151-0590-00 **Regelungstechnik II** (FS 2008) **Musterlösung**

Übung 5 **Unsicherheitsschranken, Spezifikationen im Frequenzbereich, Matlab**

M.B. (michael.benz@imrt.mavt.ethz.ch), 14. April 2008

Aufgabe 1 (Unsicherheitsschranke für gemessene Übertragungsfunktion)

a) Diese Teilaufgabe wurde komplett in Matlab gelöst. Dazu wurde das bereitgestellte m-File (`RT2_Ueb5A1.m`) vervollständigt.

i) Folgender Code erzeugt die graphische Darstellung (Bode und Nyquist Diagramm) des nominalen Modells und der gemessenen Frequenzantworten:

```
s = tf('s');
P = (2e6*s+2e7)/(s^4+206.7*s^3+3.021e5*s^2+2e6*s+2e7)

figure(1)
bode(P,'k'), hold on

figure(2)
nyquist(P,'k'), hold on

for k = 1:size(M,2)
    P_k = frd(M(:,k).*exp(i*PHI(:,k)),W);
    figure(1)
    bode(P_k,'.b')
    figure(2)
    nyquist(P_k,'.b:')
end
```

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die erzeugten Diagramme.

Bemerkungen:

- Nach der Definition von `s` als Übertragungsfunktion können beliebige Übertragungsfunktionen in einfacher Weise formuliert werden.
- `size(M,2)` entspricht der Anzahl Messreihen.
- Für jede Messreihe wird ein System `P_k` aus dem Amplitudengang und dem Phasengang berechnet. (Beachte die vektorielle Notation, `M(:,k)` und `PHI(:,k)`, und die elementweise Multiplikation der Vektoren mit `.*`)

ii) Für die Berechnung des Amplituden- und des Phasenvektors des nominalen Systems wird der Befehl `bode` verwendet.

```
[mag,phase] = bode(P,W);
m(:,1) = mag;
phi(:,1) = pi/180*phase;
```

Bemerkungen:

- Der Befehl `bode` liefert die Phase in Grad.

iii) Die iterative Berechnung und die anschliessende Darstellung (vergleiche Abbildung 3) der Unsicherheiten erfolgt wie folgt:

```
UNC = [];
for k = 1:size(M,2)
    m_k = M(:,k);
    p_k = PHI(:,k);
    Unc = abs((m_k.*exp(i*p_k))./(m.*exp(i*phi))-1);
    UNC = [UNC,Unc];
end

figure
loglog(W,UNC,'+','markersize',5), hold on
xlabel('Frequency (rad/s)')
ylabel('|W_2(j\omega)|')
```

Bemerkungen:

- `m_k` und `p_k` bezeichnen die Amplituden- bzw. Phasen*vektoren* der Messreihen.
- `Unc` umfasst den Vektor der Unsicherheiten für eine Messreihe über alle Frequenzen. (Beachte die elementweise Multiplikation und Division der Vektoren mit `.*` respektive `./`.)
- In `UNC` werden alle Unsicherheiten aller Messreihen zusammengefasst. Sie können so in einem Schritt graphisch dargestellt werden.

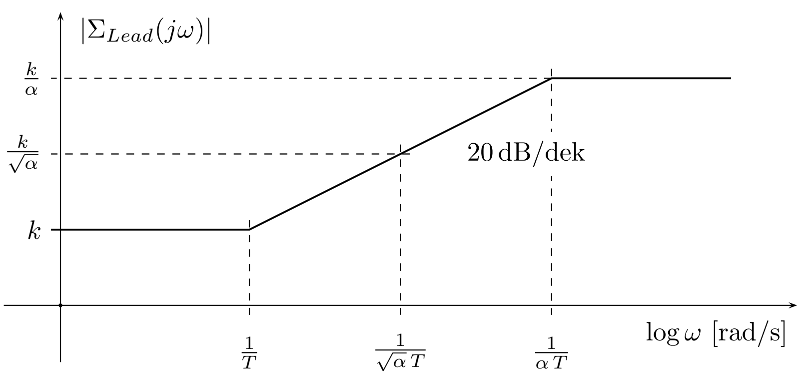
iv) Die Schranke für die Unsicherheiten wird iterativ hergeleitet. Am einfachsten beginnt man mit einer konstanten Schranke für die tiefen Frequenzen. Für die vorliegenden Daten wählt man zum Beispiel:

$$W_{2,0} = 0.06\,. \tag{1}$$

Dies ergibt die gepunktete Linie der Abbildung 3.

Für die Beschreibung des Anstiegs der Unsicherheit bei höheren Frequenzen werden bevorzugt Lead-Elemente eingesetzt,

$$\Sigma_{Lead}(s) = k \cdot \frac{1 + T \cdot s}{1 + \alpha \cdot T \cdot s} \qquad 0 < \alpha < 1\,. \tag{2}$$



Um dem steilen Anstieg der Unsicherheit bei ca. 4 rad/s gerecht zu werden, werden zwei identische Lead-Elemente in Serie geschaltet.

$$W_{2,1}(s) = W_{2,2}(s) = k \cdot \frac{1 + T \cdot s}{1 + \alpha \cdot T \cdot s}\,. \tag{3}$$

Bei hohen Frequenzen ist die obere Schranke der Unsicherheit etwa um einen Faktor 20 höher als bei tiefen Frequenzen. Wir wählen für den Parameter α der beiden identischen Lead-Elemente demnach,

$$\left(\frac{k/\alpha}{k}\right) \cdot \left(\frac{k/\alpha}{k}\right) = 20 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{20}}\,. \tag{4}$$

Um die Schranke bei tiefen Frequenzen nicht zu verschieben wählt man $k = 1$. Der Parameter T wird so gewählt, dass die mittlere Frequenz der beiden Elemente beim Anstieg der Unsicherheit (ca. 4 rad/s) zu liegen kommt,

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}\,T} = 4 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{4\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{4} \cdot 20^{-1/4}\,. \tag{5}$$

Aus der Serieschaltung der drei Elemente erhält man schliesslich die folgende Unsicherheitsschranke,

$$W_2(s) = W_{2,0} \cdot W_{2,1}(s) \cdot W_{2,2}(s) \approx \frac{1.2\,s^2 + 4.54\,s + 4.29}{s^2 + 16.91\,s + 71.53}\,. \tag{6}$$

Der Amplitudengang von $W_2(s)$ ist in der Abbildung 3 also durchgezogene Linie dargestellt. Der Matlab-Code für die Berechnung und die Darstellung der Unsicherheitsschranke lautet wie folgt:

```
k = 0.06;
W2_0 = tf(k);
[mag,phase] = bode(W2_0,W);
mag_W2_0(:,1) = mag;

loglog(W,mag_W2_0,'k:')

gain = 20;
freq = 4;

k = 1;
alpha = 1/sqrt(gain);
T = 1/(freq*sqrt(alpha));
W2_1 = k*(1+T*s)/(1+alpha*T*s);
[mag,phase] = bode(W2_1,W);
mag_W2_1(:,1) = mag;

loglog(W,mag_W2_0.*mag_W2_1,'k-.')

k = 1;
alpha = 1/sqrt(gain);
T = 1/(freq*sqrt(alpha));
W2_2 = k*(1+T*s)/(1+alpha*T*s);
[mag,phase] = bode(W2_2,W);
mag_W2_2(:,1) = mag(1,1,:);

loglog(W,mag_W2_0.*mag_W2_1.*mag_W2_2,'k')

W2 = W2_0*W2_1*W2_1;
```

Bemerkung: Die beschriebene Wahl von $W_2(s)$ ist selbstverständlich nur eine mögliche unter vielen.

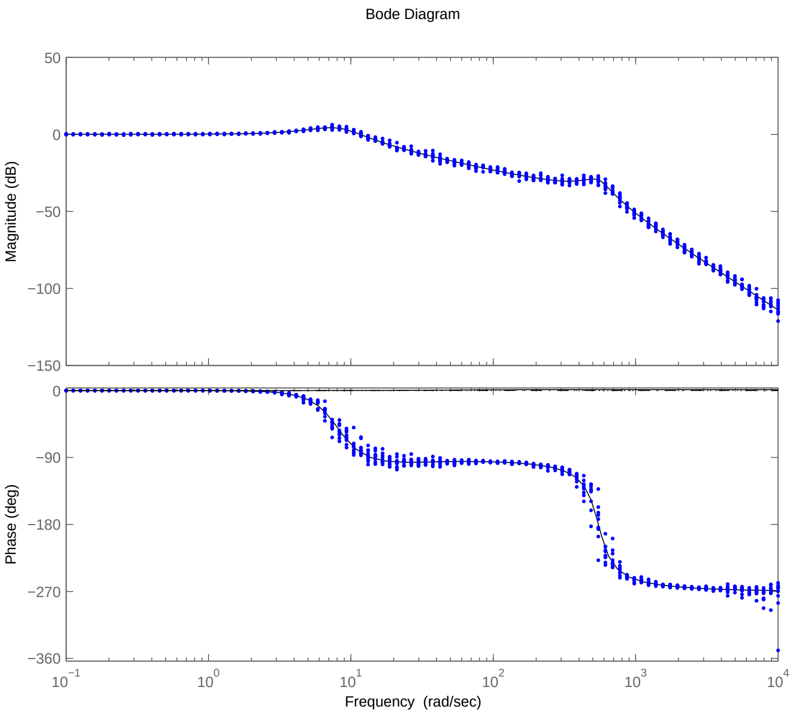


Abbildung 1: Bode Diagramm des nominalen Systems (−) und der Messreihen (•)

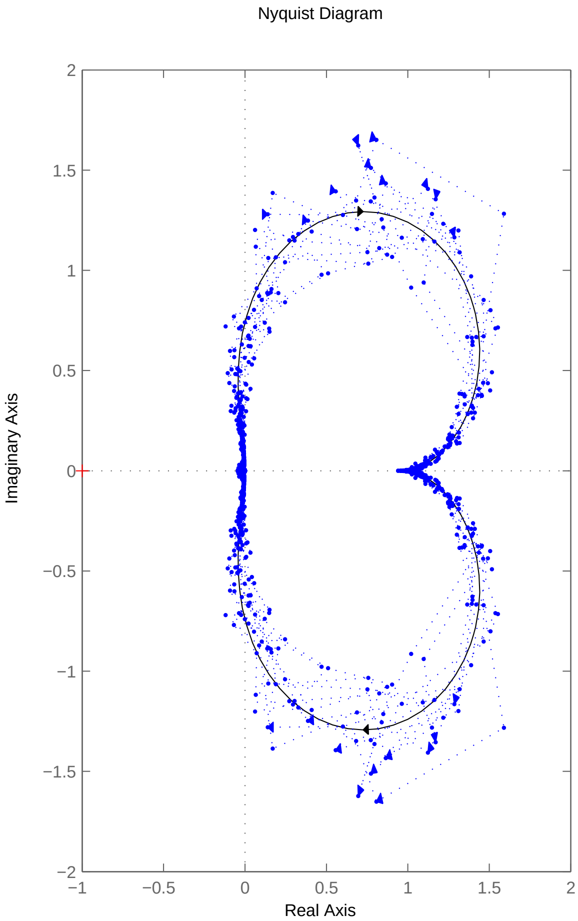


Abbildung 2: Nyquist Diagramm des nominalen Systems (−) und der Messreihen (•)

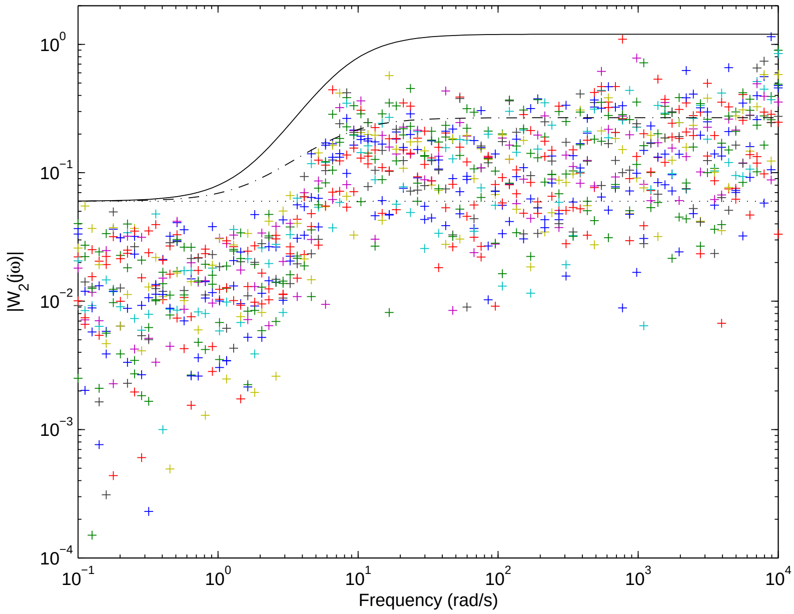


Abbildung 3: Modellunsicherheiten (+) und obere Schranke $W_2(s)$ (−)

b) Mit dem Befehl

```
P_jw   = freqresp(P,6)
         1.4410 - 0.5729i
mag_P  = abs(P_jw)
         1.5508
```

erhält man den Real- und den Imaginärteil des nominalen Systems bei der Frequenz $\omega_0 = 6\,\mathrm{rad/s}$.

Der Real- und den Imaginärteil von $W_2(j\omega_0)$ beträgt

```
W2_jw   = freqresp(W2,6)
          1.2499 - 0.1307i
mag_W2  = abs(W2_jw)
        = 0.4416
```

Der Bereich

$$\mathcal{S}_{\omega_0} = \{P(j\omega_0) \cdot (1 + \Delta(j\omega_0) \cdot W_2(j\omega_0)) \mid |\Delta(j\omega_0)| \leq 1,\ \arg\{\Delta(j\omega_0)\} \in [-\pi, \pi]\} \quad (7)$$

entspricht somit in der Nyquist Ebene einer Kreisscheibe um den Punkt

$$P(j\omega_0) \approx 1.44 - j \cdot 0.57\,, \quad (8)$$

mit Radius

$$|P(j\omega_0)| \cdot |W_2(j\omega_0)| \approx 1.55 \cdot 0.44 = 0.68\,. \quad (9)$$

Bemerkung: $\mathcal{S}_{j\omega_0}$ entspricht einer Kreisscheibe, da die Phase von $\Delta(j\omega)$ frei ist und für den Betrag von $\Delta(j\omega)$ gilt, $|\Delta(j\omega_0)| \leq 1$.

Aufgabe 2 (Spezifikationen im Frequenzbereich)

Diese Aufgabe wurde komplett in Matlab gelöst.

```
%Definition der Strecke und der Gewichtung
%----------------------------------------
A = [ 0, 1, 0; 0.7, 0, -100; 0, 0, 0];
B = [ 0; 0; 0.01];
C = [-1, 0, 0];
D = 0;

%System im Zustandsraumdarstellung
P = ss(A,B,C,D);

%Regler
s = tf('s');
K = 100*(s+0.8)*(s+0.5)/(s+10);

%Kreisverstärkung
L = P*K;

%Sensitivität
S = inv(1+L);
w = logspace(-2,2,500);

%Gewichtung W1 für die Sensitivität
W1 = (0.5*s+2)/(s+0.2);
```

a) Die Bedingung für die nominale Regelgüte läutet für alle ω:

$$\|S(s) \cdot W_1(s)\|_\infty = |S(j\omega)| \cdot |W_1(j\omega)| < 1$$

```
%S*W1 muss für alle w kleiner als 0dB sein
figure(1)
bodemag(S*W1,tf(1,1),'r--',w)
grid on
xlabel('Frequenz')
ylabel('Amplitude')
legend('S (j\omega)*W_1(j\omega)','0 dB','location','SouthEast')
ylim([-30 2])
```

b) Singularwerte der oberen Schranke $W_1^{-1}(s)$ und der Sensitivität $S(s)$.

```
figure(2)
bodemag(S,inv(W1),'r--',w)
grid on
xlabel('Frequenz')
ylabel('Amplitude')
legend('S (j\omega)','W_1^{-1}(j\omega)','location','SouthEast')
```

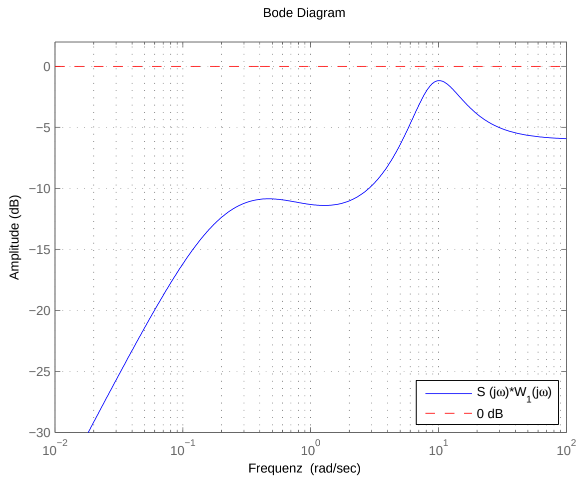


Abbildung 4: Amplitudengang $S(s) \cdot W_1^{-1}(s)$ und 0dB $(--)$

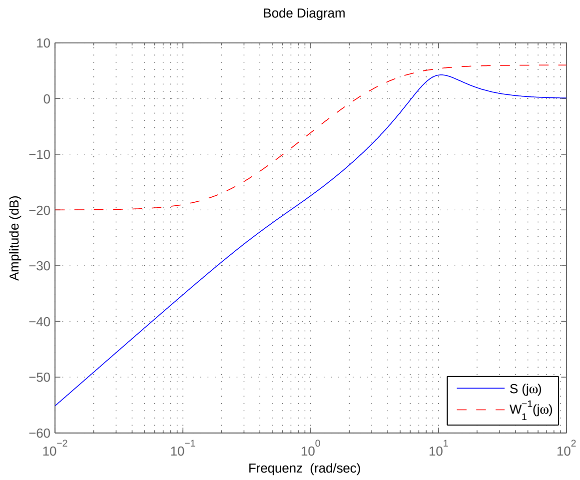


Abbildung 5: Amplitundengang der Sensitivität und der Schranke $W_1^{-1}(s)$

c) Der Abstand zum Nyquist-Punkt ist der Betrag der Kreisverstärkungsdifferenz $D = 1 + L$, also:

```
%Minimaler Abstand zum Nyquist-Punkt
mu = min(bode(1+L))

   0.6153
```

d) Das System ist nur dann asymptotisch stabil, falls die Pole der komplementären Sensitivität negativen Realteil haben. Also ist das geregelte System stabil.

```
%Komplementäre Sensitivität
T = 1-S;
pole(T)

    -4.3162 + 8.2707i
```

```
-4.3162 - 8.2707i
-0.7734
-0.5942
```

Die nominale Regelgüte sagt nichts über die Stabilität des geschlossenen Regelkreises aus. Die Stabilität ist zwingend zu überprüfen.