Vordiplom, Physik I

21. März 2003 (9:00-12:00, ohne Pause)

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Legi-Nummer: ______________________________

Aufgabe	Punkte	Max.
1		5
2		4
3		7
4		5
5		6
6		2
7		4
8		5
9		4
10		4
Total		46

Note: ....

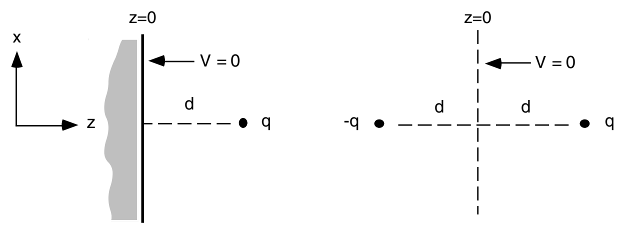
Name und Vorname auf allen abgegebenen Blättern!

1 Methode der Spiegelladung (5 Punkte)

Die Elektrostatik befasst sich mit der Bestimmung des elektrischen Feldes und des Potentials V für eine gewisse Konfiguration von Leitern und Ladungen im Raum. Es ist oft möglich aus der Geometrie dieses meistens komplizierten Problemes die entsprechenden Randbedingungen mit einigen wenigen Punktladungen, den Spiegelladungen, zu simulieren.

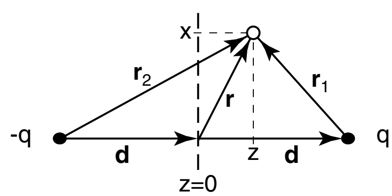
Als Beispiel, welches dieses Prinzip gut illustriert, betrachten wir eine Punktladung q im Abstand $z = d$ von einer unendlich ausgedehnten, ebenen, geerdeten und leitenden Platte bei $z = 0$ (Bild links).

Derselbe Feld- und Potentialverlauf für den rechten Halbraum ($z > 0$) kann erhalten werden, indem man die geerdete leitende Platte durch eine Punktladung $-q$ am Spiegelbildpunkt $z = -d$ der ursprünglichen Ladung ersetzt (Bild rechts).



1. Zeige, dass mit Hilfe der Spiegelladung auf der Fläche $z = 0$ das Potential verschwindet und berechne das E-Feld für $z = 0$. Zeige, dass das E-Feld für $z = 0$ nur eine Normalkomponente E_z besitzt.
2. Berechne die Kraft zwischen der Ebene und der Punktladung so einfach wie möglich.

1.1 Methode der Spiegelladung



$$\mathbf{r} = \binom{x}{z}$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{d} = \binom{x}{z-d}$$
$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{d} = \binom{x}{z+d}$$

Das ganze Problem ist Zylindersymmetrisch. Somit ist es ausreichend, nur eine Koordinate in der Ebene $z = 0$ zu betrachten – hier x.

1. Das Potential beider Punktladungen im Punkt $\vec{r}$ ergibt sich durch Überlagern der Potentiale von zwei Punktladungen:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r_1}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{-q}{|\vec{r_2}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-d)^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z+d)^2 + x^2}}\right).$$

Insbesondere gilt für $z = 0$

$$V(x, z = 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + x^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right) = 0.$$

Das elektrische Feld kann wiederum durch überlagern der Felder der einzelnen Punktladungen gefunden werden oder durch Ableiten des Potentials gemäss $\vec{E} = -\operatorname{grad} V$. Es ergibt sich

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\,\vec{r_1}}{|\vec{r_1}|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q\,\vec{r_2}}{|\vec{r_2}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\begin{pmatrix} x \\ z-d \end{pmatrix}}{\left((z-d)^2 + x^2\right)^{3/2}} - \frac{\begin{pmatrix} x \\ z+d \end{pmatrix}}{\left((z+d)^2 + x^2\right)^{3/2}} \right).$$

Insbesondere für $z = 0$

$$\vec{E}(x, z=0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\begin{pmatrix} x \\ -d \end{pmatrix}}{(d^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{\begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix}}{(d^2 + x^2)^{3/2}} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 2d \end{pmatrix}}{(d^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Damit ist auch gezeigt, dass das Feld senkrecht auf der Leiterplatte steht.

(Umgekehrt kann aus dem Feld das Potential berechnet werden, z.B. für einen Integrationsweg aus dem Unendlichen entlang der x-Achse: $V = -\int_\infty^x \vec{E}(\vec{x}, z=0)\mathrm{d}\vec{x}$. Da das Feld auf dem ganzen Integrationsweg senkrecht auf $\mathrm{d}\vec{x}$ steht, gilt $V = 0$ überall auf der x-Achse.)

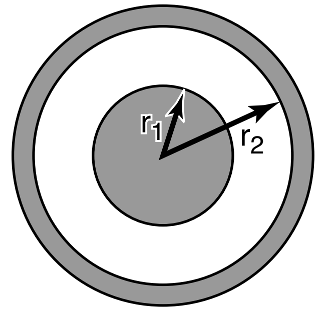
2. Da die beiden Systeme analog sind, bzw. die elektrischen Felder im rechten Halbraum gleich sind, ist die gesuchte Kraft gleich der Coulombkraft zwischen der Ladung und der Spiegelladung, also

$$F = \frac{q\,(-q)}{4\pi\epsilon_0\,(2d)^2} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0\,d^2}.$$

Hier zeigt sich die Stärke der Methode der Spiegelladung. Ansonsten wäre diese Frage nur mit viel Aufwand zu beantworten.

2 Kugelkondensator (4 Punkte)

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei kugelförmigen, konzentrischen Leitern. Der Aussenradius des Inneren beträgt r_1 der Innenradius des Äusseren r_2 (Skizze). Zwischen den Leitern befinde sich ein Vakuum.



1. Wie gross ist die mittlere Energiedichte zwischen den beiden Leitern, wenn eine Spannung U zwischen den beiden angelegt wird?

2. Wo und wie gross ist die maximale Energiedichte in diesem Fall?

2.1 Kugelkondensator

Für die Berechnung der Kapazität nehmen wir an, dass die innere Kugel eine Ladung $+Q$ und die äussere Kugelschale eine Ladung $-Q$ trägt. Das elektrische Feld E beträgt zwischen den beiden Kugeln

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2} \qquad (r_1 < r < r_2).$$

(Das Feld ist identisch zu jenem einer Kugelladung im Zentrum, wie mit Hilfe des Satzes von Gauss $\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{A} = Q/\epsilon_0$ eingesehen werden kann.)

Die Potentialdifferenz ergibt sich daraus durch Integration vom einen zum anderen Leiter

$$\begin{aligned} U &= \int_{r_1}^{r_2} E\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \end{aligned}$$

(Auch das Potential $V(r)$ ist identisch zu jenem einer Punktladung im Zentrum. Damit $U = V(r_1) - V(r_2)$.)

Die Kapazität ist definiert als $C = Q/U$, also

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

1. Die gesamte im Kondensator gespeicherte Energie beträgt

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = 2\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}U^2.$$

Diese Energie kann auch durch Integration der Energiedichte gefunden werden:

$$\begin{aligned} W &= \int_V \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \mathrm{d}V = \int_{r_1}^{r_2} 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{2}\epsilon_0\left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^2}\right]^2 \mathrm{d}r = 2\pi\epsilon_0\left[\frac{CU}{4\pi\epsilon_0}\right]^2 \cdot \int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} \\ &= 2\pi\epsilon_0\left[\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\right]^2 U^2 \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = 2\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}U^2. \end{aligned}$$

Die gespeicherte Energie dividiert durch das Volumen zwischen den Leitern

$$V = \frac{4\pi}{3}\left(r_2^3 - r_1^3\right)$$

ergibt die mittlere Energiedichte

$$w = \frac{W}{V} = \frac{3}{2}\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{\left(r_2 - r_1\right)\left(r_2^3 - r_1^3\right)} U^2.$$

2. Die maximale Energiedichte wird an der inneren Kugel erreicht, wo das elektrische Feld am grössten ist. Dieses beträgt mit $Q = CU$

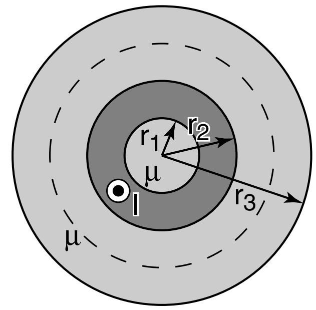
$$E_{max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_1^2} = \frac{r_2}{\left(r_2 - r_1\right) r_1} U.$$

Die maximale Energiedichte beträgt somit

$$w_{max} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_{max}^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{r_2^2}{\left(r_2 - r_1\right)^2 r_1^2} U^2.$$

3 Magnetfeld (7 Punkte)

Ein elektrischer Strom I fliesst durch ein leitendes ($\mu \simeq 1$), kreissymmetrisches Rohr mit Innenradius r_1 und Aussenradius $r_2 = 2 \cdot r_1$. Im Innern des Rohres ($r < r_1$) und aussen um das Rohr herum ($r_2 < r < r_3 = 4 \cdot r_1$) befindet sich ein magnetisches Material mit der relativen Permeabilität $\mu = 4$. Die ganze Anordnung befinde sich im Vakuum.



1. Berechne die Beträge der Felder $\vec{H}$, $\vec{B}$ und $\vec{M}$

   i) innerhalb des Rohres ($r < r_1$)

   ii) innerhalb des Leiters ($r_1 < r < r_2$),

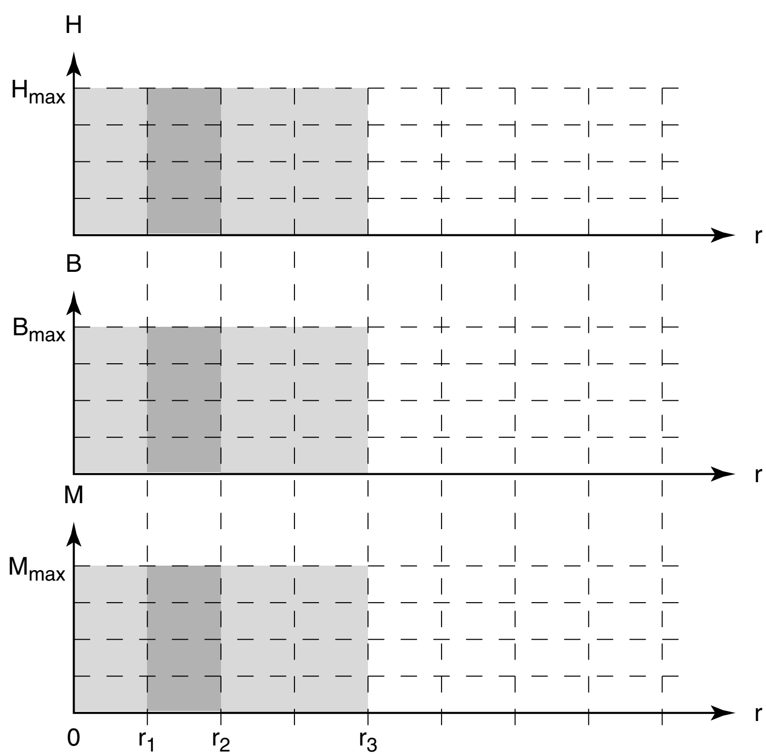
   iii) innerhalb des magnetischen Materials um das Rohr ($r_2 < r < r_3$) und

   iv) ausserhalb im Vakuum ($r > r_3$).

   Tip: Benutze die Integralform der Maxwell-Gleichung $\oint \vec{H}\, \mathrm{d}\vec{s} = \int \vec{j}\, \mathrm{d}\vec{A}$.

2. Wie gross sind die Maximalwerte H_{max}, B_{max} und M_{max} der obigen Felder?

3. Skizziere in den vorbereiteten Graphen die Beträge der obigen Felder. Beachte insbesondere, welche Felder an den Grenzflächen stetig und welche unstetig sind sowie die Werte an den Grenzflächen.



3.1 Magnetfeld

1. Die Feldlinien der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ und das Magnetfeldes $\vec{H}$ sind überall konzentrische Kreise. Das Magnetfeld $\vec{H}$ hängt mit der Stromdichte gemäss der Maxwell'schen Gleichung zusammen (für $\dot{\vec{D}} = 0$):

$$\oint \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int j\,\mathrm{d}A.$$

Für einen Integrationsweg auf einem Kreis gilt aufgrund der Zylindersymmetrie

$$2\pi r\,H = \int j\,\mathrm{d}A.$$

i) Im Innern des Leiters fliessen keine Ströme und somit $\int j\,\mathrm{d}A = 0$. Somit auch $H = 0$, $B = 0$ und $M = 0$.

ii) Die Stromdichte ist im Leiter homogen, d.h. $j = I/\left(\pi r_2^2 - \pi r_1^2\right)$. Einsetzen in obige allgemeine Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}
2\pi r\,H &= \int_{r_1}^{r} j\,2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{I}{r_2^2 - r_1^2}\left(r^2 - r_1^2\right) \\
H &= \frac{I\,\left(r^2 - r_1^2\right)}{2\pi r\left(r_2^2 - r_1^2\right)} = \frac{I\,\left(r^2 - r_1^2\right)}{6\pi r r_1^2} = \frac{I\,\left((r/r_1)^2 - 1\right)}{6\pi r} \\
B &= \mu_0 H \\
M &= 0.
\end{aligned}$$

iii) Das Integral über die Stromdichte ergibt überall I. Somit

$$\begin{aligned}
2\pi r\,H &= I \\
H &= \frac{I}{2\pi r} \\
B &= \mu_0 \mu H \\
M &= (\mu - 1)\,H.
\end{aligned}$$

iv) Analog zu iii), aber $\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{I}{2\pi r} \\
B &= \mu_0 H \\
M &= 0.
\end{aligned}$$

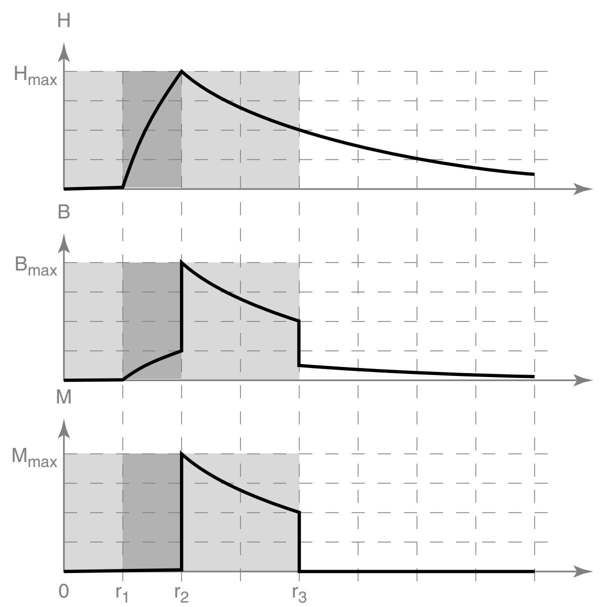
2. Die Maximalwerte werden für alle Felder bei $r = r_2+$, d.h. gerade ausserhalb des Leiters, erreicht. Sie betragen

$$H_{max} = \frac{I}{2\pi r_2}, \qquad B_{max} = \mu_0 \mu H_{max} \quad \text{und} \quad M_{max} = (\mu - 1)\,H_{max}.$$

3. Die Komponente des Magnetfeldes $\vec{H}$ parallel zu einer Grenzfläche ist stetig. Da $\vec{H}$ bei allen Grenzflächen parallel zur Oberfläche verläuft, ist somit H überall stetig. Insbesondere treten also beim Verlassen des magnetischen Materials bei r_3 keine Unstetigkeiten auf. Stattdessen fällt das H-Feld mit $1/r$ ab.

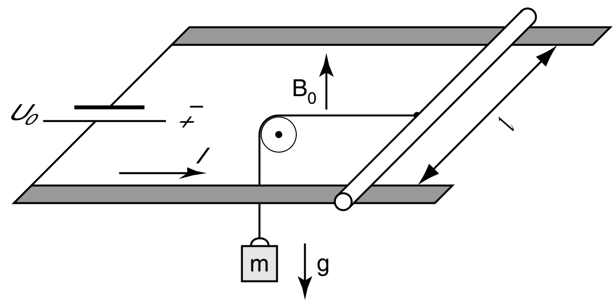
   Die Magnetisierung $\vec{M}$ kann nur in einem Material ungleich Null sein. An den Grenzflächen treten Unstetigkeiten auf.

   Die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ schliesslich ist die Summe der beiden übrigen, d.h. $B = \mu_0 (H + M)$. Somit ist B an den Grenzflächen nicht stetig. (Die Normalkomponente des B-Feldes an einer Grenzfläche ist stetig, nicht aber die hier alleine auftretende parallele Komponente. Die parallele Komponente von $\vec{B}$ springt um einen Faktor μ bzw. $1/\mu$.)



4 Linearer Motor (5 Punkte)

Ein leitender Stab mit Widerstand $R = 0.1\ \Omega$ liegt auf zwei gut leitenden, parallelen Schienen (Widerstand $\approx 0\ \Omega$) mit $l = 10$ cm Schienenabstand. An den Schienen liegt eine Spannung U_0 von 15 V. Der Stab ist durch ein Seil über eine Rolle mit einer Masse $m = 1.2$ kg verbunden (Seil und Rolle masselos, Reibung vernachlässigen).



1. Berechne die Geschwindigkeit, mit der sich der Stab stationär bewegt, falls ein homogenes Magnetfeld $B_0 = 1$ T senkrecht durch die Schienenebene tritt.

   Hinweis: Induzierte Spannung nicht vergessen!

2. Welcher Bruchteil der durch die Batterie gelieferten Leistung wird in mechanische Arbeit umgesetzt?

4.1 Linearer Motor

1. Die induzierte Spannung beträgt

$$U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(lxB_0) = -l\dot{x}B_0,$$

wobei x die Position des Stabes und $\dot{x}$ dessen Geschwindigkeit bezeichnen.

Der im Leiterkreis fliessende Strom beträgt somit

$$I = \frac{U_0 + U_{ind}}{R} = \frac{U_0 - l\dot{x}B_0}{R}$$

und die Biot-Savart-Kraft auf den Stab

$$F = IlB_0 = \frac{U_0 - l\dot{x}B_0}{R} lB_0.$$

(Zum Vorzeichen: Wenn sich der Stab nach rechts bewegt ($\dot{x} > 0$), so fliesst der Strom in jene Richtung, die der Feldänderung entgegen wirkt, d.h. ein nach unten zeigendes Magnetfeld erzeugt. Dazu muss der Strom entgegen der Pfeilrichtung fliessen. Die induzierte Spannung verkleinert also den Strom I, genau wie dies auch der obige Term $-l\dot{x}B_0/R$ ausdrückt. Solange der Strom I positiv bleibt, wirkt die Kraft auf den Stab nach rechts, also $F > 0$.)

Im stationären Fall muss die Biot-Savart-Kraft entgegengesetzt gleich der Gewichtskraft mg sein. Die Geschwindigkeit beträgt somit

$$\dot{x} = \frac{1}{lB_0}\left(U_0 - R\frac{mg}{lB_0}\right) = 32.3\ \mathrm{m/s}.$$

2. Die mechanische Leistung beträgt

$$P_{mech} = F\dot{x} = IlB_0\dot{x}$$

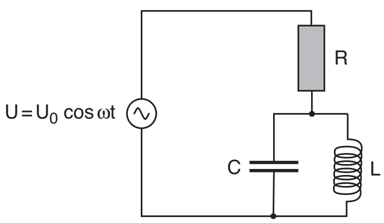
und die elektrische

$$P_{el} = RI^2.$$

Der Anteil der mechanischen Arbeit somit

$$\eta = \frac{P_{mech}}{P_{mech} + P_{el}} = \frac{IlB_0\dot{x}}{I\left(lB_0\dot{x} + RI\right)} = \frac{lB_0\dot{x}}{U_0} = 1 - \frac{R\,mg}{U_0 lB_0} = 0.215.$$

5 Schwingkreis (6 Punkte)



Der in der Figur gezeigte Schwingkreis wird mit einer äusseren Wechselspannung $U = U_0 \cos \omega t$ angeregt.

1. Welchen maximalen Strom I_0 muss die Spannungsquelle bei einer Kreisfrequenz ω liefern und wie gross ist die Phasendifferenz zwischen diesem Strom und der Spannung U?
2. Wie gross ist die Leistung, welche im Schwingkreis verbraucht wird (gemittelt über eine Schwingungsperiode)?
3. Für welche Kreisfrequenz ω ist diese Leistung minimal?

5.1 Schwingkreis

1. Die totale Impedanz der Schaltung beträgt

$$\begin{aligned} Z_{tot} &= R + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{i\omega L}} = R + \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \\ &= \frac{R(1-\omega^2 LC) + i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \end{aligned}$$

Somit gilt für den Strom

$$\begin{aligned} I &= \frac{U}{Z_{tot}} \\ I_0 &= |I| = \left|\frac{1}{Z_{tot}}\right| U_0 = \frac{1-\omega^2 LC}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}}\, U_0 \\ \Delta\varphi &= \arctan\left(\frac{\omega L}{R(1-\omega^2 LC)}\right) = \arccos\left(\frac{R(1-\omega^2 LC)}{\sqrt{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}}\right) \end{aligned}$$

2. Die gemittelte Leistung ergibt sich entweder als

$$\langle P \rangle = \frac{U_o I_o}{2} \cos \Delta\phi = \frac{R\left(1-\omega^2 LC\right)^2}{R^2\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \omega^2 L^2} \frac{U_0^2}{2}$$

oder

$$\langle P \rangle = \left\langle R\, I^2 \right\rangle = R \frac{I_o^2}{2} = \ldots$$

3. Die Leistung ist minimal wenn in obiger Formel für $\langle P \rangle$ der Zähler verschwindet, also für

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 - \omega^2 LC\right)^2 \\ \omega &= \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}, \end{aligned}$$

wobei physikalisch nur die positive Lösung sinnvoll ist.

Mit den Substitutionen $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und $\gamma = \frac{R}{L}$ lassen sich obige Formeln auch schreiben als

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{U_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega/\gamma}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)^2}} \\
\Delta\varphi &= \arctan\left(\frac{\omega/\gamma}{1 - \omega^2/\omega_0^2}\right) \\
\langle P \rangle &= \frac{U_0^2}{2R} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega/\gamma}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right)^2}
\end{aligned}$$

6 Mischen einatomiger Gase (2 Punkte)

Drei wärmeisolierte Gasbehälter können durch 2 Schieber miteinander verbunden werden. Sie enthalten 3 verschiedene einatomige Gase bei verschiedenen Temperaturen.

	Gas	**Volumen [dm^3]**	**Temperatur [K]**
Behälter 1	He	V_1=1	T_1=300
Behälter 2	Ne	V_2=2	T_2=500
Behälter 3	Ar	V_3=3	T_3=1000

Der Druck in allen Behältern sei gleich p_0= 0.5 bar.

1. Welcher Behälter enthält am meisten Atome (begründete Antwort)?
2. Welcher Enddruck p und welche Endtemperatur T stellt sich ein, wenn beide Schieber geöffnet werden und die Gase sich durchmischen?

6.1 Mischen einatomiger Gase

1. Die Teilchenzahl N_i in jedem der Behälter beträgt $N_i = pV_i/kT_i$. Das Verhältnis der Teilchenzahlen somit
$$N_1 : N_2 : N_3 = \frac{V_1}{T_1} : \frac{V_2}{T_2} : \frac{V_3}{T_3} = \frac{1}{300} : \frac{1}{250} : \frac{3}{1000}.$$
Somit enthält der Behälter 2 am meisten Atome.
2. Da es keine Druckgradienten gibt, bleibt der Druck unverändert und beträgt $p = p_0 =$ 0.5 bar. Dies lässt sich auch aus der Erhaltung der inneren Energie herleiten.

   Für die Endtemperatur gilt
$$T = \frac{pV}{Nk} = \frac{p_0\,(V_1 + V_2 + V_3)}{k\,(N_1 + N_2 + N_3)} = \frac{p_0}{k}\,\frac{V_1 + V_2 + V_3}{\frac{p_0}{k}\left(\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} + \frac{V_3}{T_3}\right)} = \frac{V_1 + V_2 + V_3}{\frac{V_1}{T_1} + \frac{V_2}{T_2} + \frac{V_3}{T_3}} = 580\text{ K}.$$

7 Klimaanlage (4 Punkte)

Eine Klimaanlage soll pro Sekunde 13 dm^3 kühle Luft an ein Gebäude abgeben. Dazu muss die Luft zuerst durch einen Wärmetauscher geführt werden, wo sie um 5 °C abgekühlt wird. Die überschüssige Wärme wird an Wasser abgegeben, dessen Temperatur nach dem Verlassen des Wärmetauschers um 4°C zugenommen hat.

1. Berechnen Sie die Wassermenge, die pro Sekunde durch den Wärmetauscher fliessen muss.

Tip: Rechnen Sie mit einem molaren Volumen von 22.4 l für Luft (Gas mit 5 Freiheitsgraden) und einer Wärmekapazität von $c_W = 4185$ kJ/(m^3K) für Wasser.

7.1 Klimaanlage

Wärmekapazität von Luft für den Fall von konstantem Druck: Ideales Gas mit f=5 Freiheitsgraden, also nach $C_V = \frac{1}{2} fR$ und $C_p - C_V = R$ folgt:

$$C_p = \frac{5}{2}R + R = 29.1 \text{ J/(K mol)}.$$

Um 13 dm^3 Luft um 5°C zu kühlen muss also die folgende Wärmemenge abgeführt werden:

$$\dot{Q} = C_p \frac{V_L}{V_{mol}} \Delta T_L = 84.4 \text{ kW}.$$

Mit dieser Wärme wird das Wasser erwärmt:

$$\dot{Q} = c_W V_W \Delta T_W \Rightarrow V_W = \frac{\dot{Q}}{c_W \Delta T_W} = \frac{7RV_L}{2V_{mol}c_W} \frac{\Delta T_L}{\Delta T_W} = 5.04 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\text{/s} = 5.04 \text{ l/s}$$

8 Wärmepumpe (5 Punkte)

1. Ein Haus soll auf 21°C geheizt werden. Das Haus sei Würfelförmig mit einer Kantenlänge von 10 m. Der durchschnittliche k-Wert der Seitenwände und des Daches sei k=0.1 W/m^{2}K; der Wärmeverlust durch den Boden sei vernachlässigbar. Wie gross ist der Wärmeverlust des Hauses bei einer Aussentemperatur von -5°C?

2. Das Haus soll mit Hilfe einer Bodenheizung, durch die 40°C warmes Wasser geleitet wird, geheizt werden. Das Wasser wird mit einer Wärmepumpe erhitzt, welche dem 14°C kalten Grundwasser Energie entzieht. Das Verhältnis aus der gewonnenen Wärme und der nötigen mechanischen Arbeit erreicht dabei nur 25% des theoretisch möglichen Wertes. Welche mechanische Leistung ist nötig, um bei einer Aussentemperatur von -5°C im Haus eine Temperatur von 21°C aufrecht zu erhalten?

   Hinweis: der k-Wert ist definiert als $\frac{\lambda}{\Delta x}$, wobei λ die Wärmeleitfähigkeit ist.

8.1 Wärmepumpe

1. Die abgeführte Wärme beträgt

$$\dot{Q} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lambda S \left(-\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) = -\frac{\lambda}{\Delta x} S \Delta T = k S \Delta T = k\, 5a^2 (T_{innen} - T_{aussen}) = 1.3 \text{ kW},$$

   wobei $a = 10$ m, $\Delta T = T_{aussen} - T_{innen}$ und $S = 5a^2$

2. Das maximale Verhältnis von Wärme zu Arbeit einer Carnot-Pumpe ist

$$\varepsilon = \frac{\text{an die Wohnung abgegebene Wärme}}{\text{aufgewendete Nettoarbeit}} = \frac{T_{Heizwasser}}{T_{Heizwasser} - T_{Grundwasser}} = 12.04$$

   Die Wärmepumpe in der Aufgabe erreicht davon nur 25%, also $\varepsilon' = 0.25 \cdot \varepsilon = 3.011$. Um die Wärmeverluste gemäss (1.) auszugleichen, wird also eine mechanische Leistung von

$$P = \frac{\dot{Q}}{\varepsilon'} = k\, 5a^2 (T_{innen} - T_{aussen}) \cdot \frac{4(T_{Heizwasser} - T_{Grundwasser})}{T_{Heizwasser}} = 431.7 \text{ W}$$

   benötigt.

9 Bohrsches Atommodell (4 Punkte)

1. Berechnen Sie im Rahmen des Bohrschen Atommodelles die Umlauffrequenz des Elektrons, wenn es sich auf der n-ten Bahn um den Kern bewegt (ausgedrückt mit der Rydberg-Energie R^*).

2. Berechnen Sie die Frequenz des Photons, dass beim Übergang des Elektrons von der n-ten auf die (n-1)-te Bahn emittiert wird.

3. Vergleichen Sie die Umlauffrequenz von (1.) mit der Frequenz des emittierten Photons gemäss (2.) für den Fall grosser n.

9.1 Bohrsches Atommodell

1. Die Umlauffrequenz ergibt sich mit der Geschwindigkeit v und dem Bahnradius r zu

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{nh}{(2\pi)^2 r^2 m} = \frac{nh}{(2\pi)^2 m n^4 a_0^2} = \frac{h^2}{h(2\pi)^2 m a_0^2 n^3}$$
$$= 2\frac{me^4}{h^3 8\epsilon_0^2 n^3} = \frac{2R^*/h}{n^3}.$$

2. Die Energiedifferenz zwischen den Bahnen n und $n-1$ beträgt

$$\Delta E_{n\to n-1} = -R^* \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2} \right) = R^* \frac{2n-1}{n^2 (n-1)^2}.$$

   Somit beträgt die Frequenz des emittierten Photons

$$\nu_\gamma = \frac{\Delta E_{n\to n-1}}{h} = \frac{R^*}{h} \frac{2n-1}{n^2 (n-1)^2}.$$

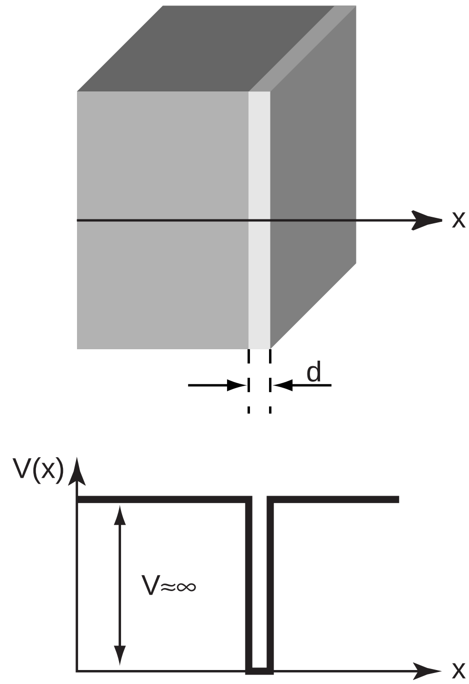
3. Für grosse n beträgt die Frequenz des Photons näherungsweise

$$\nu_\gamma \approx \frac{R^*}{h} \frac{2n}{n^4} = \frac{2R^*/h}{n^3}.$$

   Somit ist die Frequenz des abgestrahlten Photons für grosse n gerade gleich der Umlauffrequenz. Für grosse Quantenzahlen verhält sich das Elektron nach der klassischen Physik, nämlich wie ein Hertz-Oszillator, d.h. es strahlt elektromagnetische Wellen mit der Frequenz seiner Oszillationsfrequenz aus. Dieser Übergang der Quantenphysik in die klassische Physik bei hohen Quantenzahlen gilt allgemein (Korrespondenzprinzip).

10 Potentialtopf (4 Punkte)

Elektronen lassen sich in einem dünnen Metallfilm der Dicke d, welcher auf ein nichtleitendes Substrat aufgebracht ist, “einsperren”. Näherungsweise entsprechen die Energieniveaux jenen eines unendlich tiefen, 1-dimensionalen Potentialtopfes.



1. Wie dick ist der dünnste Film bei dem ein Elektron im Grundzustand ein Photon der Wellenlänge 6 μm absorbieren kann?

2. Welches ist die nächstkleinere Wellenlänge, welche von einem Elektron (in irgend einem Zustand) in dieser Schicht absorbiert werden kann? Welchem Uebergang entspricht dies?

10.1 Potentialtopf

1. Die Energieniveaus im Potentialtopf liegen bei

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 n^2 \qquad , \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Eine kleinere Filmdicke d bewirkt grössere Abstände der Energieniveaus. Somit muss bei der minimalen Filmdicke der Übergang $1 \to 2$ gerade einer Wellenlänge von 6 μm entsprechen:

$$\Delta E_{12} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \left(2^2 - 1^2\right) = h\nu = \frac{hc}{\lambda}.$$

   Auflösen nach der Filmdicke liefert

$$d = \sqrt{\frac{3\lambda\hbar\pi}{4mc}} = 2.34 \text{ nm}.$$

2. Der Übergang mit der nächstgrösseren Energiedifferenz ist $2 \to 3$. Diese beträgt

$$\Delta E_{23} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{d}\right)^2 \left(3^2 - 2^2\right) = \frac{hc}{\lambda_{23}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{23} = \frac{4mc}{5\hbar\pi} d^2 = \frac{3}{5}\lambda = 3.6 \; \mu\text{m}.$$