Thermodynamik II
Sessionsprüfung Herbst 2007
3. September 2007

Lösung

Aufg. 1)

a)
Wärmestrom durch die gesamte Wand:

$$\dot{Q}' = \frac{2\pi}{\frac{1}{\alpha_i \cdot r_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda_{Rohr}} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{\lambda_{Isolierung}} + \frac{1}{\alpha_a \cdot r_3}} \left(T_{i,\infty} - T_{a,\infty}\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\frac{10^3}{10 \cdot 5} + \frac{\ln(7/5)}{15} + \frac{\ln(15/7)}{0.1} + \frac{10^3}{5 \cdot 15}} \cdot 175 = 26.83 \text{ W/m}$$

Wärmestrom durch Konvektion im Rohr:

$$\dot{Q}' = \frac{2\pi}{\frac{1}{\alpha_i \cdot r_1}} \left(T_{i,\infty} - T_1\right) = 26.83 \text{ W/m} \quad \rightarrow \quad T_1 = T_{i,\infty} - \frac{\dot{Q}'}{2\pi \cdot \alpha_i \cdot r_1} = 114.59°\text{C}$$

Wärmestrom durch Wärmeleitung im Rohr:

$$\dot{Q}' = \frac{2\pi}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{\lambda_{Rohr}}} \left(T_1 - T_2\right) = 26.83 \text{ W/m} \quad \rightarrow \quad T_2 = T_1 - \frac{\dot{Q}' \cdot \ln(r_2/r_1)}{2\pi \cdot \lambda_{Rohr}} = 114.49°\text{C}$$

Wärmestrom durch Wärmeleitung in der Isolierung:

$$\dot{Q}' = \frac{2\pi}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{\lambda_{Isolierung}}} \left(T_2 - T_3\right) = 26.83 \text{ W/m} \quad \rightarrow \quad T_3 = T_2 - \frac{\dot{Q}' \cdot \ln(r_3/r_2)}{2\pi \cdot \lambda_{Isolierung}} = 81.94°\text{C}$$

Zulässige Betriebstemperatur ist nicht überschritten, Zustand ist erlaubt:

$$T_2 = 114.49°\text{C} \; < \; T_{\max} = 120°\text{C}$$

b)
Wärmestrom durch die gesamte Wand = freigesetzte Wärme im Gasgemisch:

$$\dot{Q}' = \dot{Q}''' \cdot A = \dot{Q}''' \cdot r_1^2 \pi \quad \rightarrow \quad \dot{Q}''' = \frac{\dot{Q}'}{r_1^2 \pi} = \frac{26.83}{0.005^2 \pi} = 341.65 \text{ kW/m}^3$$

c)
Energiebilanz:

$$0 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda_{Gas} \cdot r \cdot \frac{dT}{dr}\right) + \dot{Q}'''_{Quellen}$$

$$\lambda_{Gas} \cdot r \cdot \frac{dT}{dr} = -\dot{Q}'''_{Quellen} \cdot \frac{r^2}{2} + C_1 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\dot{Q}'''_{Quellen} \cdot \frac{r}{2\lambda_{Gas}} + \frac{C_1}{\lambda}\frac{1}{r}$$

$$T(r) = -\dot{Q}'''_{Quellen} \cdot \frac{r^2}{4\lambda_{Gas}} + \frac{C_1}{\lambda_{Gas}}\ln(r) + C_2$$

Randbedingung 1:

$$\left.\frac{dT}{dr}\right|_{r=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\frac{C_1}{\lambda}\frac{1}{r}\right|_{r=0} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = 0$$

Randbedingung 2:

$$T(r = r_1) = T_1 \quad \rightarrow \quad T_1 = -\dot{Q}'''_{Quellen} \cdot \frac{r_1^2}{4\lambda_{Gas}} + C_2 \quad \rightarrow \quad C_2 = T_1 + \dot{Q}'''_{Quellen} \cdot \frac{r_1^2}{4\lambda_{Gas}}$$

Lösung der Temperaturverteilung:

$$T(r) = \frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{4\lambda_{Gas}} \cdot \left(r_1^2 - r^2\right) + T_1 = 167.97\,°\mathrm{C} - r^2 \cdot 2.135 \cdot 10^6 \,\frac{°\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

d)
Temperatur in der Mitte des Gasgemisches $r = 0$:

$$T(r = 0) = T_1 + \frac{\dot{Q}'''_{Quellen}}{4\lambda_{Gas}} \cdot r_1^2 = 167.97\,°\mathrm{C}$$

Aufg. 2)

Betrachtung des halbierten Systems:
1 Chip plus eine halbe Rippe:

Energiebilanz für einen Chip:

$$\dot{Q}''' \cdot V_{Chip} = \underbrace{A_{Chip} \cdot \alpha \cdot \left(T_F - T_\infty\right)}_{\substack{\text{Wärmeübergang durch Konvektion} \\ \text{über freie Oberfläche des Chips}}} + \underbrace{\left(-\lambda \cdot S \cdot \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0}\right)}_{\substack{\text{Wärmeübergang durch Wärme-} \\ \text{leitung über den Rippenfuss}}}$$

Temperaturverteilung in der Rippe:

Randbedingung 1: $\theta(x=0) = \theta_F = T_F - T_\infty$

Randbedingung 2: adiabater Kopf: $\left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=L/2} = 0$

$$\Rightarrow \quad \theta(x) = \theta_F \cdot \frac{\cosh\left[m \cdot (L/2 - x)\right]}{\cosh(m \cdot L/2)}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\frac{d\theta}{dx}\right|_{x=0} = -\theta_F \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L/2)$$

Die resultierende Energiebilanz lautet:

$$\dot{Q}''' \cdot V_{Chip} = A_{Chip} \cdot \alpha \cdot \theta_F + \lambda \cdot S \cdot m \cdot \theta_F \cdot \tanh(m \cdot L/2)$$

$$\theta_F = \frac{\dot{Q}''' \cdot V_{Chip}}{A_{Chip} \cdot \alpha + \lambda \cdot S \cdot m \cdot \tanh(m \cdot L/2)}$$

$$T_F = \frac{\dot{Q}''' \cdot V_{Chip}}{A_{Chip} \cdot \alpha + \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\lambda \cdot D^3 \cdot \alpha} \cdot \tanh\left(\sqrt{\frac{\alpha}{D \cdot \lambda}} \cdot L\right)} + T_\infty$$