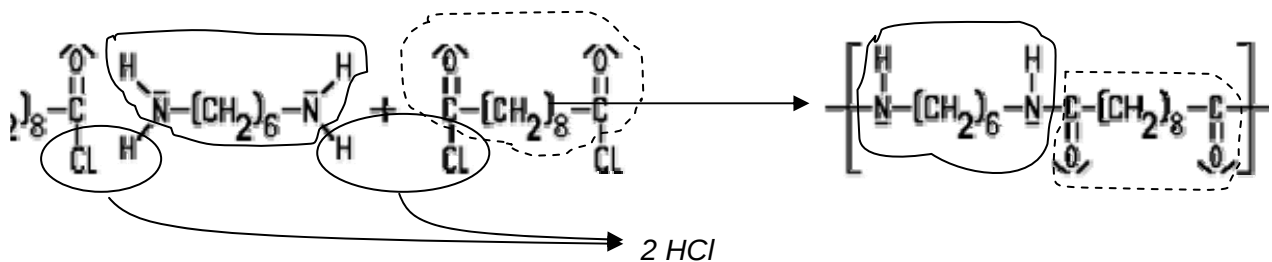
Ergänzen Sie die nachstehende Reaktionsgleichung, nach welcher aus Hexamethyldiamin und Sebacinsäuredichlorid Polyamid 6.10 gebildet wird (wässrige Lösung).



Hexamethyldiamin Sebacinsäuredichlorid

Polyamid 6.10 (Nylon)

Lösung



Hexamethyldiamin Sebacinsäuredichlorid

Polyamid 6.10 (Nylon)

Es handelt sich um eine Polykondensation, weil ein niedrigmolekularer Stoff, HCl, abgespalten wird.

3 Sterische Konfiguration

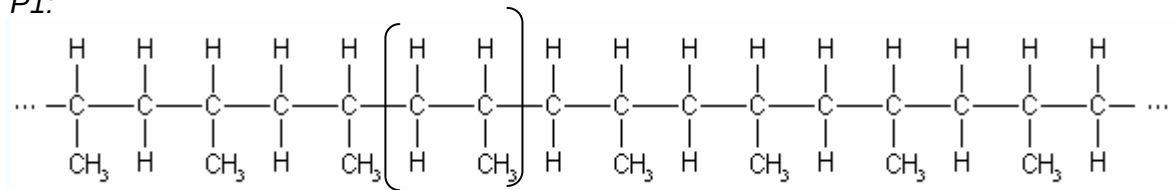
- Wodurch unterscheiden sich die folgenden Polymere P_1 und P_2 ?
- Wie sieht das Monomer aus, aus welchem die Polymere gebildet wurden?
- Mit welchem Prozess wurden diese Makromoleküle erzeugt?
- Wie bezeichnet man CH_3 in diesem Zusammenhang?

Lösung a)

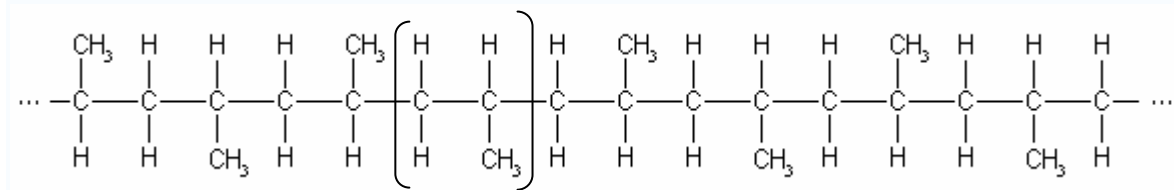
P_1 : isotaktisch, die Methylgruppe CH_3 ist regelmässig einseitig angeordnet

P_2 : syndiotaktisch, die Methylgruppe CH_3 ist regelmässig wechselseitig angeordnet.

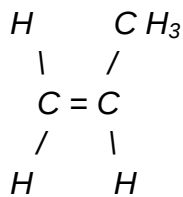
P_1 :



P_2 :



b) Das Monomer ist Propen (Propylen) C_3H_6



c) Polymerisation

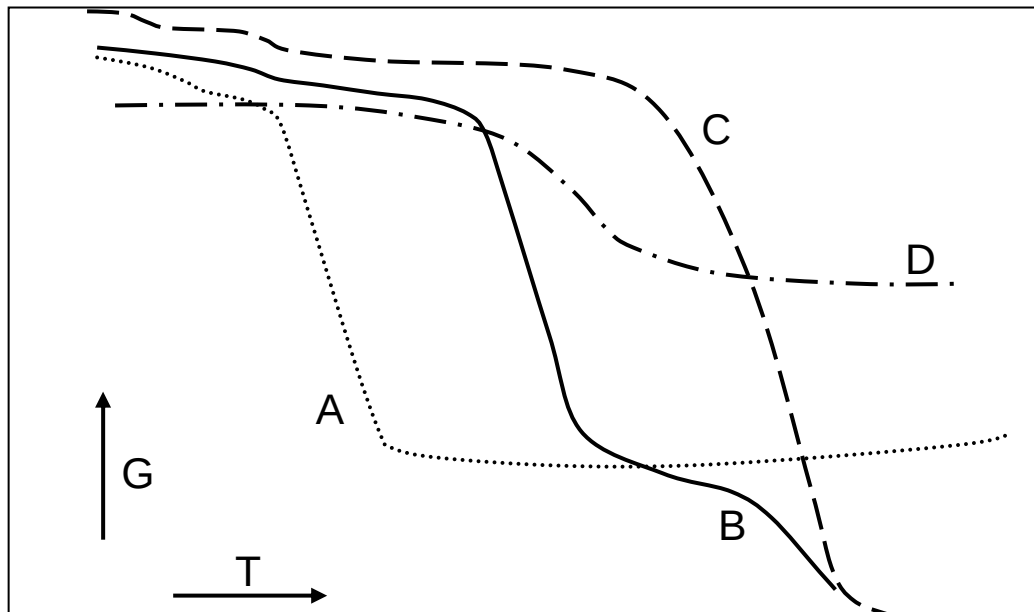
- Einheitliche Ausgangsmoleküle (Monomere)
- Bildung des Polymers durch Öffnen der Doppelbindung

d) Die Methylgruppen CH_3 bezeichnet man als „Substituenten“

4 Thermomechanische Kurven

Gegeben sind die Schubmodul G – Zeit T - Kurven von vier Polymeren.

- Geben sie die Typen der Polymere an.
- Zeichnen Sie den üblichen Gebrauchsbereich ein.
- Zeichnen Sie die Glas temperatur und die Schmelztemperatur ein.
- Skizzieren Sie die entsprechenden Makromolekül-Strukturen.

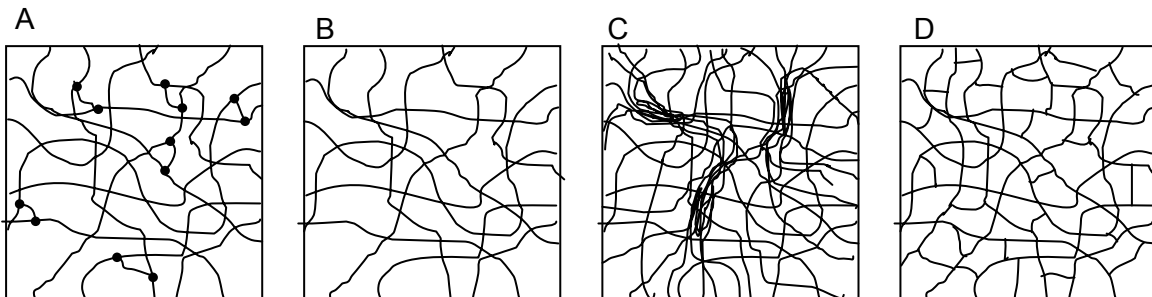


Lösung:

- a) A: Elastomer, B: amorpher Thermoplast C: teilkristalliner Thermoplast, D: Duromer

	Gebrauchsbereich	Glastemperatur T_G	Schmelztemp. T_S
A		T_G	T_S
B		T_G	T_S
C		T_G	T_S
D		T_G	

Molekülstrukturen:



(Die Linien stellen Fadenmoleküle dar. Bei D sind Kreuzungsstellen der Linien kovalente Verbindungen = Vernetzung, bei B und C nicht. Bei A sind die kovalenten Bindungen mit Kreisen markiert)

5 Teilkristalline Thermoplaste

Wie wirkt sich ein höherer Kristallinitätsgrad auf die folgenden Eigenschaften eines Thermoplasten aus:

- a) Schmelztemperaturbereich
- b) Festigkeit
- c) Bruchdehnung
- d) Transmissionsgrad für Licht
- e) Dichte

Lösung

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| a) Schmelztemperaturbereich | liegt bei höheren Temperaturen |
| b) Festigkeit | steigt |
| c) Bruchdehnung | sinkt |
| d) Transmissionsgrad (Licht) | sinkt |
| e) Dichte | steigt |

6 Weichmacher

- a) Bei welchen Kunststofftypen werden Weichmacher eingesetzt und
- b) in welchem Zustandsbereich?
- c) Wie wirken Weichmacher?

Lösung

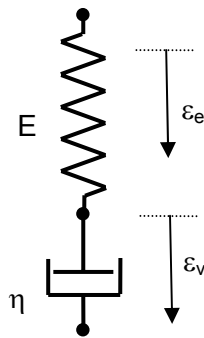
- a) Weichmacher sind wichtig bei amorphen Thermoplasten
- b) im Glaszustand, d.h. im energieelastischen Bereich.
- c) Weichmacher sind niedermolekulare Substanzen mit polaren Bestandteilen. Sie gewährleisten eine gewisse Beweglichkeit der Makromoleküle gegeneinander auch unterhalb der Glastemperatur.

7 Fließgrenze

Das Verhalten eines Kunststoffes lasse sich durch ein Maxwell-Modell beschreiben.

$E = 3000 \text{ MPa}$, $\eta = 1.8 \cdot 10^{14} \text{ Pa s}$, $\varepsilon_{f\infty} = 0.9\%$.

Mit welcher Spannung darf ein Bauteil aus diesem Kunststoff beansprucht werden, wenn es innerhalb von 10'000 Stunden die Dehnungsgrenze $\varepsilon_{f\infty}$, bei deren Überschreiten Schädigungen auftreten, nicht erreichen soll?



Maxwell-Modell

Lösung

Maxwell-Modell, Kriechen ($\sigma_0 = \text{const}$):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_v = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \sigma_0$$

$$\sigma_0 = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right)} = \frac{0.009}{\frac{1}{3000 \text{ MPa}} + \frac{10000 \text{ h} \cdot 3600 \text{ s/h} \cdot 10^6 \text{ 1/M}}{1.8 \cdot 10^{14} \text{ Pas}}} = \frac{0.009}{3.33 \cdot 10^{-4} \text{ MPa}^{-1} + 0.2 \text{ MPa}^{-1}} = 0.045 \text{ MPa}$$

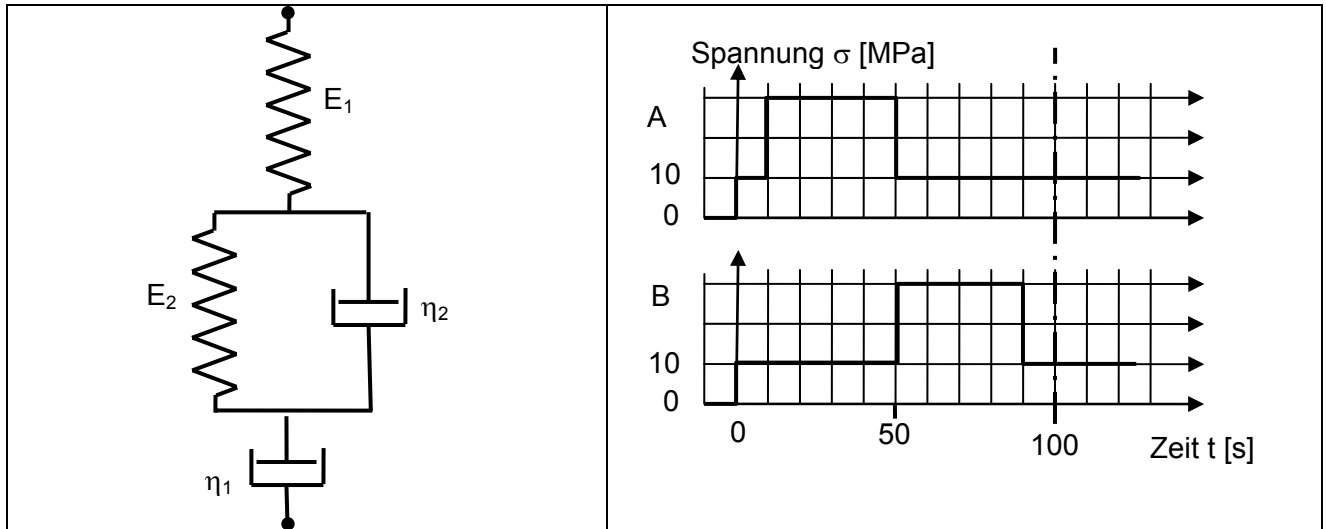
8 Superpositionsprinzip

Gegeben ist ein Polymer, das sich nach dem Maxwell-Voigt-Modell verhält ($E_1 = 4000 \text{ MPa}$, $E_2 = 2200 \text{ MPa}$, $\eta_1 = 7 \cdot 10^{11} \text{ Pas}$, $\eta_2 = 6.2 \cdot 10^{10} \text{ Pas}$). Es wird zwei unterschiedlichen Belastungsverläufen unterworfen:

Verlauf A: 10 s mit 10 MPa, 40 s mit 30 MPa, 50 s mit 10 MPa.

Verlauf B: 50 s mit 10 MPa, 40 s mit 30 MPa, 10 s mit 10 MPa.

Wie hoch ist die Dehnung zur Zeit 100 s für die beiden Fälle?

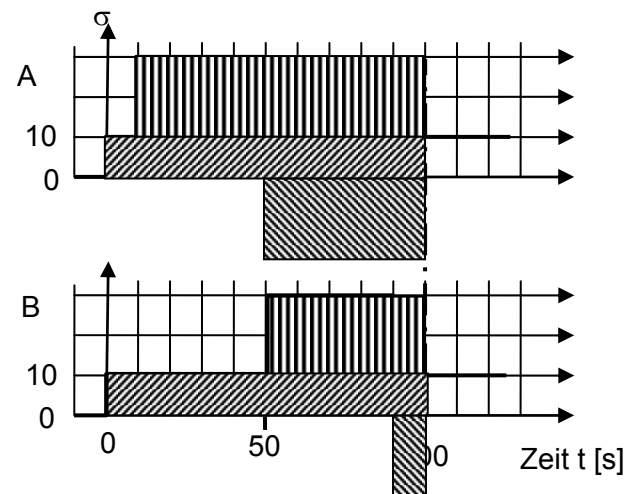


Maxwell-Voigt-Modell

Lösung

Maxwell-Voigt-Modell, Kriechen, $\sigma_0 = \text{const.}$ abschnittsweise.

Das Superpositionsprinzip sagt aus, dass man den Spannungsverlauf als Überlagerung von Belastungen mit konstanter Spannung allenfalls auch negativen Vorzeichens bis zum Beobachtungszeitpunkt erzeugt.



$$\varepsilon_e + \varepsilon_v + \varepsilon_r = \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta_2} \cdot t \right) \right) \right\} \cdot \sigma_0$$

$$\tau = \frac{\eta_2}{E_2} = \frac{6.2 \cdot 10^{10} \text{ Pas}}{2.2 \cdot 10^9 \text{ Pa}} = 27.9 \text{ s}$$

Verlauf A: 10 MPa während 100 s, 20 MPa während 90 s, -20 MPa während 50 s

$$\varepsilon_1 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{100 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} \left(1 - \exp \left(-\frac{2200 \text{ MPa}}{6.2 \cdot 10^4 \text{ MPas}} \cdot 100 \text{ s} \right) \right) \right\} \cdot 10 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{100 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} (1 - 0.02877) \right\} \cdot 10 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \{0.00025 + 0.0001429 + 0.0004415\} \cdot 10 \text{ MPa} = 0.00834$$

$$\varepsilon_2 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{90 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} \left(1 - \exp \left(-\frac{2200 \text{ MPa}}{6.2 \cdot 10^4 \text{ MPas}} \cdot 90 \text{ s} \right) \right) \right\} \cdot 20 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_2 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{90 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} (1 - 0.0410) \right\} \cdot 20 \text{ MP}$$

$$\varepsilon_2 = \{0.00025 + 0.000129 + 0.0004359\} \cdot 20 \text{ MPa} = 0.0163$$

$$\varepsilon_3 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{50 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} \left(1 - \exp \left(-\frac{2200 \text{ MPa}}{6.2 \cdot 10^4 \text{ MPas}} \cdot 50 \text{ s} \right) \right) \right\} \cdot (-20) \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_3 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{50 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} (1 - 0.1696) \right\} \cdot (-20) \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_3 = \{0.00025 + 0.0000714 + 0.0003774\} \cdot (-20) \text{ MPa} = -0.0140$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.00834 + 0.0163 - 0.0140 \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = 0.01064}}$$

Verlauf B: 10 MPa während 100 s, 20 MPa während 50 s, -20 MPa während 10 s

$$\varepsilon_1 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{100 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} \left(1 - \exp \left(-\frac{2200 \text{ MPa}}{6.2 \cdot 10^4 \text{ MPas}} \cdot 100 \text{ s} \right) \right) \right\} \cdot 10 \text{ MPa} = 0.00834$$

$$\varepsilon_1 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{100 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} (1 - 0.02877) \right\} \cdot 10 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_1 = \{0.00025 + 0.0001429 + 0.0004415\} \cdot 10 \text{ MPa} = 0.00834$$

$$\varepsilon_2 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{50 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} \left(1 - \exp \left(-\frac{2200 \text{ MPa}}{6.2 \cdot 10^4 \text{ MPas}} \cdot 50 \text{ s} \right) \right) \right\} \cdot 20 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_2 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{50 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} (1 - 0.1696) \right\} \cdot 20 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_2 = \{0.00025 + 0.0000714 + 0.0003774\} \cdot 20 \text{ MPa} = 0.0140$$

$$\varepsilon_3 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{10 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} \left(1 - \exp \left(-\frac{2200 \text{ MPa}}{6.2 \cdot 10^4 \text{ MPas}} \cdot 10 \text{ s} \right) \right) \right\} \cdot (-20) \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_3 = \left\{ \frac{1}{4000 \text{ MPa}} + \frac{10 \text{ s}}{7 \cdot 10^5 \text{ MPas}} + \frac{1}{2200 \text{ MPa}} (1 - 0.7013) \right\} \cdot (-20) \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_3 = \{0.00025 + 0.00001429 + 0.0001358\} \cdot (-20) \text{ MPa} = -0.008002$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.00834 + 0.0140 - 0.008002 \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = 0.014338}}$$

Folgerung: Bei Fall B liegt zur Zeit t=100s die grössere Gesamtdehnung vor, weil die Wirkung der Zusatzspannung noch nicht so stark abgeklungen ist.

9 Komplexer E-Modul

Eine dynamische Beanspruchung eines Polymers wird durch die folgenden Werte beschrieben:

- Spannungsamplitude $\hat{\sigma} = 43.6 \text{ MPa}$
- Phasenwinkel $\varphi = 0.472$.

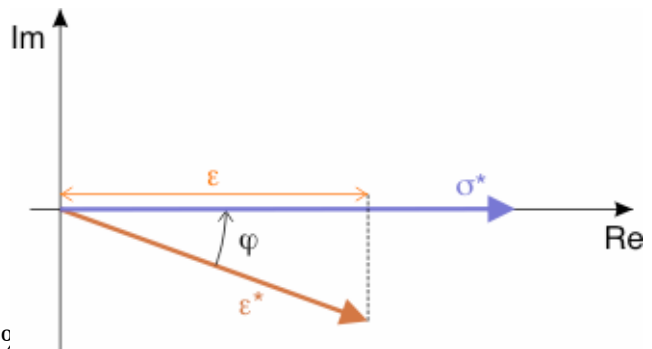
Zum Zeitpunkt des Maximalen Spannungsausschlags wird eine Dehnung von 1.79 % gemessen.

- Berechnen Sie die Dehnungsamplitude.
- Berechnen Sie den komplexen E-Modul.
- Stellen Sie Spannung und Dehnung als Zeigerdiagramm dar.

Lösung:

- a) Zum Zeitpunkt des max. Spannungsausschlags findet man die dargestellte Situation vor: Die Spannung (Realteil) entspricht gerade der Spannungsamplitude. Die momentane Dehnung ε ist der Realteil von ε^* . Die Dehnungsamplitude $\hat{\varepsilon}$ ist der Betrag von ε^* .

$$\hat{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\cos \varphi} = \frac{0.0179}{\cos(0.472 \cdot 180 / 3.141)} = 2.01\%$$



b) $\hat{E} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = \frac{43.6 \text{ MPa}}{0.0201} = 2170 \text{ MPa}$

$$E^* = \hat{E} \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = 2170 \text{ MPa} \cdot (0.8907 + i \cdot 0.4547) = (1932 + i \cdot 987) \text{ MPa}$$

- c) Siehe Skizze zu a); Zeiger beliebig gedreht (aber mit dem gegebenen Phasenwinkel φ dazwischen).

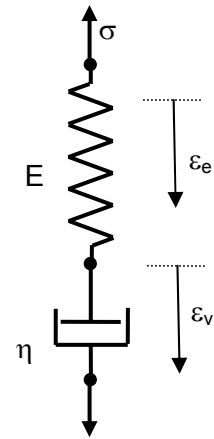
10 Statische und dynamische Beanspruchung

- Ein Kunststoff weist unter einer statischen Belastung von $\sigma = 10 \text{ MPa}$ nach 1000 Stunden eine Gesamt-Dehnung von 1.2% auf.
- Unter einer dynamischen, über der Zeit sinusförmigen Spannung weist er zwischen Spannungsamplitude und Dehnungsamplitude einen Phasenwinkel von 10° auf.

$$\sigma = \hat{\sigma} \cdot \cos \omega \cdot t; \quad \hat{\sigma} = 20 \text{ MPa}; \quad \omega = 62.83 \text{ s}^{-1}$$

Sie wollen das Werkstoffverhalten mit einem Maxwell-Modell abbilden.

- Wie gross ist sein E-Modul?
- Wie gross ist seine Viskositätskonstante η ?
- Geben Sie den komplexen E-Modul an.
- Wie gross ist die Dehnungsamplitude $\hat{\varepsilon}$?



Lösung

a, b)

Für $\varepsilon(t) = \varepsilon_e + \varepsilon_v$ gilt $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$ (vgl. Skizze) (1)

Für die Prozessführung $\sigma = \text{konst} = \sigma_0$ folgt $\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\eta}$ und integriert $\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} \cdot t + C$

und mit der Anfangsbedingung $\varepsilon(t=0) = \frac{\sigma_0}{E} = C$, weil sich die Feder sofort dehnt,

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right) \cdot \sigma_0 \quad (2)$$

Für die Prozessführung $\sigma = \hat{\sigma} \cdot \cos(\omega \cdot t)$; $\varepsilon = \hat{\varepsilon} \cdot \cos(\omega \cdot t - \varphi)$, mit komplexen Zahlen geschrieben

$\sigma^* = \hat{\sigma} \cdot e^{i\omega t}$, $\varepsilon^* = \hat{\varepsilon} \cdot e^{i(\omega t - \varphi)}$ folgen

mit $\dot{\varepsilon}^* = \frac{\dot{\sigma}^*}{E} + \frac{\sigma^*}{\eta} = i\omega \cdot \varepsilon^* = \left(\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\eta} \right) \cdot \sigma^*$

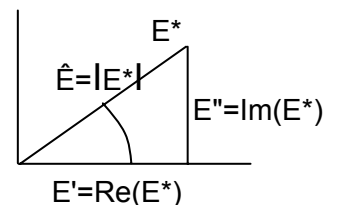
$$\rightarrow E^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = \frac{i\omega}{\frac{i\omega}{E} + \frac{1}{\eta}} = \frac{\omega\eta E}{\omega\eta - iE} = \frac{\omega\eta E}{\omega\eta - iE} \cdot \frac{\omega\eta + iE}{\omega\eta + iE} = \frac{\omega^2\eta^2 E + i\omega\eta E^2}{\omega^2\eta^2 + E^2}$$

$$E^*(\omega) = \frac{\omega^2\eta^2 E + i\omega\eta E^2}{\omega^2\eta^2 + E^2}; \quad E'(\omega) = \frac{\omega^2\eta^2 E}{\omega^2\eta^2 + E^2}; \quad E''(\omega) = \frac{\omega\eta E^2}{\omega^2\eta^2 + E^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{E''}{E'} = \frac{\omega\eta E^2}{\omega^2\eta^2 E} = \frac{E}{\omega\eta} \quad (3)$$

somit $\frac{1}{E} = \frac{1}{\omega \cdot \eta \cdot \tan \varphi}$ (4)

(4) in (2) eingesetzt ergibt



$$\varepsilon = \left(\frac{1}{\omega \cdot \eta \cdot \tan \varphi} + \frac{t}{\eta} \right) \cdot \sigma_0 \rightarrow \eta = \frac{\sigma_0}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{\omega \cdot \tan \varphi} + t \right) = \frac{10 \text{ MPa}}{0.012} \cdot \left(\frac{1}{62.83 \text{ s}^{-1} \cdot \tan 10^\circ} + 1000 \cdot 3600 \text{ s} \right) = 3 \cdot 10^{15} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

in (3) eingesetzt, aufgelöst:

E-Modul $E = \omega \cdot \eta \cdot \tan \varphi = 62.83 \text{ s}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{15} \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot 0.176 \Rightarrow \underline{\underline{E = 3.32 \cdot 10^{16} \text{ Pa}}}$

(Zum Vergleich: $E_{\text{Stahl}} = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $E_{\text{Diamant}} = 12 \cdot 10^5 \text{ MPa}$)

(Das gewählte Modell ist ungeeignet zur Beschreibung des beobachteten Verhaltens.)

c) Komplexer *E-Modul* E^* : aus (3)

$$E^* = \frac{\omega^2 \eta^2 E + i \omega \eta E^2}{\omega^2 \eta^2 + E^2} = \frac{62.83^2 \cdot (3 \cdot 10^{15})^2 \cdot 3.32 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-2} \text{ Pa}^2 \text{ s}^2 \text{ Pa} + i 62.83 \cdot 3 \cdot 10^{15} \cdot (3.32 \cdot 10^{16})^2 \text{ s}^{-1} \text{ Pa} \text{ s} \text{ Pa}^2}{62.83^2 \cdot (3 \cdot 10^{15})^2 \text{ s}^{-2} \text{ Pa}^2 \text{ s}^2 + (3.32 \cdot 10^{16})^2 \text{ Pa}^2}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{E^* = (3.22 \cdot 10^{16} + i \cdot 5.67 \cdot 10^{15}) \text{ Pa}}}$$

d) Dehnungsamplitude $\hat{\varepsilon}$ (bei dynamischer Beanspruchung)

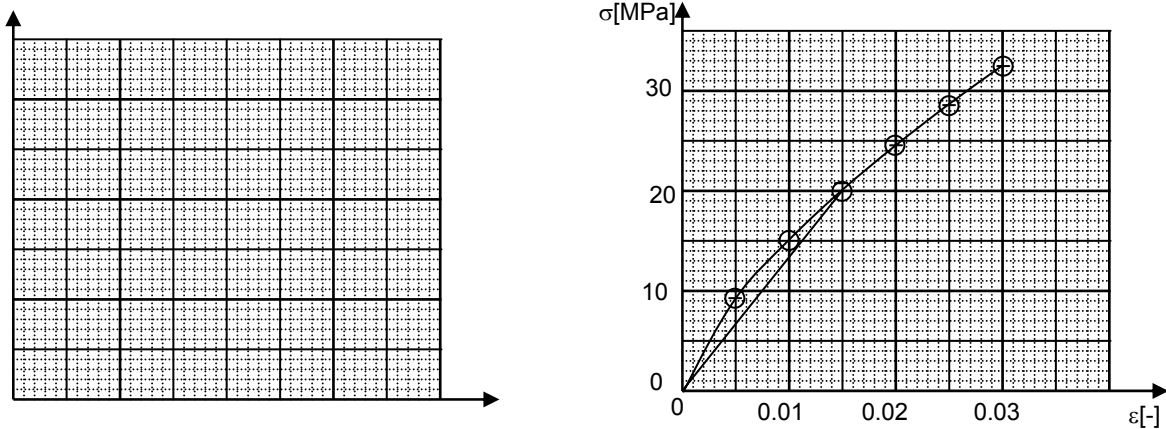
mit $\hat{E} = \sqrt{E'^2 + E''^2} = \sqrt{(3.22 \cdot 10^{16})^2 + (5.67 \cdot 10^{15})^2} \text{ Pa} = 3.270 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$

$$\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\varepsilon}} = \hat{E} \rightarrow \hat{\varepsilon} = \frac{\hat{\sigma}}{\hat{E}} = \frac{20 \cdot 10^6 \text{ Pa}}{3.270 \cdot 10^{16} \text{ Pa}} \rightarrow \underline{\underline{\hat{\varepsilon} = 6.12 \cdot 10^{-10}}}$$

11 Kriechmodul

Die isochrone Spannungs-Dehnungskurve eines Kunststoffes für die Belastungsdauer $t_1=10\text{ h}$ lässt sich im Bereich $0 < \sigma < 40\text{ MPa}$ durch $\sigma = A\varepsilon^n$ mit $A = 378\text{ MPa}$, $n=0.7$ annähern.

- Zeichnen Sie die isochrone Spannungs-Dehnungskurve
- Geben Sie den Kriechmodul für $\sigma = 20\text{ MPa}$ und $t_1 = 10\text{ h}$ an.
- Was ist die geometrische Bedeutung des Kriechmoduls?



Lösung

a) S. Diagramm

b)
$$K = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{20\text{ MPa}}{0.015} = 1330\text{ MPa}$$

c) Der Kriechmodul zu der gegebenen Spannung und Belastungszeit ist die Steigung der Sekante zu der isochronen Spannungs-Dehnungskurve zwischen $(\sigma = 0, \varepsilon = 0)$ und $(\sigma = 20\text{ MPa}, \varepsilon = \varepsilon(\sigma = 20\text{ MPa}, t = 10\text{ h}) = 0.015)$.