Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Center of Mechanics
Prof. Dr. Ch. Glocker
ETH Zentrum
CH- 8092 Zürich

IMES
Institute of Mechanical Systems

Klausur I

25. November 2004, 08:30-10:00

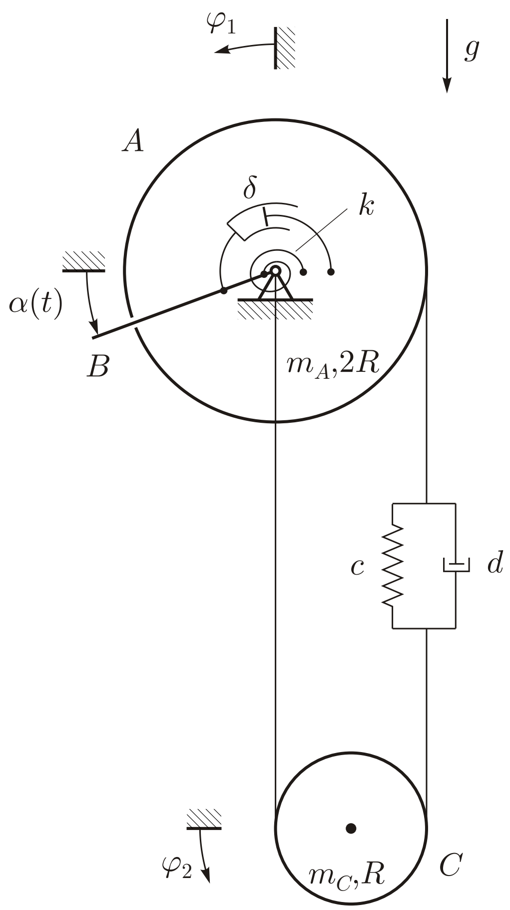
Name	Vorname	ETH-Nummer	Studiengang

	Assistent	Aufg.1	Aufg.2				Punkte	Punkte	Note
1. Korrektur									
2. Korrektur									

Fortsetzung siehe nächste Seite !

Aufgabe 1 (18 Punkte)

Die Scheibe (A) (Masse m_A, Radius $2R$) ist in ihrem Mittelpunkt gelagert und über eine Drehfeder/-dämpfer Kombination (Drehfederkonstante k, Drehdämpferkonstante δ) mit einem masselosen Balken (B) verbunden. Die Lage des Balkens (B) wird über die Wegerregung $\alpha(t)$ beschrieben. An der Scheibe (A) rollt ein masseloses, undehnbares Seil ab, an dessen Ende ein Feder-Dämpfer Element (Federkonstante c, Dämpferkonstante d) hängt. Das untere Ende des Feder-Dämpfer Elementes ist mit einem zweiten masselosen, undehnbaren Seil verbunden, welches um die im Seil liegende Rolle (C) (Masse m_C, Radius R) führt und dann am Mittelpunkt der Rolle (A) mit der Umgebung verbunden ist. Beide Federn sind für $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha(t) = 0$ entspannt. Zwischen den Seilen und den Scheiben tritt kein Gleiten auf. Die beiden Seile können als straff gespannt betrachtet werden. Die Lage der Scheiben wird über die Koordinaten φ_1 und φ_2 beschrieben.



Hinweis:Die Aufgabenteile (f) - (h) lassen sich unabhängig von den Aufgaben (a) - (e) lösen!

(a) Schneiden Sie das System frei!

(b) Geben Sie Kraftgesetze für die Feder und Dämpferelemente als Funktion von φ_1 und φ_2 an?

(c) Stellen Sie Impuls und Drallsätze auf und leiten sie die Bewegungsgleichung in Matrixform her und bringen Sie diese falls noch nicht geschehen auf symmetrische Form.

(d) Bestimmen Sie für $\alpha(t) = 0$ die Gleichgewichtslage $(\varphi_{10}, \varphi_{20})$.

(e) Führen Sie neue Koordinaten $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ ein, welche die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage beschreiben. Wie lauten die Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten?

Für eine bestimmte Parameterwahl lassen sich die Bewegungsgleichungen in folgender Form schreiben:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\varphi}}_1 \\ \ddot{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\varphi}}_1 \\ \dot{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

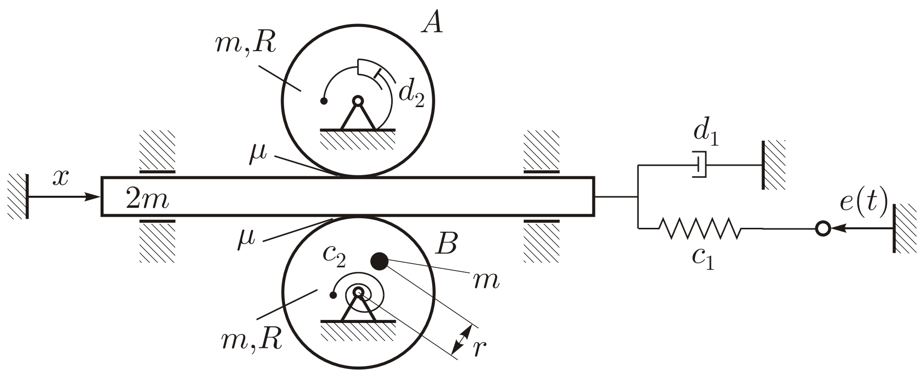
Verwenden Sie für (f), (g) und (h) diese Bewegungsgleichung!

(f) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda^2_{1,2}$ und $\lambda^2_{3,4}$. Wählen Sie $\lambda^2_{1,2} > \lambda^2_{3,4}$.

(g) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten dazugehöhrigen "Eigenvektoren" $\mathbf{u}_{1,2}$ und $\mathbf{u}_{3,4}$. Wählen Sie dabei die erste Komponente der "Eigenvektoren" jeweils zu 1.

(h) Bringen Sie die Bewegungsgleichungen auf Diagonalform.

Aufgabe 2 (20 Punkte)



Ein Balken (Masse $2m$) ist in x-Richtung beweglich gelagert. Am rechten Ende des Balkens wirkt eine Feder (Federkonstante c_1) und ein Dämpfer (Dämpferkonstante d_1). Das zweite Ende des Dämpfers ist fest mit der Umgebung verbunden, das zweite Ende der Feder erfährt eine Wegerregung $e(t)$. Auf jeder Seite des Balkens rollt eine Scheibe (Masse m, Radius R) ab. Zwischen der oberen Scheibe (A) und der Umgebung wirkt ein Drehdämpfer (Dämpfungskonstante d_2), zwischen der unteren Scheibe (B) und der Umgebung wirkt eine Drehfeder (Federkonstante c_2). An der unteren Scheibe B ist eine Zusatzmasse (Masse m) im Abstand $r = \frac{R}{2}$ vom Mittelpunkt der Scheibe angebracht. Beide Federn sind für $x = 0$ und $e = 0$ entspannt. Das System befindet sich für $t \leq 0$ in Ruhe und $e(t \geq 0) = A\cos(\Omega t)$. Es wird angenommen, daß zwischen Scheiben und Balken kein Gleiten auftritt. Es wirkt keine Gravitation.

(a) Schneiden Sie das System frei!

(b) Wie lauten die Kraftgesetze für die Feder und Dämpferelemente?

(c) Stellen Sie Impuls und Drallsätze auf und leiten sie die Bewegungsgleichung für den Balken her (Koordinate x).

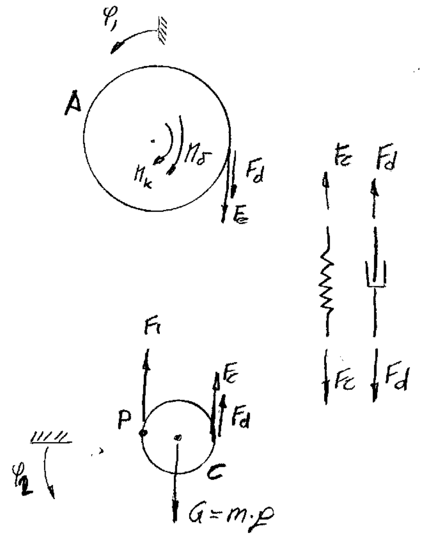
(d) Bestimmen Sie die Auslenkung $x(0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$.

(e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems ω_0 und den Dämpfungswert δ.

(f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für $t \geq 0$, wobei $\Omega = \omega_0$. Gehen Sie davon aus, dass das System kritisch gedämpft ist!

Aufgabe 1

a)



b)

$$\underline{M_k = k(\varphi_1 - \alpha_{(t)})}$$

$$\underline{M_\delta = \delta(\dot{\varphi}_1 - \dot{\alpha}_{(t)})}$$

$$\underline{F_c = c(2R\varphi_1 - 2R\varphi_2)}$$

$$\underline{F_d = d(2R\dot{\varphi}_1 - 2R\dot{\varphi}_2)}$$

c) Scheibe A: Spinsatz $\qquad \underline{\Theta_A} = \frac{1}{2} m_A (2R)^2 = \underline{2 m_A R^2}$

$$\underline{\Theta_A \ddot{\varphi}_1 = -M_k - M_\delta - 2R F_c - 2R F_d} \qquad (1)$$

Scheibe C: Spinsatz + Impulssatz $\qquad \underline{\Theta_c = \frac{1}{2} m_c R^2}$

$$\underline{\Theta_c \ddot{\varphi}_2 = R(-F_1 + F_c + F_d)} \qquad x = -\frac{\varphi_2}{R} \qquad (2a)$$

$$\underline{m\ddot{x} = -F_1 + mg - F_c - F_d}$$

Alternativ Drallsatz bezüglich Momentanpol P

$$\underline{\Theta_P} = \Theta_c + \underbrace{m R^2}_{\text{Steiner}} = \underline{\frac{3}{2} m R^2}$$

$$\underline{\Theta_P \ddot{\varphi}_2 = -R \cdot m g + 2R F_c + 2R F_d} \qquad (2b)$$

Einsetzen Kraftgesetze:

$$\Theta_A \ddot{\varphi}_1 = -k\varphi_1 + k\alpha_{(t)} - \delta\dot{\varphi}_1 + \delta\dot{\alpha}_{(t)} - 4R^2 c\varphi_1 + 4R^2 c\varphi_2 - 4R^2 d\dot{\varphi}_1 + 4R^2 d\dot{\varphi}_2$$

$$\Theta_P \ddot{\varphi}_2 = -Rmg + 4R^2 c\varphi_1 - 4R^2 c\varphi_2 + 4R^2 d\dot{\varphi}_1 - 4R^2 d\dot{\varphi}_2$$

$$\begin{pmatrix} 2m_A R^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_c R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4R^2 d + \delta & -4R^2 d \\ -4R^2 d & +4R^2 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4R^2 c + k & -4R^2 c \\ -4R^2 c & 4R^2 c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\alpha_{(t)} + \delta\dot{\alpha}_{(t)} \\ -Rmg \end{pmatrix}$$

$$M \quad \ddot{\vec{\varphi}} \quad + \quad D \quad \dot{\vec{\varphi}} \quad + \quad K \quad \vec{\varphi} = \vec{F}_{(t)}$$

d) $\ddot{\vec{\varphi}} = \dot{\vec{\varphi}} = 0, \quad \alpha_{(t)} \equiv 0$

$$4R^2 c \begin{pmatrix} 1 + \frac{k}{4R^2 c} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Rmg \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{10}\left(1 + \frac{k}{4R^2 c}\right) - \varphi_{20} = 0$$

$$-\varphi_{10} + \varphi_{20} = -\frac{mg}{4Rc}$$

$$\varphi_{10} \frac{k}{4R^2 c} = -\frac{mg}{4Rc} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi_{10} = -\frac{R}{k} mg}}$$

$$\underline{\underline{\varphi_{20} = -mg\left(\frac{R}{k} + \frac{1}{4Rc}\right)}}$$

e) $$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \tilde{\vec{\varphi}} \qquad \dot{\vec{\varphi}} = \dot{\tilde{\vec{\varphi}}} \, , \quad \ddot{\vec{\varphi}} = \ddot{\tilde{\vec{\varphi}}}$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \varphi_{20} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

im BGL:

$$M \ddot{\tilde{\vec{\varphi}}} + D \dot{\tilde{\vec{\varphi}}} + K \tilde{\vec{\varphi}} + K \vec{\varphi}_0 = \vec{F}_{(t)}$$

$$M \ddot{\tilde{\vec{\varphi}}} + D \dot{\tilde{\vec{\varphi}}} + K \tilde{\vec{\varphi}} = \vec{F}_{(t)} - \underbrace{K \vec{\varphi}_0}_{\begin{pmatrix} 0 \\ -Rmg \end{pmatrix} \text{ aus d)}} = \tilde{\vec{F}}_{(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 m_A R^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_C R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\varphi}}_1 \\ \ddot{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4R^2 d + \delta & -4R^2 d \\ -4R^2 d & +4R^2 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\varphi}}_1 \\ \dot{\tilde{\varphi}}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4R^2 c + k & -4R^2 c \\ -4R^2 c & 4R^2 c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\alpha + \delta\dot{\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parameter: $m_A = m$, $m_C = \frac{4}{3} m$, $\delta = 16 R^2 d$, $k = 16 R^2 c$

$$a = \frac{24 R^2 d}{3 m R^2} = \frac{8}{3} \frac{d}{m} \, , \quad b = \frac{8}{3} \frac{c}{m} \, , \quad \varepsilon_{(t)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{16 R^2 (c\alpha + d\dot{\alpha})}{m R^2} = 10\tfrac{2}{3} \, \frac{(c\alpha + d\dot{\alpha})}{m}$$

f) $$D = \frac{a}{b} K \Rightarrow \underline{\text{Bequemlichkeit gilt}}$$

Eigenwerte: $\det(M\lambda^2 + K) \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{vmatrix} 3\lambda^2 + 5b & -b \\ -b & \lambda^2 + b \end{vmatrix} = 3\lambda^4 + 8b\lambda^2 + 4b^2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\lambda^2_{1,2,3,4} = \frac{-8b \pm \sqrt{64b^2 - 48b^2}}{6} = \frac{-8 \pm 4}{6} b$$

$$\lambda^2_{12} = -\frac{2}{3} b$$

$$\lambda^2_{3,4} = -2b$$

g) "Eigenvektoren"

$$\vec{v}_{1,2}: \; 0 = \begin{pmatrix} 3\lambda^2_{12} + 5b & -b \\ * & * \end{pmatrix} \vec{v}_{12} = \begin{pmatrix} 3b & -b \\ * & * \end{pmatrix} \vec{v}_{12} \Rightarrow \vec{v}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{3,4}: \; 0 = \begin{pmatrix} -b & -b \\ * & * \end{pmatrix} \vec{v}_{34} \Rightarrow \vec{v}_{34} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

h)

$$U = (\vec{v}_{12}, \vec{v}_{34}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{Modalmatrix}$$

$$\tilde{\vec{\varphi}} = U \vec{\xi} \qquad \xi\text{: Modalkoordinaten}$$

Diagonalform

$$\underbrace{U^T M U}_{M_\xi} \ddot{\vec{\xi}} + \underbrace{U^T D U}_{D_\xi} \dot{\vec{\xi}} + \underbrace{U^T K U}_{K_\xi} \vec{\xi} = \underbrace{U^T \tilde{\vec{F}}}_{\vec{F}_\xi}$$

$$M_\xi = U^T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_\xi = a U^T \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$K_\xi = b \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

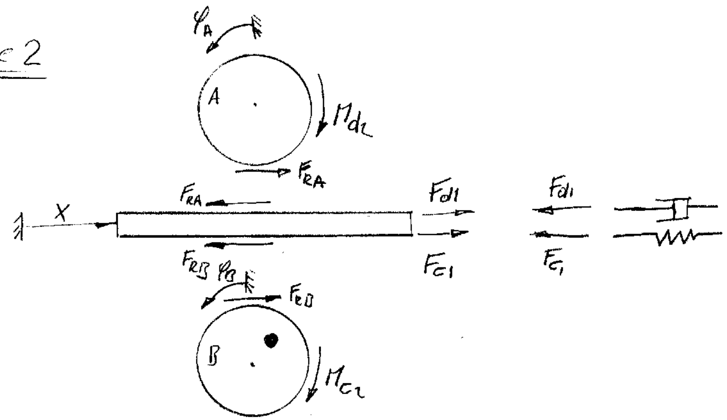
Diagonalform:

$$12 \ddot{\xi}_1 + 8a \dot{\xi}_1 + 8b \xi_1 = \varepsilon(t)$$

$$4 \ddot{\xi}_2 + 8a \dot{\xi}_2 + 8b \xi_1 = \varepsilon(t)$$

Aufgabe 2

a)



b)

$$\underline{F_{c1} = -c_1\,(x + e(t))}$$

$$\underline{F_{d1} = -d_1\,\dot{x}}$$

$$\underline{M_{c2} = c_2\,(\varphi_B - \underbrace{\varphi_{B0}}_{=0})}$$

$$\underline{M_{d2} = d_2\,\dot{\varphi}_A}$$

$$\underline{\varphi_A = \frac{x}{R}}$$

$$\underline{\varphi_B = -\frac{x}{R}}$$

c) Impulssatz Balken:

$$\underline{2m\ddot{x} = -F_{RA} - F_{RB} + F_{d1} + F_{c1}} \qquad (1)$$

Spinsatz Scheibe A:

$$\underline{\Theta_A} = \Theta_{Scheibe} = \underline{\frac{1}{2} m R^2}$$

$$\underline{\Theta_A \ddot{\varphi}_A = F_{RA}\cdot R - M_{d2}} \qquad (2)$$

Drallsatz Scheibe B:

$$\underline{\Theta_B} = \Theta_{Scheibe} + \Theta_{Masse} = \frac{1}{2} m R^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \underline{\frac{3}{4} m R^2}$$

$$\Theta_B \ddot{\varphi}_B = -F_{RB}\cdot R - M_{c2} \qquad (3)$$

Eliminieren der Bindungskräfte:

(2): $$F_{RA} = \frac{\Theta_A \ddot{\varphi}_A}{R} + \frac{M_{d2}}{R}$$

(3): $$F_{RB} = -\frac{\Theta_B \ddot{\varphi}_B}{R} - \frac{M_{c2}}{R}$$

in (1)

$$2m\ddot{x} = -\frac{\Theta_A \ddot{\varphi}_A}{R} - \frac{M_{d2}}{R} + \frac{\Theta_B \ddot{\varphi}_B}{R} + \frac{M_{c2}}{R} + F_{d1} + F_{c1}$$

mit $\varphi_A = \frac{x}{R}$, $\varphi_B = -\frac{x}{R}$

$$2m\ddot{x} = -\frac{1}{2} m\ddot{x} - \frac{d_2}{R^2}\dot{x} - \frac{3}{4} m\ddot{x} - \frac{c_2}{R^2} x - d_1\dot{x} - c_1 x - c_1 e(t)$$

$$\Rightarrow \text{BGl:} \quad \underline{\underline{\overbrace{\frac{13}{4} m}^{m^*}\ddot{x} + \overbrace{\left(\frac{d_2}{R^2} + d_1\right)}^{d^*}\dot{x} + \overbrace{\left(\frac{c_2}{R^2} + c_1\right)}^{c^*} x = \overbrace{-c_1\, e(t)}^{F(t)}}} \qquad (4)$$

d) System in Ruhe: $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = 0$

$$e(0) = A\cdot\cos(0\cdot\Omega) = A$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x(0) = -\frac{c_1 A}{\frac{c_2}{R^2} + c_1}} = -\frac{c_1 A}{c^*}$$

e)

$$\omega_0^2 = \frac{c^*}{m^*} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{4}{13}\,\frac{\frac{c_2}{R^2} + c_1}{m}}$$

$$\delta = \frac{d^*}{2m} = \frac{2}{13}\,\frac{\left(\frac{d_2}{R^2} + d_1\right)}{m}$$

e) Lösung BGl (4)

$$\underline{x_{(t)} = x_{H(t)} + x_{P(t)}}$$

(i) Homogene Lösung:

kritisch gedämpftes System: $D = 1$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = -\delta = -\omega_0}$$

(doppelter EW!)

$$\underline{x_{H(t)} = A_1 e^{-\omega_0 t} + A_2 t e^{-\omega_0 t}}$$

(ii) Partikuläre Lösung: $F_{(t)} = -c_1 A \cos(\Omega t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$

$$x_{P(t)} = \hat{x} \cos(\Omega t - \varphi)$$

Amplitudengang

$$\frac{\hat{x}}{\hat{\ell}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} = V_{(\eta, D)} \qquad \hat{\ell} = \frac{\hat{F}}{\underbrace{m^* \omega_0^2}_{\to c^*}}$$

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

Phasengang

$$\arctan \frac{2D\eta}{1-\eta^2} = \varphi_{(\eta, D)}$$

$\underline{\eta = 1,\ D = 1:}$

$$V_{(1,1)} = \frac{1}{2} \quad / \quad \varphi_{(1,1)} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_{P(t)} = -\frac{c_1 A}{m^* \omega_0^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{x_{P(t)} = -\frac{1}{2} \frac{c_1 A}{c^*} \sin(\omega_0 t)}$$

$$x_{(t)} = A_1 e^{-\omega_0 t} + A_2 t e^{-\omega_0 t} - \frac{1}{2} \frac{c_1 A}{c^*} \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}_{(t)} = -\omega_0 A_1 e^{-\omega_0 t} + A_2 e^{-\omega_0 t} - \delta A_2 t e^{-\delta t} - \frac{1}{2} \frac{c_1 A}{c^*} \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

AB: $x_{(0)} = -\frac{c_1 A}{c^*}$

$\dot{x}_{(0)} = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{-\frac{c_1 A}{c^*} = A_1}$$

$$0 = -\omega_0 A_1 + A_2 - \frac{1}{2} \frac{c_1 A}{c^*} \omega_0$$

$$\underline{A_2 = -\frac{1}{2} \frac{c_1 A}{c^*} \omega_0}$$

$$\underline{\underline{x_{(t)} = -\frac{1}{2} \frac{c_1 A}{c^*} \left[(2 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} + \sin(\omega_0 t) \right]}}$$