151-0590-00 **Regelungstechnik II** (FS 2008) **Musterlösung**

Übung 7 **Singularwerte**

D.R. (daniel.rupp@imrt.mavt.ethz.ch), R.M. (moeller@imrt.mavt.ethz.ch), 19. Mai 2008

Aufgabe 1 (Frequenzantworten von MIMO Systemen)

a) Beide Komponenten des Eingangssignal $u(t)$ weisen eine Frequenz von 1 rad/s auf. Man betrachtet also $P(j \cdot 1)$:

$$P(j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{i+3} & \frac{1}{i+1} \\ \frac{1}{i+1} & \frac{3}{i+1} \end{bmatrix} .$$

Wenn das System nach der Anregung vollständig eingeschwungen ist, kann man das Ausgangssignal y_1 schreiben als

$$y_1 = \nu_1 \cdot \cos\left(t + \psi_1\right).$$

Dabei gilt für den "Phasor"

$$\nu_1 \cdot e^{i\psi_1} = \frac{1}{i+3} + \mu \cdot \frac{1}{i+1} \cdot e^{i\varphi}$$

Wenn man nun die Brüche komplex erweitert

$$\nu_1 \cdot e^{i\psi_1} = \frac{3-i}{10} + \mu \cdot \frac{1-i}{2} \cdot e^{i\varphi}$$

die Exponentialfunktion aufteilt

$$\nu_1 \cdot e^{i\psi_1} = \frac{3-i}{10} + \mu \cdot \frac{1-i}{2} \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

erhält man nach einigen Umformungen

$$\nu_1 \cdot e^{i\psi_1} = \frac{3}{10} + \mu \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi) + i \cdot \left(\mu \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin\varphi - \cos\varphi) - \frac{1}{10}\right)$$

Setzt man diese Gleichung 0 ergibt sich ein Gleichungssystem für die zwei Unbekannten φ und μ:

$$\mu \cdot \frac{1}{2} \cdot (\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{3}{10} = 0 \quad (1)$$

$$\mu \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sin\varphi - \cos\varphi) - \frac{1}{10} = 0 \quad (2)$$

mit der Lösung: $\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi$.

b) Ziel ist es, die Norm $\|y(t)\|$ zu minimieren. Das Quadrat davon kann geschrieben werden als:

$$\|y(t)\|^2 = y^T y = u^T(P^T P)u \quad (3)$$

Für $\mu = 1$ kann u geschrieben werden als:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\varphi} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Wir regen mit einer Frequenz von 1 rad/s an. Für $s = j$ erhalten wir:

$$\bar{P}(j)^T P(j) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{17-j}{10} \\ \frac{17+j}{10} & 5 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Nach einigen Umformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|^2 &= u^T(P^TP)u && (6)\\
&= \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{17-j}{10} \\ \frac{17+j}{10} & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\varphi} \end{bmatrix} && (7)\\
&= \frac{3}{5} + \frac{17+j}{10} e^{-j\varphi} + \frac{17-j}{10} e^{j\varphi} + 5 \cdot e^{-j\varphi} e^{j\varphi} && (8)\\
&= \frac{28}{5} + \frac{17}{10}(e^{-j\varphi} + e^{j\varphi}) + \frac{j}{10}(e^{-j\varphi} - e^{j\varphi}) && (9)\\
&= \frac{1}{5}(28 + 17\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) && (10)
\end{aligned}$$

Ableiten und gleich 0 setzen um das Minimum zu suchen:

$$\begin{aligned}
-\frac{17}{5}\sin(\varphi) + \frac{1}{5}\cos(\varphi) = 0 && (11)\\
\tan(\varphi) = \frac{1}{17} && (12)
\end{aligned}$$

Das führt zu der Lösung:

$$\varphi = \arctan\frac{1}{17} + n \cdot \pi, \tag{13}$$

wobei die Lösungen für ungerade n den Minimas der Funktion entsprechen.
Die gesuchte Lösung ist also:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{17}\right) - \pi = -3.0828 \tag{14}$$

Ein alternativer Lösungsweg ist folgender:

Um die Norm $\|y(t)\|$ zu minimieren, müssen wir in der selben "Richtung", sprich mit dem selben Phasenunterschied zwischen u_1 und u_2 anregen, wie der Eigentvektor des kleinsten Singularwertes.

Wir regen mit einer Frequenz von 1 rad/s an, deshalb müssen wir die Singularwerte an der Stelle $s = j$ berechnen:

$$M = P(j) = \begin{pmatrix} \frac{3-j}{10} & \frac{1-j}{2} \\ \frac{1-j}{2} & \frac{3-3j}{2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Die Hermitesche Matrix ist dann:

$$\bar{M}^T M = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{17-j}{10} \\ \frac{17+j}{10} & 5 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Das charakteristische Polynom:

$$\lambda^2 - \frac{28}{5}\lambda + \frac{1}{10} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{max} = \frac{28 + 3\sqrt{86}}{10}, \quad \lambda_{min} = \frac{28 - 3\sqrt{86}}{10} \tag{17}$$

Der gesuchte Eigenvektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ muss die Gleichung:

$$\bar{M}^T M \cdot v = \lambda_{min} \cdot v \tag{18}$$

erfüllen. Wählt man $v_1 = 1$, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{17-j}{10} v_2 \\ \frac{17+j}{10} + 5v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28 - 3\sqrt{86}}{10} \\ \frac{28 - 3\sqrt{86}}{10} v_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Und nach dem Auflösen nach v_2:

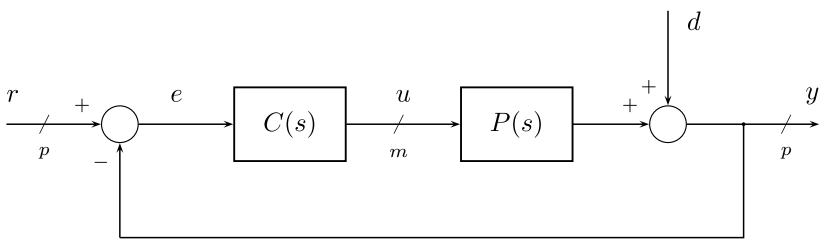
$$v_2 = \frac{17+j}{290}(22 - 3\sqrt{86}) \tag{20}$$

Der gesuchte Phasenunterschied ist schliesslich:

$$\varphi = \arg(v_2) - \arg(v_1) = \arctan(\frac{1}{17}) - \pi - 0 = -3.0828 \tag{21}$$

Aufgabe 2 (Übertragungsmatrizen eines Regelsystems)

a) Um die Übertragungsmatrizen des Regelsystems herzuleiten, bricht man den Regelkreis an einer Stelle auf und schreibt das entsprechende Signal in Funktion der Übertragungsmatrizen der involvierten Systeme und Signale auf. Eine weitere Gleichung wird für das relevante Ausgangssignal aufgestellt.



Für den "loop breaking point" bei e lauten die entsprechenden Systemgleichungen[1],

$$e = r - PCe - d \tag{22}$$
$$y = PCe + d\,. \tag{23}$$

Beachte: Die Matrixmultiplikation ist im allgemeinen nicht kommutativ. Die Reihenfolge der Matrizen muss somit beachtet werden. (z.B: das Signal e durchläuft zuerst den Kompensator C und dann die Strecke P.)

Die Gleichung (22) kann nach e aufgelöst werden,

$$e = [I + PC]^{-1}(r - d)\,. \tag{24}$$

Setzt man diese Gleichung in die Gleichung (23) ein, so folgt:

$$y = PCe + d \tag{25}$$
$$= PC[I + PC]^{-1}(r - d) + d \tag{26}$$
$$= PC[I + PC]^{-1}r - PC[I + PC]^{-1}d + [I + PC][I + PC]^{-1}d \tag{27}$$
$$= PC[I + PC]^{-1}r + [I + PC - PC][I + PC]^{-1}d \tag{28}$$
$$= PC[I + PC]^{-1}r + [I + PC]^{-1}d\,. \tag{29}$$

Damit erhält man für die gesuchten Übertragungsmatrizen der komplementären Sensitivität und der Sensitivität,

$$T_1(s) = P(s)C(s)[I + P(s)C(s)]^{-1} \tag{30}$$
$$S_1(s) = [I + P(s)C(s)]^{-1}\,. \tag{31}$$

Bemerkung: Die Matrix I bezeichnet jeweils die Identitätsmatrix mit der entsprechenden Dimension.

Bezogen auf den "loop breaking point" bei u lauten die Systemgleichungen

$$u = C(r - d) - CPu \tag{32}$$
$$y = Pu + d\,. \tag{33}$$

Für die Stellgrösse folgt somit,

$$u = [I + CP]^{-1}C(r - d)\,. \tag{34}$$

Eingesetzt in die Gleichung für y erhält man,

$$y = Pu + d \tag{35}$$
$$= P[I + CP]^{-1}C(r - d) + d \tag{36}$$
$$= P[I + CP]^{-1}Cr + [I - P[I + CP]^{-1}C]d\,. \tag{37}$$

Für den "loop breaking point" bei u resultiert somit die komplementären Sensitivität und die Sensitivität zu,

$$T_2(s) = P(s)[I + C(s)P(s)]^{-1}C(s) \tag{38}$$
$$S_2(s) = I - P(s)[I + C(s)P(s)]^{-1}C(s)\,. \tag{39}$$

[1] Der Übersichtlichkeit halber wird die Frequenzabhängigkeit bei der Notation unterschlagen, und die Signale werden mit Kleinbuchstaben angeschrieben.

b) Um die folgenden Matrixgleichungen zu vereinfachen werden sie jeweils von rechts oder von links mit geeigneten Matrizen multipliziert, oder es werden gemeinsame Faktoren ausgeklammert.

$$
\begin{aligned}
S_1 &= S_2 && (40)\\
[I+PC]^{-1} &= I - P[I+CP]^{-1}C && (41)\\
I &= I + PC - P[I+CP]^{-1}C[I+PC] && (42)\\
I &= I + PC - P[I+CP]^{-1}[C+CPC] && (43)\\
I &= I + PC - P[I+CP]^{-1}[I+CP]C && (44)\\
I &= I + PC - PC && (45)\\
I &= I && (46)\\
& && (47)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_1 &= T_2 && (48)\\
PC[I+PC]^{-1} &= P[I+CP]^{-1}C && (49)\\
PC &= P[I+CP]^{-1}C[I+PC] && (50)\\
PC &= P[I+CP]^{-1}[C+CPC] && (51)\\
PC &= P[I+CP]^{-1}[I+CP]C && (52)\\
PC &= PC && (53)\\
I &= I && (54)
\end{aligned}
$$

c) Durch Einsetzen erhält man,

$$
\begin{aligned}
S_1 + T_1 &= [I+PC]^{-1} + PC[I+PC]^{-1} && (55)\\
&= [I+PC][I+PC]^{-1} && (56)\\
&= I\,. && (57)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 (Singularwertverläufe)

a) Definieren der Systemmatrizen in MATLAB®:

```
A = [-3 1 2; 0 -2 1; -1 -8 0];
B = [1 0; -1 1; 0 1];
C = [1 0 4; 0 1 2; 0 0 -2];
D = zeros(3,2);
```

Der Befehl `sigma` verlangt ein LTI-System als Input, welches zuerst mit `ss` erzeugt werden muss:

```
sys = ss(A,B,C,D);  % Erzeugen eines Matlab LTI-Objektes.
sigma(sys);         % Zeichnen der Singularwertverl\"{a}ufe.
```

Das Ergebnis ist in Abbildung 1 gezeigt.

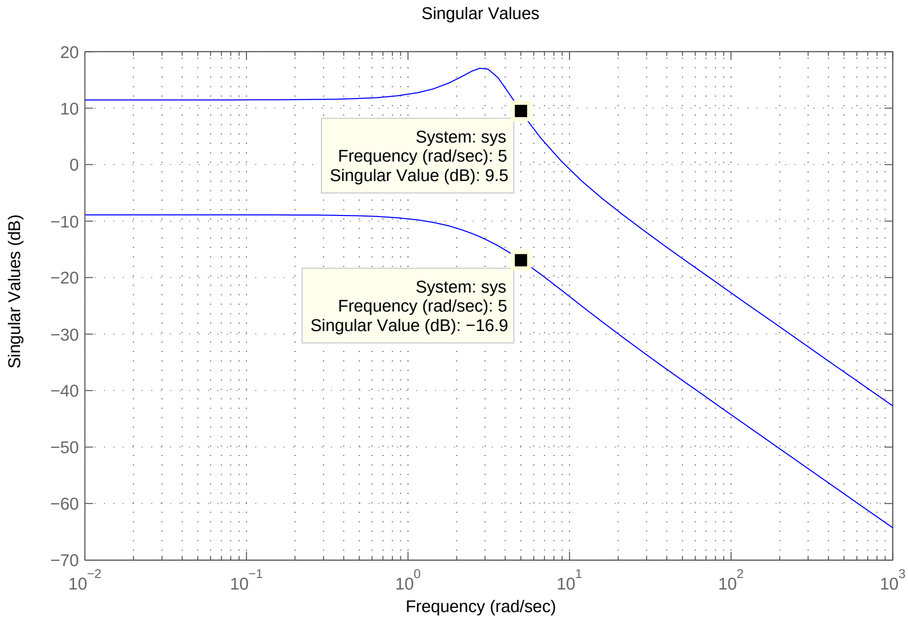


Abbildung 1: Singularwertverläufe des gegebenen Systems.

b) Um die Singularwerte zu berechnen, müssen wir zuerst die Übertragungsmatrix des Systems an der Stelle $\omega = 5$ rad/s berechnen:

$$G(\omega j) = C(\omega jI - A)^{-1}B + D$$

Folgendes Skript macht das in MATLAB®:

```
w = 5;                % Frequenz [rad/s]
G = C*inv(w*j*eye(3)-A)*B+D; % Berechnen der Übertragungsmatrix
                      % an der Stelle w = 5 rad/s.
Sig = svd(G);         % Berechnen der Singularwerte von G mit svd.
20*log10(Sig)         % Ausgeben der Singularwerte in Dezibel.
```

Das Ergebnis ist dann:

$$\sigma_{max} = 2.9689 = 9.452dB \qquad \sigma_{min} = 0.143 = -16.89dB$$

c) Die grösste Verstärkung des Eingangssignals erreicht man, wenn man in Richtung des grössten Singularwertes anregt. Da `svd` die Singularwerte der Grösse nach sortiert, ist es der erste Vektor der Transformationsmatrix V, also:

```
[U Sig V] = svd(G); % Es gilt G = U*Sig*V'
v = V(:,1)                  % Anregungsrichtung mit sigma_max
```

Die Lösung, die man bekommt lautet:

$$v = \begin{bmatrix} 0.39 \\ -0.8982 - 0.203j \end{bmatrix}$$

Alternativ kann man sich auch die Eigenvektoren der Hessematrix von $G(\omega j)$ berechnen lassen:

```
[V,lambda]= eig(G'*G);
```

Die gesuchte Anregungsrichtung ist der Eigenvektor, des grössten Eigenwertes, da dieser dem gössten Singularwert entspricht (es gilt $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$).

Die komplexen Einträge des Vektors entsprechen einer Phasenverschiebung der Eingangssignale u_1 und u_2. Die maximale Verstärkung wird nur erreicht, falls u_1 und u_2 einen Phasenunterschied entsprechend den Imaginärteilen des Vektors haben.

Anmerkung: Die Lösung des Richtungsvektors für die maximale Verstärkung ist nicht eindeutig, da es nur auf das Amplitudenverhältnis und den Phasenunterschied der Einträge ankommt.