

Aufgabe 1 (Robust Performance)

a) Die Übertragungsfunktion von d nach z kann geschrieben werden als

$$S_d(s) = \frac{W_1(s)}{1 + P(s)(1 + \Delta_2(s)W_2(s))C(s)} \stackrel{SISO}{=} \frac{W_1(s)}{1 + P(s)C(s)(1 + \Delta_2(s)W_2(s))} \quad (1)$$

oder mit $L(s) := P(s)C(s)$:

$$S_d(s) := \frac{W_1(s)}{1 + L(s)(1 + \Delta_2(s)W_2(s))} \quad (2)$$

Die Bedingung

$$|S_d(j\omega)| < 1, \quad \forall |\Delta_2(j\omega)| \leq 1, \quad \forall \omega \quad (3)$$

kann auch geschrieben werden als

$$\max_{\omega} \{|S_d(j\omega)|\} = \max_{\omega} \left\{ \frac{|W_1(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)(1 + \Delta_2(j\omega)W_2(j\omega))|} \right\} < 1, \quad \forall |\Delta_2(j\omega)| \leq 1. \quad (4)$$

Der Nenner wird dabei minimal, wenn das $\Delta_2(j\omega)$ so gewählt wird, dass gilt

$$|1 + L(j\omega)(1 + \Delta_2(j\omega)W_2(j\omega))| = |1 + L(j\omega)| - |L(j\omega)W_2(j\omega)| \quad (5)$$

d.h. $|\Delta_2(j\omega)| = 1$ und die "komplexen" Vektoren $1 + L(j\omega)$ und $L(j\omega)\Delta_2(j\omega)W_2(j\omega)$ sind invers parallel. Somit reduziert sich die Bedingung (3) auf:

$$\frac{|W_1(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)| - |L(j\omega)W_2(j\omega)|} < 1, \quad \forall \omega \quad (6)$$

Mit dem Nenner auf der rechten Seite wird

$$|W_1(j\omega)| < |1 + L(j\omega)| - |L(j\omega)W_2(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (7)$$

Wenn der ganze Ausdruck jetzt noch durch $|1 + L(j\omega)|$ geteilt wird, steht

$$\frac{|W_1(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} < 1 - \frac{|L(j\omega)W_2(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|}, \quad \forall \omega \quad (8)$$

mit den Definitionen der Sensitivität $S(j\omega)$ und der komplementären Sensitivität $T(j\omega)$ resultiert nun die Bedingung für robuste Regelungsqualität (Robust Performance) aus dem Skript (Gleichung (70))

$$|W_1(j\omega)S(j\omega)| + |W_2(j\omega)T(j\omega)| < 1, \quad \forall \omega \quad (9)$$

b) Jedes reale System hat Tiefpasscharakter, deshalb gilt

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} L(j\omega) = 0 \quad (10)$$

und somit

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} S(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + L(j\omega)} = 1 \quad (11)$$

und

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} T(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = 0. \quad (12)$$

Wenn man nun Gl. (9) nach $S(j\omega)$ auflöst und für $\omega \rightarrow \infty$ betrachtet, ergibt das

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |S(j\omega)| < \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1 - |W_2(j\omega)T(j\omega)|}{|W_1(j\omega)|} \stackrel{(12)}{=} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{|W_1(j\omega)|} \quad (13)$$

Mit der Übertragungsfunktion $W_1(s)$ aus der Aufgabenstellung

$$W_1(s) = \frac{s r_1 + 1}{3s} = \frac{r_1}{3} + \frac{1}{3s} \quad (14)$$

und der Gleichung (11) resultiert

$$1 < \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \frac{r_1}{3} + \frac{1}{3j\omega} \right|} = \frac{3}{|r_1|} \quad (15)$$

und somit erfüllt ein reales System die Bedingung für robuste Regelungsqualität sicher nicht mehr, falls

$$|r_1| \geq 3. \quad (16)$$

Die Spezifikation W_1 hat somit für hohe Frequenzen einen Radius kleiner eins und schliesst den Ursprung nicht ein. Diese Spezifikation kann z.B. von einem System mit relativer Ordnung zwei sicher nicht erfüllt werden, da es von links in den Ursprung kommt.

Eine sinnvollere Spezifikation beschränkt die maximale Verstärkung von Störungen am Eingang d. In unserem Fall wollen wir eine maximale Verstärkung von 3 dB zulassen.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_1(s)| = \frac{r_1}{3} = -3\text{dB} = 0.708 \quad (17)$$

und daraus folgt, dass

$$r_1 = 3 \cdot 0.708 = 2.12 \quad (18)$$

c) Zu prüfen ist die Bedingung (9). Mit Matlab[®] sieht das zum Beispiel wie folgt aus:

```

%=====
% RT2_UEB4A1 Loesung zu Regelungstechnik II, Uebung 4, Aufgabe 1.
% Robust Performance
%.....
% REGELUNGSTECHNIK II (FS 2008)
% IMRT, ETH-Zuerich 10-04-2008 Michael Benz
%-----
close all
clear all
nfig = 1;                                %Zaehler fuer Figures

```

```

%-----
% Definitionen
%-----

w = logspace(-2,3,1e3);
s = tf([1,0],1);           % Definiton der Laplace Variable
P = 4/(s+2);
C1 = 1/(2*s);
L1 = P*C1;
S1 = (1+L1)^(-1);         % Erzeugt ein LTI Model der Sensitivitaet
C2 = (s+2)/(s+1);
L2 = P*C2;
S2 = (1+L2)^(-1);         % Erzeugt ein LTI Model der Sensitivitaet
T1 = L1*S1;               % Erzeugt ein LTI Model der kompl. Sens.
T2 = L2*S2;               % Erzeugt ein LTI Model der kompl. Sens.
W1 = 2/3+1/(3*s);
W2 = s/(s+2);             % Erzeugt ein LTI von W2

[magS1,phS1]=bode(S1,w);   % Berechnung der Bode-Informationen
[magS2,phS2]=bode(S2,w);
[magT1,phT1]=bode(T1,w);
[magT2,phT2]=bode(T2,w);
[magW1,phW1]=bode(W1,w);
[magW2,phW2]=bode(W2,w);

Wsmag1 = magW1.*magS1+magW2.*magT1;% Robust Performance
Wsmag2 = magW1.*magS2+magW2.*magT2;

figure(nfig)
nfig = nfig+1;             %Plotten der Bode Diagramme
semilogx(w,20*log10(squeeze(Wsmag1(:, :, :))), 'r--', ...
          w,20*log10(squeeze(Wsmag2(:, :, :))), 'c', ...
          w,zeros(size(w)), ':')

legend(' |W_1(j\omega)S_1(j\omega)|+|W_2(j\omega)T_1(j\omega)| ', ...
       ' |W_1(j\omega)S_2(j\omega)|+|W_2(j\omega)T_2(j\omega)| ', '1')
       % erzeugt die Legende

grid on
xlabel('Frequenz [rad/s]')
ylabel('Betrag [dB]')     % erzeugt die Achsenbeschriftungen

figure(nfig)
nfig = nfig+1;             %Plotten der Bode Diagramme
semilogx(w,20*log10(squeeze(magS1(:, :, :))), 'r--', ...
          w,20*log10(squeeze(magT1(:, :, :))), 'c', ...
          w,20*log10(squeeze(magW1(:, :, :).^(-1))), 'k-', ...
          w,20*log10(squeeze(magW2(:, :, :).^(-1))), 'k:')

legend(' |S_1(j\omega)| ', ...
       ' |T_1(j\omega)| ', ...
       ' |W_1^{-1}(j\omega)| ', ...

```

```

    '|W_2^{-1}(j\omega)|')
grid on % erzeugt die Legende
xlabel('Frequenz [rad/s]')
ylabel('Betrag [dB]') % erzeugt die Achsenbeschriftungen

figure(nfig)
nfig = nfig+1; %Plotten der Bode Diagramme
semilogx(w,20*log10(squeeze(magS2(:,:,:))), 'r--',...
    w,20*log10(squeeze(magT2(:,:,:))), 'c',...
    w,20*log10(squeeze(magW1(:,:,:).^(-1))), 'k-',...
    w,20*log10(squeeze(magW2(:,:,:).^(-1))), 'k:')

legend('|S_2(j\omega)|',...
    '|T_2(j\omega)|',...
    '|W_1^{-1}(j\omega)|',...
    '|W_2^{-1}(j\omega)|')
grid on % erzeugt die Legende
xlabel('Frequenz [rad/s]')
ylabel('Betrag [dB]') % erzeugt die Achsenbeschriftungen

```

%=====

Der Amplitudengang von Gl. (9) sieht dann folgendermassen aus

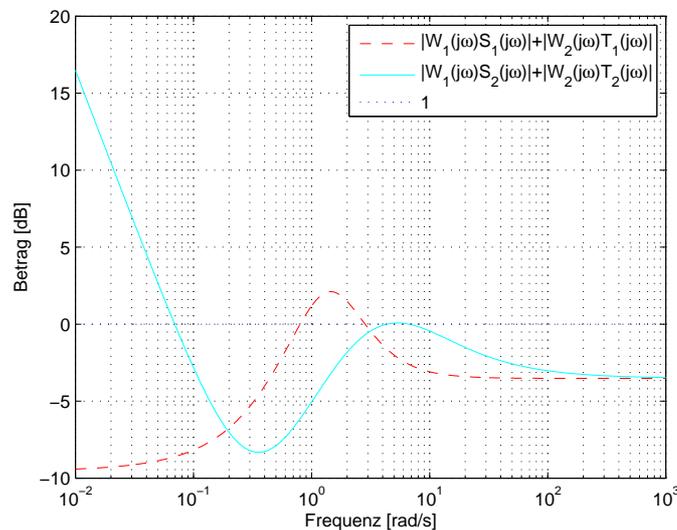


Abbildung 1: Bode Diagramm

Keiner der beiden Regler erfüllen also das Kriterium für robuste Performanz. Es ist zu beachten, dass das Kriterium (9) noch keine Stabilität garantiert! Diese ist demnach noch nachträglich zu prüfen.

Aufgabe 2 (Systemzusammenhänge im Frequenzbereich)

- a) **Falsch.** Ein grosser Wert von $\max_{\omega} |T(j\omega)|$ deutet darauf hin, dass das System schwingfreudig ist. Für $\max_{\omega} |T(j\omega)| > 1$ werden gewisse Frequenzen der Sollgrösse verstärkt. Man spricht auch von der Resonanzüberhöhung der komplementären Sensitivität. Wenn $|T(j\omega)|$ oder $|S(j\omega)|$ gross ist, kommt die Nyquistkurve nahe an den Punkt -1 heran und ist damit weniger robust (z.B. wird auch die Phasenreserve geringer).
- b) **Falsch.** Für alle realen Systeme gilt $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |L(j\omega)| = 0$, nicht 0 dB = 1.
- c) **Richtig.** Wenn man $S(s)$ durch $T(s)/L(s)$ in der Bedingung für die nominelle Regelungsqualität ersetzt, bekommt man für den SISO-Fall den gegebenen Ausdruck.
- d) **Falsch.** Robuste Regelgüte garantiert noch keine Stabilität! Der Punkt -1 kann auch falsch umkreist werden. Stabilität muss also trotzdem noch überprüft werden!
- e) **Falsch.** Die Phasenreserve φ gibt lediglich Auskunft über den Punkt $L(j\omega)|_{|L(j\omega)|=1}$. Über den Verlauf von $L(j\omega)$ für grössere oder kleinere Frequenzen als die Durchtrittsfrequenz wird damit aber keine Aussage gemacht.
- f) **Falsch.** Der geometrische Ort einer konstanten komplementären Sensitivität ist der Apolloniuskreis mit Zentrum $(-\frac{|T|^2}{|T|^2-1}, 0j)$ und Radius $\frac{|T|}{|T|^2-1}$. Da die Zentren der Apolloniuskreise nicht mit dem kritischen Punkt zusammenfallen, ist die Aussage falsch.
- g) **Richtig.** Aus der Beziehung $S(j\omega) + T(j\omega) = 1$ folgt, dass $|S(j\omega) + T(j\omega)| = 1$ ist und somit $||S(j\omega)| - |T(j\omega)|| \leq 1$ (=0 dB) gelten muss. Dies impliziert:

$$|T(j\omega)| - 1 \leq |S(j\omega)| \leq |T(j\omega)| + 1 \leq \max_{\omega} |T(j\omega)| + 1$$

$$|S(j\omega)| - 1 \leq |T(j\omega)| \leq |S(j\omega)| + 1 \leq \max_{\omega} |S(j\omega)| + 1.$$

- h) **Falsch.** $|1 + L(j\omega)| < 1$ für $\omega \in [\omega_1, \omega_2] \Leftrightarrow |S(j\omega)| > 0$ dB für $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Beträgt die Amplitude der Sensitivität in einem Frequenzintervall mehr als 1, werden in diesem Frequenzintervall Störungen am Ausgang der Strecke am Ausgang des Regelsystems verstärkt wahrgenommen.
- i) **Richtig.** Die Gleichung $\|W_1(j\omega)S(j\omega)\|_{\infty} + \|W_2(j\omega)T(j\omega)\|_{\infty} < 1$ bedeutet, dass

$$(\max_{\omega} |W_1(j\omega)S(j\omega)|) + (\max_{\omega} |W_2(j\omega)T(j\omega)|) < 1 \quad (19)$$

sein muss. Die beiden Terme werden also bei der jeweils (nicht unbedingt gleichen!) maximierenden Frequenz ausgewertet. Die Forderung ist also noch (unsinnig) härter als die Forderung der robusten Regelgüte. Trotzdem wird so auch robuste Regelgüte garantiert, bei der *eine* Frequenz für beide Terme betrachtet wird.

- j) **Richtig.** Aus $\max_{\omega} |T(j\omega)| < 1.5$ dB ≈ 1.2 folgt mit der Beziehung aus Teilaufgabe g): $\max_{\omega} |S(j\omega)| \leq 1 + \max_{\omega} |T(j\omega)| < 2.2 < 2.8 \approx 9$ dB.