

Aufgabe 1 (Thermisches Modell eines Brennstoffzellenstacks)

- a) Wendet man den 1. Hauptsatz der Thermodynamik auf den Brennstoffzellenstack an, so ergibt sich die folgende Bilanz:¹

$$\frac{d}{dt}U_{st}(t) = \dot{Q}_{reac}^*(t) - \dot{Q}_{conv}^*(t). \quad (1)$$

Die innere Energie des Brennstoffzellenstacks kann unter der Annahme einer konstanten spezifischen Wärmekapazität c_{st} geschrieben werden als

$$U_{st}(t) = m_{st} c_{st} \vartheta_{st}(t). \quad (2)$$

Die beiden Wärmeströme in Gleichung (1) sind in der Aufgabenstellung gegeben als

$$\dot{Q}_{reac}^*(I(t)) = \Delta U I(t) + R I^2(t) \quad (3)$$

$$\dot{Q}_{conv}^*(t) = k A (\vartheta_{st}(t) - \vartheta_{clt}(t)). \quad (4)$$

Setzt man die Beziehungen (2) bis (4) in die Bilanz (1) ein, so resultiert die folgende Differentialgleichung:

$$m_{st} c_{st} \frac{d}{dt} \vartheta_{st}(t) = \Delta U I(t) + R I^2(t) - k A (\vartheta_{st}(t) - \vartheta_{clt}(t)). \quad (5)$$

Für das Kühlmittel lautet der 1. Hauptsatz,

$$\frac{d}{dt}U_{clt}(t) = \dot{H}_{clt}^{*i}(t) - \dot{H}_{clt}^{*o}(t) + \dot{Q}_{conv}^*(t). \quad (6)$$

Analog zu (2) kann die innere Energie des Kühlmittels geschrieben werden als

$$U_{clt}(t) = m_{clt} c_{clt} \vartheta_{clt}(t). \quad (7)$$

Unter Vernachlässigung der kinetischen und der potentiellen Energie und unter der Annahme einer konstanten spezifischen Wärmekapazität c_{clt} ergibt sich für die Enthalpieströme des Kühlmittels,

$$\dot{H}_{clt}^{*i}(t) = \dot{m}_{clt}^*(t) c_{clt} \vartheta_{clt}^i(t), \quad (8)$$

beziehungsweise

$$\dot{H}_{clt}^{*o}(t) = \dot{m}_{clt}^*(t) c_{clt} \vartheta_{clt}^o(t) = \dot{m}_{clt}^*(t) c_{clt} \vartheta_{clt}(t). \quad (9)$$

In der letzten Gleichung wurde die Annahme des «perfect mixing»,

$$\vartheta_{clt}^o(t) = \vartheta_{clt}(t), \quad (10)$$

¹ Entsprechend der Aufgabenstellung wurde der Wärmestrom an die Umgebung vernachlässigt.

ausgewertet.

Werden die Beziehungen (4) und (7)–(9) in (6) eingesetzt, ergibt sich

$$m_{clt} c_{clt} \frac{d}{dt} \vartheta_{clt}(t) = \overset{*}{m}_{clt}(t) c_{clt} (\vartheta_{clt}^i(t) - \vartheta_{clt}^o(t)) + k A (\vartheta_{st}(t) - \vartheta_{clt}(t)). \quad (11)$$

Mit den Definitionen für die Zustandsgrößen, die Eingangsgrößen und die Störgröße,

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= \vartheta_{st}(t) & u_1(t) &:= \vartheta_{clt}^i(t) & d(t) &:= I(t), \\ x_2(t) &:= \vartheta_{clt}(t) & u_2(t) &:= \overset{*}{m}_{clt}(t) \end{aligned}$$

resultiert schliesslich das folgende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{kA}{m_{st}c_{st}} (x_1(t) - x_2(t)) + \frac{\Delta U}{m_{st}c_{st}} d(t) + \frac{R}{m_{st}c_{st}} d^2(t) =: f_1(x_1, x_2, d) \quad (12)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{m_{clt}} (u_1(t) - x_2(t)) u_2(t) + \frac{kA}{m_{clt}c_{clt}} (x_1(t) - x_2(t)) =: f_2(x_1, x_2, u_1, u_2). \quad (13)$$

- b) Aus dem vorgegebenen Betriebspunkt d_0 (elektrischer Strom), $x_{1,0}$ (Betriebstemperatur) und $u_{2,0}$ (Kühlmittelmassenstrom) können die Gleichgewichtswerte für die Kühlmitteltemperatur ($x_{2,0}$) und die Kühlmittelintrittstemperatur ($u_{1,0}$) bestimmt werden.

$$f_1(x_{1,0}, x_{2,0}, d_0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2,0} = x_{1,0} - \frac{1}{kA} (\Delta U d_0 + R d_0^2) \quad (14)$$

$$f_2(x_{1,0}, x_{2,0}, u_{1,0}, u_{2,0}) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1,0} = x_{2,0} - \frac{kA}{c_{clt}u_{2,0}} (x_{1,0} - x_{2,0}) \quad (15)$$

Ersetzt man $x_{2,0}$ im Ausdruck (15), so erhält man für $u_{1,0}$,

$$u_{1,0} = x_{1,0} - \left(\frac{1}{kA} + \frac{1}{c_{clt}u_{2,0}} \right) \cdot (\Delta U d_0 + R d_0^2). \quad (16)$$

- c) Linearisiert man das Differentialgleichungssystem (12)–(13) um den Gleichgewichtspunkt $\{x_{1,0}, x_{2,0}, u_{1,0}, u_{2,0}, d_0\}$, resultiert das folgende lineare System 2. Ordnung,

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) + B_d d(t), \quad (17)$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ d=d_0}} = \begin{bmatrix} -\frac{kA}{m_{st}c_{st}} & \frac{kA}{m_{st}c_{st}} \\ \frac{kA}{m_{clt}c_{clt}} & -\frac{u_{2,0}}{m_{clt}} - \frac{kA}{m_{clt}c_{clt}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ d=d_0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{u_{2,0}}{m_{clt}} & \frac{u_{1,0} - x_{2,0}}{m_{clt}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial d} \\ \frac{\partial f_2}{\partial d} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ d=d_0}} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta U}{m_{st}c_{st}} + \frac{2Rd_0}{m_{st}c_{st}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Bemerkung: $x(t)$, $u(t)$ und $d(t)$ bezeichnen im linearisierten System (17) die Abweichungen von den Betriebspunktwerten.

d) Mit den gegebenen numerischen Werten erhält man

$$x_{2,0} = 56^\circ\text{C} \quad (21)$$

$$u_{1,0} = 46^\circ\text{C} \quad (22)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{35} & -20 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{625} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

e) Für die Beurteilung der Stabilität des Systems werden die Eigenwerte von A , d.h. die Wurzeln des charakteristischen Polynoms berechnet,

$$\det(\lambda I - A) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad (24)$$

mit

$$a_2 = (-1)^2 = 1 \quad (25)$$

$$a_1 = (-1) \cdot \text{spur}(A) = -\left(-\frac{1}{50} - \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{50} \quad (26)$$

$$a_0 = \det(A) = \frac{1}{250} - \frac{1}{350} = \frac{1}{875}. \quad (27)$$

Auflösen der quadratischen Gleichung (24) ergibt die Eigenwerte zu

$$\lambda_{1,2} = \frac{11}{100} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{10^4}{121 \cdot 875}} \right) < 0. \quad (28)$$

Beide Eigenwerte liegen in der linken Halbebene. Das System ist damit *asymptotisch stabil*.

f) Das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix \mathcal{R} vollen Rang hat,

$$\text{Vollständig steuerbar} \Leftrightarrow \text{Rang}(\mathcal{R} = [B, A \cdot B, \dots, A^{n-1} \cdot B]) = n.$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich für die Steuerbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{R} = [B, A \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{875} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{35} & -20 & -\frac{2}{175} & 4 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Offensichtlich hat \mathcal{R} vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{R})=2$), womit das System *vollständig steuerbar* ist.

g) Mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Definition des Ausgangsvektors ($y_1(t) := \vartheta_{st}(t)$, $y_2(t) := \vartheta_{st}(t) - \vartheta_{clt}(t)$) lautet die Ausgangsgleichung des linearen Systems,

$$y(t) = C x(t) + D u(t), \quad (30)$$

mit

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Bemerkung: $y(t)$ bezeichnet in (30) den Vektor der Abweichungen von den Betriebspunktwerten, $y_{1,0} = x_{1,0}$ und $y_{2,0} = x_{1,0} - x_{2,0}$.

Das System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix \mathcal{O} vollen Rang hat,

$$\text{Vollständig beobachtbar} \Leftrightarrow \text{Rang}(\mathcal{O} = [C^T, A^T \cdot C^T, \dots, (A^T)^{n-1} \cdot C^T]^T) = n.$$

Im vorliegenden Fall lautet die Beobachtbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{O} = [C^T, A^T \cdot C^T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{50} & -\frac{57}{350} \\ 0 & -1 & \frac{1}{50} & \frac{11}{50} \end{bmatrix}^T. \quad (32)$$

Offensichtlich hat \mathcal{O} vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{O})=2$), womit das System *vollständig beobachtbar* ist.

Bemerkung: Dass dieses System vollständig beobachtbar ist, lässt sich auch an der Ausgangsmatrix C erkennen, die selbst schon Rang zwei hat, $\text{Rang}(C)=2$.

- h) Die Übertragungsmatrix eines MIMO-Systems wird analog zur Übertragungsfunktion eines SISO-Systems berechnet,

$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D. \quad (33)$$

Für das Modell des Brennstoffzellenstacks ergibt sich

$$P(s) = C \cdot \left(\frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{1}{5} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{7} & s + \frac{1}{50} \end{bmatrix} \right) \cdot B + D \quad (34)$$

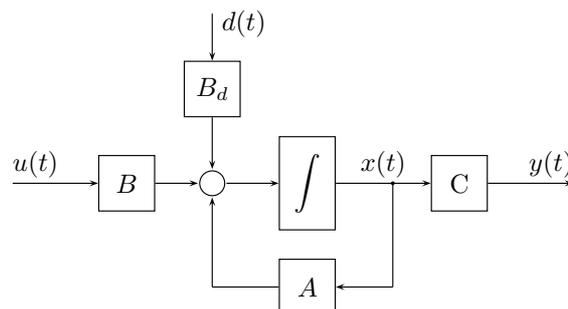
$$= \frac{1}{s^2 + \frac{11}{50}s + \frac{1}{875}} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} s + \frac{1}{5} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{7} & s + \frac{1}{50} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{2}{35} & -20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$= \frac{1}{s^2 + \frac{11}{50}s + \frac{1}{875}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{875} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{35} \left(s + \frac{1}{50}\right) & -20 \left(s + \frac{1}{50}\right) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\frac{1}{875}}{s^2 + \frac{11}{50}s + \frac{1}{875}} & \frac{-\frac{2}{5}}{s^2 + \frac{11}{50}s + \frac{1}{875}} \\ \frac{-\frac{2}{35}s}{s^2 + \frac{11}{50}s + \frac{1}{875}} & \frac{20s}{s^2 + \frac{11}{50}s + \frac{1}{875}} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Bemerkung: Die Übertragungsmatrix $P(s)$ beschreibt das Übertragungsverhalten vom Eingang $u(t)$ auf den Ausgang $y(t)$. Das Übertragungsverhalten von der Störgröße $d(t)$ auf den Ausgang $y(t)$ lautet,

$$P_{yd}(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B_d. \quad (38)$$




```

%-----
% Systemanalyse
%-----
% e) Stabilitaet
eig(A)

% f) Steuerbarkeit
R = ctrb(A,B);
rank(R)

% g) Beobachtbarkeit
O = obsv(A,C);
rank(O)

% h) Uebertragungsverhalten
P = minreal(tf(ss(A,B,C,D)));
%=====

```

Bemerkung: Mit dem Befehl `minreal` können numerische Fehler bei der Berechnung der Übertragungsmatrix eliminiert werden.

Aufgabe 2 (Hurwitz Kriterium)

Im Skript² sind die Systemgleichungen (Seiten 102 und 103) beschrieben und das Regelsystem ohne D-Teil Erweiterung abgebildet Fig. 7.6.

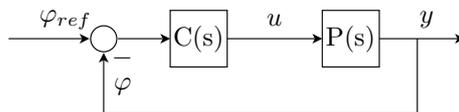
Die Zustandsgrößen, die Eingangs- und Ausgangsgröße der Strecke sind

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &:= I(t) & u(t) &:= U(t) & y(t) &:= \varphi(t) \\
 x_2(t) &:= \omega(t) \\
 x_3(t) &:= \varphi(t)
 \end{aligned}$$

Die Systemmatrizen der Strecke lauten

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{\kappa}{L} & 0 \\ \frac{\kappa}{\Theta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [0 \quad 0 \quad 1], \quad d = [0]. \quad (40)$$

Die folgende Abbildung illustriert den geschlossenen Regelkreis



Die Übertragungsfunktion der Strecke $P(s)$ wird mithilfe der Cramer'schen Regel gebildet.

$$P(s) = c \cdot (sI - A)^{-1} \cdot b + d \quad (41)$$

$$= \frac{\kappa}{\Theta \cdot L \cdot s^3 + \Theta \cdot R \cdot s^2 + \kappa^2 \cdot s} \quad (42)$$

² *Analysis and Synthesis of Single-Input-Single-Output Control Systems*, L. Guzzella, 2007, vdf Hochschulverlag

Der PD-Regler ist

$$C(s) = k_p + k_d \cdot s \quad (43)$$

Die komplementäre Empfindlichkeit $T(s)$ ist die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.

$$T(s) = \frac{P(s) \cdot C(s)}{1 + P(s) \cdot C(s)} = \frac{\frac{\kappa \cdot (k_p + k_d \cdot s)}{\Theta \cdot L \cdot s^3 + \Theta \cdot R \cdot s^2 + \kappa^2 \cdot s}}{1 + \frac{\kappa \cdot (k_p + k_d \cdot s)}{\Theta \cdot L \cdot s^3 + \Theta \cdot R \cdot s^2 + \kappa^2 \cdot s}} \quad (44)$$

$$= \frac{\kappa \cdot (k_p + k_d \cdot s)}{\Theta \cdot L \cdot s^3 + \Theta \cdot R \cdot s^2 + \kappa^2 \cdot s + \kappa \cdot (k_p + k_d \cdot s)} \quad (45)$$

$$= \frac{\kappa \cdot k_p + \kappa \cdot k_d \cdot s}{\Theta \cdot L \cdot s^3 + \Theta \cdot R \cdot s^2 + (\kappa^2 + \kappa \cdot k_d) \cdot s + \kappa \cdot k_p} \quad (46)$$

Mit Hilfe des Hurwitz Kriteriums kann sowohl die obere als auch die untere Grenze für k_p bestimmt werden.

$$H1 = [\Theta \cdot R] \quad \Rightarrow \quad d_1 = \Theta \cdot R > 0$$

$$H2 = \begin{bmatrix} \Theta \cdot R & \Theta \cdot L \\ \kappa \cdot k_p & \kappa^2 + \kappa \cdot k_d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_2 = \Theta \cdot R \cdot (\kappa^2 + \kappa \cdot k_d) - \kappa \cdot k_p \cdot \Theta \cdot L > 0$$

$$H3 = \begin{bmatrix} \Theta \cdot R & \Theta \cdot L & 0 \\ \kappa \cdot k_p & \kappa^2 + \kappa \cdot k_d & \Theta \cdot R \\ 0 & 0 & \kappa \cdot k_p \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad d_3 = \kappa \cdot k_p \cdot d_2 > 0$$

Die Systemparameter sind alle positiv, daraus folgt, dass mit der Bedingung $d_3 > 0$ die untere Grenze für $k_p > 0$ sein muss. Mittels $d_2 > 0$ bekommt man eine Bedingung für die obere Grenze von k_p .

$$\Theta \cdot R \cdot (\kappa^2 + \kappa \cdot k_d) > \kappa \cdot k_p \cdot \Theta \cdot L \quad (47)$$

$$R \cdot (\kappa + k_d) > k_p \cdot L \quad (48)$$

$$\frac{R}{L} \cdot (\kappa + k_d) > k_p \quad (49)$$

woraus folgt, dass

$$0 < k_p < \frac{R}{L} \cdot (\kappa + k_d) \quad (50)$$

Aus der Ungleichung 50 ist ersichtlich, dass die Verstärkung k_p erhöht werden kann, wenn gleichzeitig der Parameter k_d vergrößert wird.

Bemerkung: Für k_d gelten folgende Einschränkungen. Wird für k_d in der Ungleichung 49 ($k_p \cdot T_d$) eingesetzt, muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

$$k_p < \frac{R}{L} \cdot (\kappa + k_p \cdot T_d) \quad (51)$$

$$k_p \cdot (L - R \cdot T_d) < R \cdot \kappa \quad (52)$$

wenn $L - R \cdot T_d > 0$: $k_p < \frac{R \cdot \kappa}{L - R \cdot T_d}$
Mit $T_d < \frac{L}{R}$ erhalten wir eine obere Begrenzung von k_p .

wenn $L - R \cdot T_d < 0$: $k_p > \frac{R \cdot \kappa}{L - R \cdot T_d}$
 $T_d > \frac{L}{R}$ gibt keine weitere Bedingung an k_p .
Mittels d_3 wurde hergeleitet, dass $k_p > 0$ sein muss.

wenn $L - R \cdot T_d = 0$: Ergibt keine weitere Bedingung an k_p .