

Aufgabe 1 (PID-Regler – Aström-Hägglund Parameter)

a) Abbildung 1 zeigt das Nyquist-Diagramm der Strecke.

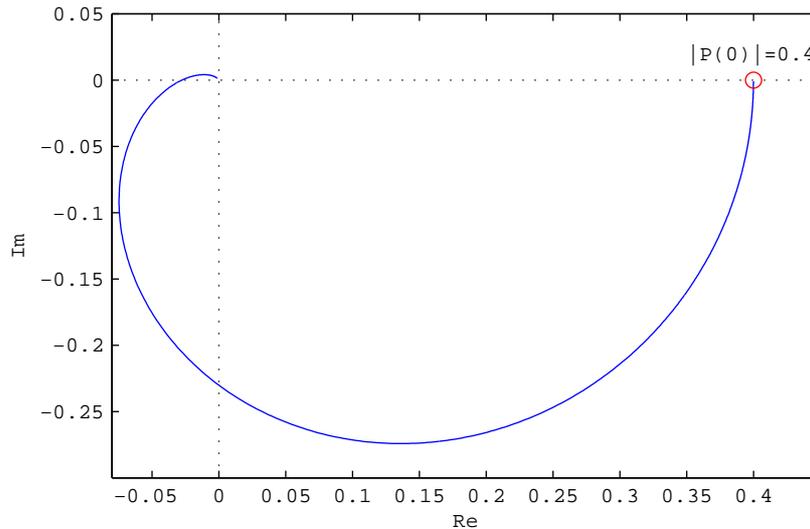


Abbildung 1: Nyquist-Diagramm der Strecke P .

Der DC-Gain der Strecke beträgt

$$|P(0)| = |P(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{2}{1 \cdot 1 \cdot 5} = \frac{2}{5} = 0.4. \quad (1)$$

b) Für den Frequenzgang der Strecke gilt:

$$P(j\omega) = \frac{2}{(1 + j\omega)(1 + j\omega)(5 + j\omega)} \quad (2)$$

$$= \frac{2}{(5 - 7\omega^2) + j(11\omega - \omega^3)} \quad (3)$$

Der analytische Ausdruck für den Betrag der Strecke lautet demnach:

$$|P(j\omega)| = \left| \frac{2}{(1 + j\omega)(1 + j\omega)(5 + j\omega)} \right| \quad (4)$$

$$= \left| \frac{2}{(5 - 7\omega^2) + j(11\omega - \omega^3)} \right| \quad (5)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(5 - 7\omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2}}. \quad (6)$$

Aus (3) kann man für die Phase der Strecke direkt den folgenden Ausdruck herleiten:

$$\arg \{P(j\omega)\} = \arctan \left(\frac{\omega^3 - 11\omega}{5 - 7\omega^2} \right). \quad (7)$$

Für die Berechnung der kritischen Verstärkung k_p^* interessiert der Betrag der Strecke bei einer Phase von $-\pi$. Es gilt (vergleiche auch Abbildung 1):

$$k_p^* = \frac{1}{|P(j\omega_\gamma)|} \quad (8)$$

wobei

$$\omega_\gamma = \{\omega \mid \arg\{P(j\omega)\} = -\pi\}. \quad (9)$$

Aus (7) und (9) lässt sich die Frequenz ω_γ bestimmen.

$$\omega^3 - 11\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_\gamma = \sqrt{11} \text{ rad/s}. \quad (10)$$

Die kritische Verstärkung folgt aus (6), (8) und (10) zu

$$k_p^* = \frac{\sqrt{(5 - 7\omega_\gamma^2)^2 + (11\omega_\gamma - \omega_\gamma^3)^2}}{2} = \frac{72}{2} = 36. \quad (11)$$

Für die Periode T^* gilt:

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega_\gamma} = \frac{2\pi}{\sqrt{11}} \approx 1.89 \text{ s} \quad (12)$$

Bemerkung: Anstatt via Phase und Betrag können die kritischen Werte k^* und T^* auch über den Imaginär- und den Realteil von $P(j\omega)$ bestimmt werden.

Es gilt:

$$\frac{2k_p^*}{(1 + j\omega_\gamma)(1 + j\omega_\gamma)(5 + j\omega_\gamma)} = -1 + 0j. \quad (13)$$

Der imaginäre und der reale Teil von (13) werden getrennt und die zwei erhaltenen Gleichungen gelöst.

- c) Für $\mu = 0.5$ und einen PID-Regler lauten die Aström-Hägglund Parameter wie folgt (vergleiche Vorlesungsfolien):

$$k_p: \quad \alpha_0 = 0.72 \quad \alpha_1 = -1.60 \quad \alpha_2 = 1.20 \quad (14)$$

$$T_i: \quad \alpha_0 = 0.59 \quad \alpha_1 = -1.30 \quad \alpha_2 = 0.38 \quad (15)$$

$$T_d: \quad \alpha_0 = 0.15 \quad \alpha_1 = -1.40 \quad \alpha_2 = 0.56 \quad (16)$$

$$a: \quad \alpha_0 = 0.25 \quad \alpha_1 = 0.56 \quad \alpha_2 = -1.20. \quad (17)$$

Mit dem Parameter κ ,

$$\kappa = \frac{1}{k_p^* \cdot |P(0)|} = \frac{1}{36 \cdot \frac{2}{5}} = \frac{5}{72} \approx 0.069 \quad (18)$$

lassen sich dann die Reglerparameter berechnen:

$$k_p = k_p^* \cdot \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot \kappa + \alpha_2 \cdot \kappa^2} = 23.3 \quad (19)$$

$$T_i = T^* \cdot \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot \kappa + \alpha_2 \cdot \kappa^2} = 1.02 \text{ s} \quad (20)$$

$$T_d = T^* \cdot \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot \kappa + \alpha_2 \cdot \kappa^2} = 0.259 \text{ s} \quad (21)$$

$$a = \alpha_0 \cdot e^{\alpha_1 \cdot \kappa + \alpha_2 \cdot \kappa^2} = 0.258 \quad (22)$$

wobei in (19) bis (22) jeweils die entsprechenden Parameter $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ aus (14) bis (17) einzusetzen sind.

- d) Die Antwort des Regelsystems auf einen Einheits-Sprung in der Sollgrösse ist in Abbildung 2 dargestellt (vergleiche RT2_Ueb2A1_ML.m).

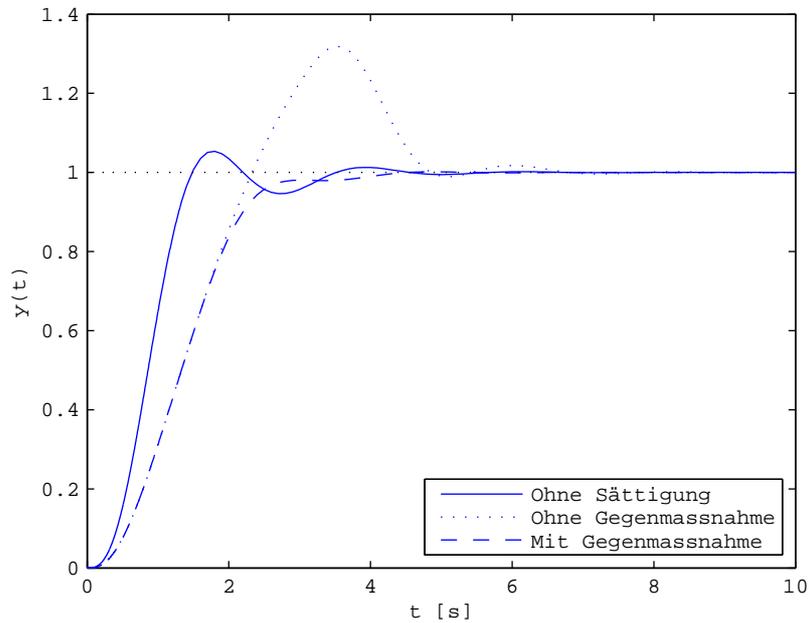


Abbildung 2: Sprungantwort des resultierenden Regelsystems.

- e) Die Stelleistung des Aktuators der realen Strecke ist begrenzt. Um ein “aufwickeln” des Integrator im Regler bei der Sättigung des Aktuators zu verhindern, kann im Regler eine Anti Reset Windup Schaltung gemäss Vorlesungsunterlagen implementiert werden. Abbildung 2 zeigt, dass das Überschwingen des Regelsystems aufgrund der Aktuatorsättigung mit der Erweiterung vermieden werden kann.

Bemerkung: Im m-File RT2_Ueb2A1_ML.m wird gezeigt, wie die gesamte Aufgabe (Teilaufgaben a) bis d)) in MATLAB[®] gelöst werden kann.

Aufgabe 2 (PID-Regler – Crossover Specifications)

- a) Die Phasenreserve φ und der Eintrittswinkel ψ könne anhand der Abbildung 3 sehr einfach bestimmt werden:

$$\varphi = \psi = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad.} \quad (23)$$

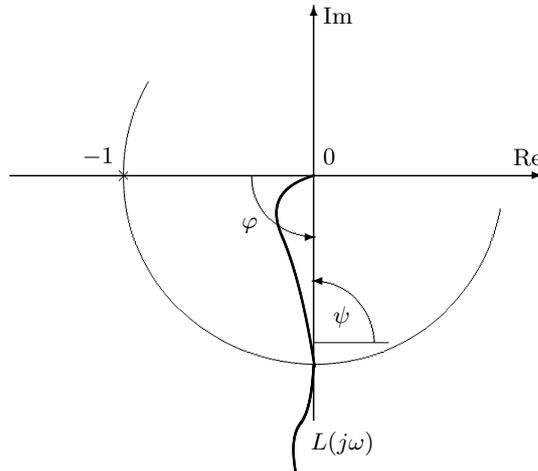


Abbildung 3: Skizze der Spezifikationen und der Kreisverstärkung L im Nyquist-Diagramm.

Um einen verschwindenden stationären Nachlauffehler zu erhalten, muss der Betrag der Kreisverstärkung für $\omega \rightarrow 0$ unendlich gross werden, $\lim_{\omega \rightarrow 0} |L(j\omega)| \rightarrow \infty$. Dies ist der Fall, wenn die Regelstrecke und/oder der Regler integrierendes Verhalten aufweisen. Im vorliegenden Fall sorgt der I-Anteil des PID-Reglers für das Verschwinden des stationären Nachlauffehlers.

Die Nyquist-Kurve der Strecke $P(s)$ (vergleiche Aufgabe 1, Abbildung 1) wird durch den PID-Regler bei $\omega = 0$ um $-\pi/2$ gedreht und mit “ ∞ ” gestreckt, bei $\omega \rightarrow \infty$ um $\pi/2$ gedreht. Für $L(j\omega)$ resultiert der in Abbildung 3 skizzierte Verlauf.

- b) Der analytische Ausdruck für den Betrag der Strecke lautet (vergleiche Aufgabe 1):

$$|P(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{(5 - 7\omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2}}. \quad (24)$$

Bei der Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ gilt:

$$r_P = |P(j\omega_c)| = \frac{2}{\sqrt{(5 - 7\omega_c^2)^2 + (11\omega_c - \omega_c^3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{104}} \approx 0.2. \quad (25)$$

Die Ableitung des Betrags nach der Frequenz ω folgt aus (24) zu

$$\frac{\partial}{\partial \omega} |P(j\omega)| = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{2}{\sqrt{(5 - 7\omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2}} \quad (26)$$

$$= \dots \quad (27)$$

$$= -\frac{6\omega^5 + 108\omega^3 + 102\omega}{((5 - 7\omega^2)^2 + (11\omega - \omega^3)^2)^{3/2}}. \quad (28)$$

Ausgewertet an der Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 1$ rad/s erhält man:

$$r'_P = \left. \frac{\partial |P(j\omega)|}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} = -\frac{6\omega_c^5 + 108\omega_c^3 + 102\omega_c}{((5 - 7\omega_c^2)^2 + (11\omega_c - \omega_c^3)^2)^{3/2}} \approx -0.2 \text{ s/rad.} \quad (29)$$

Für die Phase der Strecke gilt (vergleiche Aufgabe 1):

$$\arg \{P(j\omega)\} = \arctan \left(\frac{\omega^3 - 11\omega}{5 - 7\omega^2} \right). \quad (30)$$

Bei der Durchtrittsfrequenz hat die Strecke demnach die Phase¹

$$\varphi_P = \arg \{P(j\omega_c)\} = \arctan \left(\frac{\omega_c^3 - 11\omega_c}{5 - 7\omega_c^2} \right) \approx -1.77 \text{ rad.} \quad (31)$$

Die Ableitung der Phase nach ω folgt aus (30) zu²

$$\frac{\partial \arg \{P(j\omega)\}}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \arctan \left(\frac{\omega^3 - 11\omega}{5 - 7\omega^2} \right) \quad (32)$$

$$= \dots \quad (33)$$

$$= -\frac{7\omega^2 + 55}{\omega^4 + 26\omega^2 + 25}. \quad (34)$$

Ausgewertet an der Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 1$ rad/s erhält man:

$$\varphi'_P = \left. \frac{\partial \arg \{P(j\omega)\}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} = -\frac{7\omega_c^2 + 55}{\omega_c^4 + 26\omega_c^2 + 25} = -\frac{31}{26} \text{ s} \approx -1.19 \text{ s.} \quad (35)$$

- c) Mit den Formeln aus den Vorlesungsfolien können nun die drei Reglerparameter k_p , T_i und T_d berechnet werden (vergleiche auch RT2_Ueb3A2_ML.m).

$$k_p = \frac{-1}{r_P} \cos(\varphi - \varphi_P) = 5 \quad (36)$$

$$T_d = \frac{1}{2} \left[\tan(\psi - \varphi_P) \left(\frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(\varphi - \varphi_P) \right) + \tan(\varphi - \varphi_P) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right] \approx 0.72 \text{ s} \quad (37)$$

$$T_i = [T_d \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_P) \omega_c]^{-1} \approx 1.92 \text{ s} \quad (38)$$

Die Übertragungsfunktion des Reglers lautet dann

$$C(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (39)$$

- d) Mit den Reglerparametern aus c) können nun die Frequenzverläufe von $L(j\omega)$, $S(j\omega)$ und $T(j\omega)$ berechnet werden (vergleiche RT2_Ueb3A2_ML.m).

$$L(j\omega) = P(j\omega) C(j\omega), \quad S(j\omega) = \frac{1}{L(j\omega)}, \quad T(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \quad (40)$$

Die Abbildungen 4 und 5 zeigen, dass die geforderten Spezifikationen erfüllt werden.

¹Bei der Berechnung des Arkustangens muss aufgrund der Vorzeichen von Zähler und Nenner bestimmt werden, in welchem Quadranten sich der gesuchte Phasenwinkel befindet. In MATLAB[®] könnte hierfür der Befehl `atan2` (anstelle von `atan`) verwendet werden.

² $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

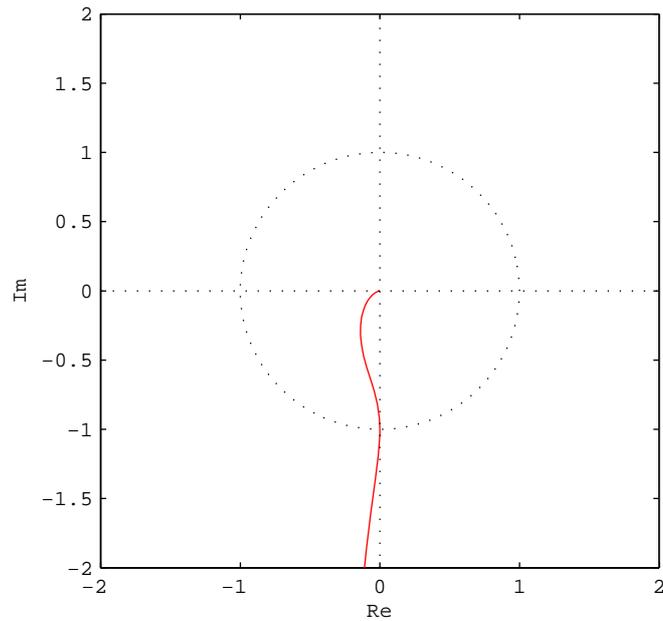


Abbildung 4: Nyquist-Diagramm von L .

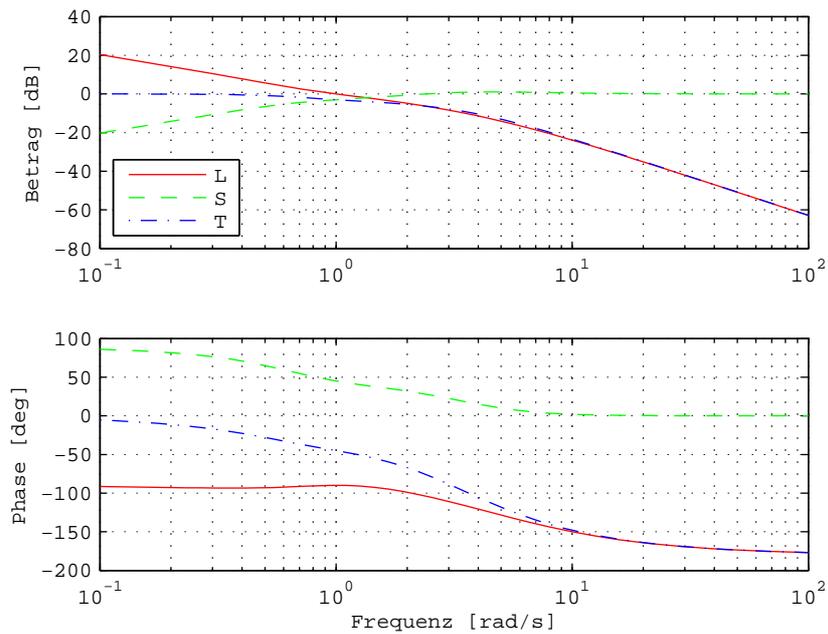


Abbildung 5: Bode-Diagramm von L , S und T .

- e) Die Pole des resultierenden Regelsystems liegen bei (vergleiche RT2_Ueb2A2_ML.m)

$$\pi_{1,2} = -2.96 \pm 1.61i, \quad \pi_{3,4} = -0.54 \pm 0.41i. \quad (41)$$

Das Regelsystem ist damit asymptotisch stabil.

Bemerkung: Die Loop-Shaping-Methode gibt keine Garantie für einen stabilen Regelkreis. Die Stabilität muss demnach nach der Reglerauslegung überprüft werden.

- f) Die Antwort des Regelsystems auf einen Einheits-Sprung in der Sollgrösse ist in Abbildung 6 dargestellt (vergleiche RT2_Ueb2A2_ML.m).

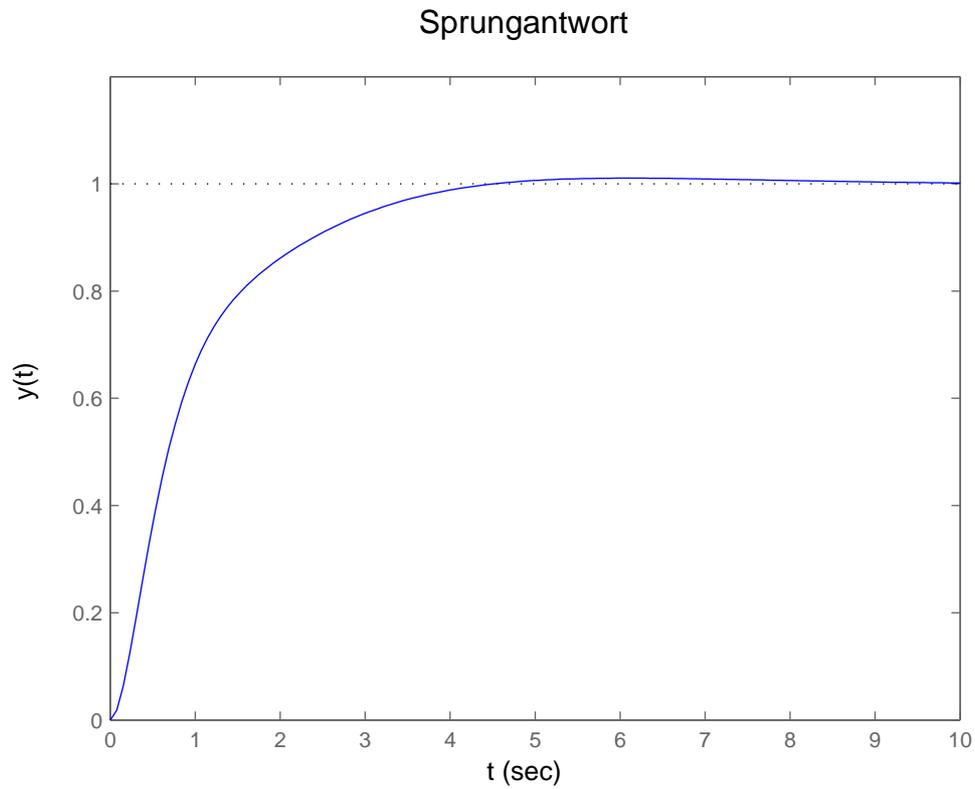


Abbildung 6: Sprungantwort des resultierenden Regelsystems.

- g) Vergleiche MATLAB[®] m-File RT2_Ueb2A2_ML.m.