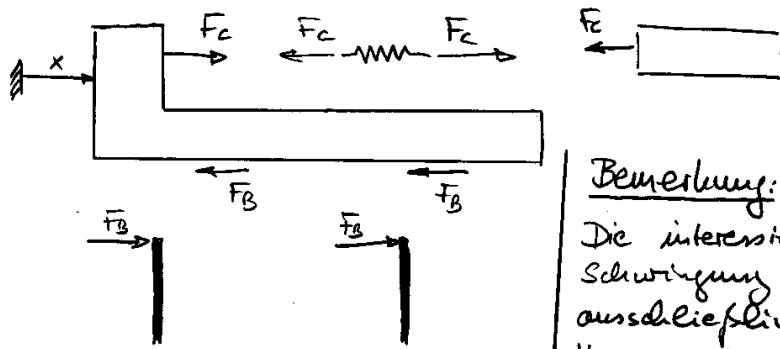


Lösung

(a) Freischnitten



Impulssatz für Tiefermasse
 $m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -F_c$

Impulssatz für Hochhaus
 $M\ddot{x} = F_c - 2F_B$

Kraftgesetze für Federn/Biegebalken:

$$F_c = c \cdot y$$

$$F_B = c_B \cdot (x - e)$$

Einsetzen in Impulssätze

$$M\ddot{x} - cy + 2c_B \cdot x - 2c_B \cdot e = 0$$

$$m\ddot{x} + m\ddot{y} + cy = 0$$

In Matrixform

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_B & -c \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_B \cdot e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die interessierende Schwingung findet ausschließlich in der Horizontalen statt, Gewichtskräfte sowie die übrigen Schnittkräfte zwischen Hochhaus und Tiefer sowie den Balken werden der Einfachheit halber weggelassen!

(1) (b) Symmetrisierung über Linearkombination

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_B & -c \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_B \cdot e \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Zeile zur 1. Zeile addieren

$$\begin{pmatrix} M+m & m \\ m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_B & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_B \cdot e \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Parameter einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 10m & m \\ m & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8c \cdot e \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M\lambda^2 + K) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 10m\lambda^2 + 8c & m\lambda^2 \\ m\lambda^2 & m\lambda^2 + c \end{pmatrix} = 0$$

$$10m^2\lambda^4 + 10mcl^2 + 8mcl^2 + 8c^2 - m^2\lambda^4 = 0$$

$$9m^2\lambda^4 + 18mcl^2 + 8c^2 = 0 \quad | : (9m^2)$$

$$\lambda^4 + 2 \frac{c}{m} \lambda^2 + \frac{8}{9} \left(\frac{c}{m} \right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2/3/4}^2 = -\frac{c}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{m} \right)^2 - \frac{8}{9} \left(\frac{c}{m} \right)^2}$$

$$= -\frac{c}{m} \pm \frac{1}{3} \frac{c}{m} \Rightarrow \lambda_{1/2}^2 = -\frac{4}{3} \frac{c}{m}$$

$$\lambda_{3/4}^2 = -\frac{2}{3} \frac{c}{m}$$

Eigenvektoren

$$(M\lambda^2 + K)\vec{u} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 10\lambda^2 + 8\frac{c}{m} & \lambda^2 \\ \hline \lambda^2 & \lambda^2 + \frac{c}{m} \end{array} \right) \vec{u} = 0$$

$$\text{Für } \lambda_{1/2}^2 = -\frac{4}{3} \frac{c}{m}$$

$$\text{1. Zeile: } \left(-\frac{40}{3} \frac{c}{m} + \frac{24}{3} \frac{c}{m} \mid -\frac{4}{3} \frac{c}{m} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{16}{3} \frac{c}{m} \quad -\frac{4}{3} \frac{c}{m} \right) \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}}}$$

$$\text{Für } \lambda_{3/4}^2 = -\frac{2}{3} \frac{c}{m}$$

$$\left(-\frac{20}{3} \frac{c}{m} + \frac{24}{3} \frac{c}{m} \mid -\frac{2}{3} \frac{c}{m} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{32} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{4}{3} \frac{c}{m} \quad -\frac{2}{3} \frac{c}{m} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{32} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

(d) Für partikuläre Lsg Ansatz von Typ der rechten Seite

$$\vec{x}_p(t) = \vec{A} \cdot \sin \Omega t$$

Beur: • OK, weil keine Resonanz

• keine zeitveränderlichen Terme

• OK, weil keine Dämpfung (sonst Phasenverschiebung)

3 Einsetzen:

$$M\ddot{\vec{x}}_p + K\vec{x}_p = 2c_B G \sin \Omega t$$

$$\Rightarrow -M\vec{A}\Omega^2 \sin \Omega t + K\vec{A} \sin \Omega t = \begin{pmatrix} 2c_B \cdot \hat{e} \sin \Omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(-M\Omega^2 + K) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_B \cdot \hat{e} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} -(M+m)\Omega^2 + 2c_B & -m\Omega^2 \\ \hline -m\Omega^2 & -m\Omega^2 + c \end{array} \right) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_B \cdot \hat{e} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht: c so, dass $e(t) \equiv x(t)$, also so, dass $\hat{e} \equiv A_1$

$$\text{1. Zeile } (-(M+m)\Omega^2 + 2c_B)\hat{e} - m\Omega^2 A_2 = 2c_B \hat{e}$$

$$\text{2. Zeile } -m\Omega^2 \hat{e} + (-m\Omega^2 + c)A_2 = 0$$

$$\text{1. Zeile } m\Omega^2 A_2 = -(M+m)\Omega^2 \hat{e} \Rightarrow \boxed{A_2 = -\frac{M+m}{m} \hat{e}}$$

$$\text{2. Zeile } c \cdot A_2 = m\Omega^2 \left(\hat{e} - \frac{M+m}{m} \hat{e} \right) = -m\Omega^2 \hat{e} \frac{M}{m} = -M\Omega^2 \hat{e}$$

$$\Rightarrow c = M\Omega^2 \frac{\hat{e}}{\hat{e}} \frac{m}{M+m}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{c = \Omega^2 \cdot \frac{mM}{M+m}}}$$

4