151-0590-00 **Regelungstechnik II** (FS 2008) **Musterlösung**

Übung 6 **System Pole, Singularwerte, RGA**

R.M. (moeller@imrt.mavt.ethz.ch), 24. April 2008

Aufgabe 1 (System Pole und Singularwerte)

a) Die Pole eines MIMO-Systems sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Nenners aller Minoren von $P(s)$. Minoren sind die Determinanten aller möglichen Submatrizen einer Matrix. In diesem Beispiel also:

$$\frac{3s+1}{s+2}, \frac{s}{s+1}, \frac{2}{s+1}, \frac{-1}{s+1}, \frac{3s+1}{s+2} \cdot \frac{-1}{s+1} - \frac{s}{s+1} \cdot \frac{2}{s+1} = -\frac{5s^2+8s+1}{(s+1)^2 \cdot (s+2)} \tag{1}$$

Der kleinste gemeinsame Nenner ist also: $(s+1)^2 \cdot (s+2)$ und hat die Nullstellen -1 und -2, wobei -1 eine 2-fache Nullstelle ist. Die Pole des MIMO-Systems $P(s)$ sind also: -1, -1, -2

b) Die Nullstellen eines MIMO-Systems $P(s)$ sind die Nullstellen des grössten gemeinsamen Teilers der Zählerpolynome der maximalen Minoren, nachdem diese normiert wurden, damit sie das Pole-Polynom als Nenner haben. Im Falle einer quadratischen Matrix gibt es nur einen maximalen Minor, die Determinante der Matrix $P(s)$, die in diesem Fall auch schon normiert ist:

$$\det P(s) = -\frac{5s^2+8s+1}{(s+1)^2 \cdot (s+2)} \tag{2}$$

Die Nullstellen des Systems sind also die Nullstellen des Polynoms $5s^2+8s+1$. Die beiden Nullstellen des Systems sind: $-\frac{4+\sqrt{11}}{5}$ und $\frac{-4+\sqrt{11}}{5}$.

c) Da das System 3 Pole hat, ist die minimale Systemordung 3.

d) Die Anzahl der Singularwerte eines Systems mit q Eingängen und p Ausgängen ist: $min(p,q)$, also die kleinere der beiden Dimensionen. Hier ist $p = q = 2$, also hat das System für jede Frequenz 2 nicht verschwindende Singularwerte.

e) Die minimale, bzw. maximale Verstärkung, bei jeder Frequenz, ist gegeben durch den kleinsten, bzw. grössten Singularwert σ_{min} und σ_{max}.

Die Singularwerte $\sigma_i\{M\}$, $i = 1, \ldots, k$ einer Matrix M sind die positiven Quadratwurzeln der k grössten Eigenwerte $\lambda_i\{\bar{M}^T M\}$ der Hermiteschen Matrix $\bar{M}^T M$:

$$\sigma_i\{M\} = \sqrt{\lambda_i\{\bar{M}^T M\}} \qquad i = 1, \ldots, k\,. \tag{3}$$

Berechnung der Singularwerte an der Stelle $s = j \cdot \omega$ mit $\omega = 1$ rad/s:

$$M = P(j) = \begin{pmatrix} 1+j & \frac{1+j}{2} \\ 1-j & \frac{j-1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Hermitesche Matrix ist dann:

$$\bar{M}^T M = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{max} = 4, \quad \lambda_{min} = 1 \tag{4}$$

Und damit der kleinste, bzw. grösste Singularwert:

$$\Rightarrow \quad \sigma_{max} = \sqrt{\lambda_{max}} = 2, \quad \sigma_{min} = \sqrt{\lambda_{min}} = 1 \tag{5}$$

f) Die Singularwertverläufe können mit folgenden MATLAB® Zeilen geplottet werden:

```
sys = tf({[3 1], [1 0]; 2, -1},{[1 2], [1 1]; [1 1], [1 1]});
sigma(sys);
```

Das Ergebnis ist in Abbildung 1 gezeigt.

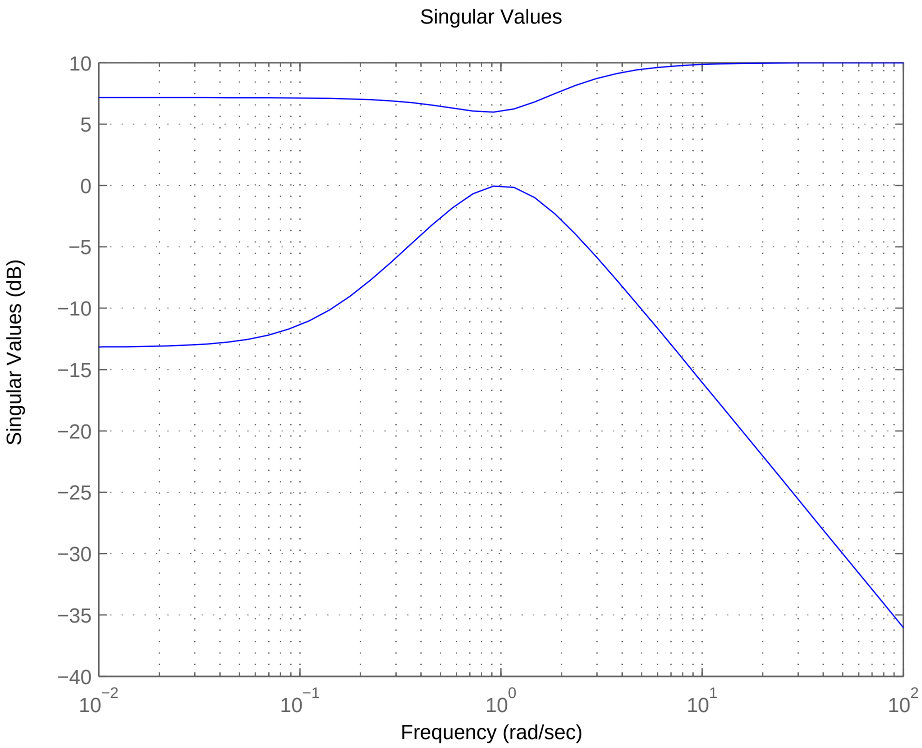

Abbildung 1: Singularwertverläufe des Systems.

Aufgabe 2 (RGA)

a) Der Relative-Gain Array (RGA) lässt sich mit der folgenden Formel berechnen:

$$RGA(s) = P(s). \times \left(P(s)^{-1}\right)^T \tag{6}$$

$.\times$ bedeutet dabei elementweise Multiplikation. Die Inverse von P(s) ergibt:

$$(P(s)^{-1})^T = \frac{1}{\dfrac{-2k^2}{(4s+1)(5s+1)} - \dfrac{ks+1}{(s+1)(s+2)}} \begin{pmatrix} \dfrac{2k}{5s+1} & \dfrac{-1}{s+1} \\ \dfrac{-ks-1}{s+2} & \dfrac{-k}{4s+1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Der RGA wird somit nach einigen Rechenschritten:

$$RGA(s) = \frac{1}{20ks^3 + (20+9k+2k^2)s^2 + (9+k+6k^2)s + 1 + 4k^2} \cdot \begin{pmatrix} 2k^2s^2 + 6k^2s + 4k^2 & 20ks^3 + (20+9k)s^2 + (9+k)s + 1 \\ 20ks^3 + (20+9k)s^2 + (9+k)s + 1 & 2k^2s^2 + 6k^2s + 4k^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

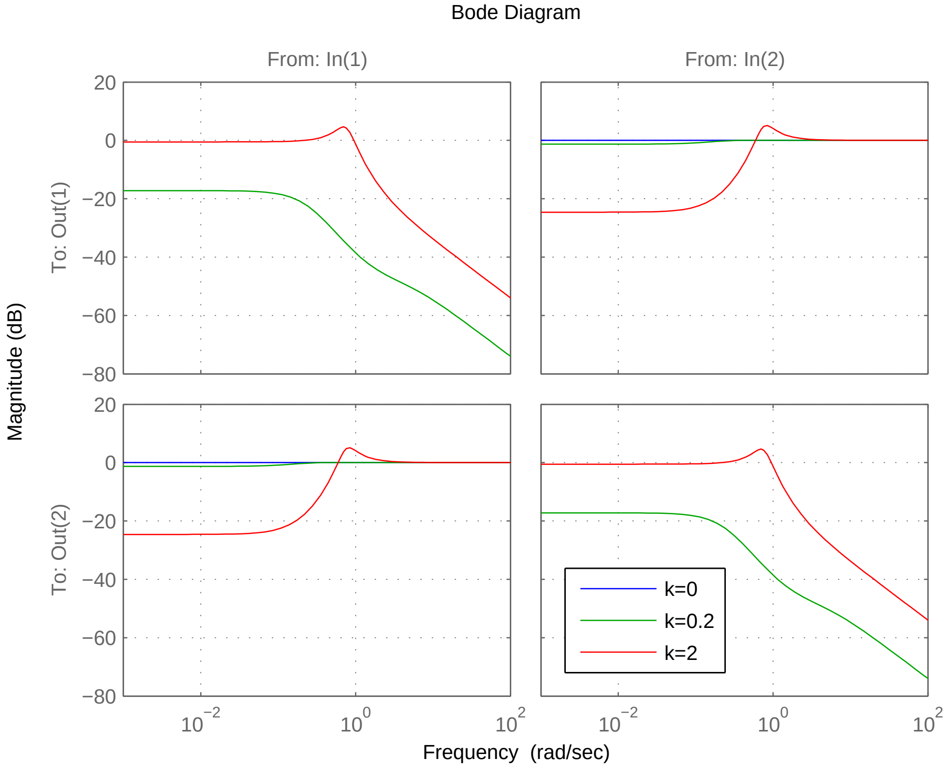

Abbildung 2: Amplitudengänge des RGA für verschiedene k's.

b) In Abbildung 2 sind die Amplitudengänge für die verschiedenen k's aufgezeichnet. Die Amplitudengänge können z.B. mit folgendem MATLAB® Code erzeugt werden:

```
for k=[0,0.2,2]
    numa = [2*k^2 6*k^2 4*k^2];
    numb = [20*k 20+9*k 9+k 1];
    den = [20*k 20+9*k+2*k^2 9+k+6*k^2 1+4*k^2];
    RGA=tf({numa,numb;numb,numa},{den,den;den,den});
    bodemag(RGA);
    hold on;
end;
legend('k=0','k=0.2','k=2');
```

Wenn die ausserdiagonal-Einträge Null werden oder klein sind im Verhältins zu den Diagonalelementen, d.h. die beiden Hauptregelkreise mindestens einseitig entkoppelt sind, können die Regelkreise von u_1 nach y_1 und von u_2 nach y_2 getrennt betrachtet (geregelt) werden. In unserem Beispiel ist die RGA Matrix anti-diagonal (aber trotzdem diagonal dominant) für kleine k. In diesem Fall können die Regelkreise für die Paarungen u_1 nach y_2 und u_2 nach y_1 getrennt betrachtet werden.

Bemerkung: Eine wichtige Eigenschaft des RGA ist, dass die Summen der Zeilen und Kolonnen jeweils 1 ergeben! D.h. die RGA-Matrix eines 2×2 System wird mit einem Eintrag vollständig beschrieben.

c) Negative Einträge in der RGA Matrix bedeuten, dass die zugehörigen Gains bei der "open-loop"-Betrachtung[1] ein anderes Vorzeichen haben als bei der "closed-loop"-Betrachtung.[2] Es ist also zu vermeiden, dass ein Regelkreis über einem Ein-Ausgangspaar mit negativem Eintrag in der RGA-Matrix geschlossen wird, da das Vorzeichen des Übertragungsverhalten davon abhänig ist, ob die übrigen Kreise geschlossen oder geöffnet sind. In Abbildung 3 ist ein MIMO System mit den zwei Möglichen Paarungsarten zu erkennen. Wenn die zugehörige RGA-Matrix nun zum Beispiel negative ausserdiagonal-Elemente hat, kann die Paarung mit ausgezogener Linie realisiert werden. Die Paarung, welche durch die gestrichelten Linien angedeutet ist, eignet sich hingegen nicht.

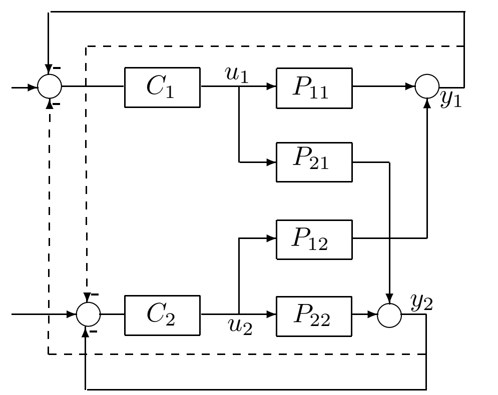

Abbildung 3: MIMO System mit guter (-) und schlechter (−−) Paarung.

Bemerkung: Natürlich ist auch die Paarung mit den ausgezogenen Linien nur sinnvoll, wenn die Subsysteme nicht zu stark gekoppelt sind, d.h. die RGA-Matrix nahe bei der Einheitsmatrix ist.

[1] Übertragunsverhalten wenn alle anderen Loops geöffnet sind.
[2] Übertragunsverhalten wenn alle Loops ausser der betrachtete geschlossen sind.