

Musterlösung

Dauer der Prüfung:

120 Minuten

Anzahl der Aufgaben:

9 (unterschiedlich gewichtet, total 75 Punkte)

Bewertung:

Für eine Note 6 müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden.
Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Punktezahl angegeben.

Viele Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar. (Entsprechende Informationen sind einleitend zu den Aufgabenstellungen vermerkt.)

Falsche Antworten bei den Multiple-Choice Aufgaben geben Punkteabzug. (Detaillierte Angaben sind bei den entsprechenden Aufgaben zu finden.)

Erlaubte Hilfsmittel:

20 A4-Blätter (40 Seiten)

Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben, und es sind **keine elektronischen Hilfsmittel** erlaubt.

Zur Beachtung:

Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern.

Zusatzblätter sind bei den Assistenten erhältlich.

Aufgabe 1 (Systemanalyse)

10 Punkte

Bem: Bei dieser Aufgabe sind sämtliche Teilaufgaben unabhängig voneinander lösbar.

Gegeben sei das folgende lineare MIMO-System dritter Ordnung:

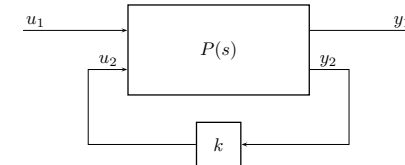
$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Ist das System vollständig steuerbar (completely reachable)? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch.
- Ist das System vollständig beobachtbar (completely observable)? Begründen Sie Ihre Aussage mathematisch.
- Beurteilen Sie die Lyapunov-Stabilität des Systems.
- Berechnen Sie die Übertragungsmatrix $P(s)$ des gegebenen Systems vom Eingang $u(t)$ zum Ausgang $y(t)$.
- Das System wird mit einer Signalrückführung gemäss dem folgenden Schema erweitert:



Wie muss die Konstante k gewählt werden, damit ein asymptotisch stabiles Gesamtsystem resultiert?

- Mit MATLAB® sollen die Stabilität, die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit des Systems beurteilt und die Übertragungsmatrix berechnet werden. Vervollständigen Sie den nebenstehenden Code zu einem funktionierenden m-File.

```
%-----
A = [-2 3 0; 5 0 0; 0 0 -7];
B = [0 1; 0 0; 1 0];
C = [1 0 -1; 0 3 0];
D = zeros(2,2);

eig(.....)

R = ctrb(.....)
rank(R)

O = .....
rank(O)

P = .....
%-----
```

Lösung 1

- a) Ein System (A, B) ist genau dann *vollständig steuerbar* (completely reachable), wenn die Matrix $\mathcal{R}_n$ vollen Rang n hat,

$$\text{Vollständig steuerbar} \Leftrightarrow \text{Rang}(\mathcal{R}_n = [B, A \cdot B, \dots, A^{n-1} \cdot B]) = n.$$

Für das gegebene System ergibt sich:

$$\mathcal{R}_3 = [B, A \cdot B, A^2 \cdot B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -7 & 0 & 49 & 0 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich¹ hat $\mathcal{R}_3$ vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{R}_3) = 3$), womit das gegebene System *vollständig steuerbar* ist.

- b) Ein System (A, C) ist genau dann *vollständig beobachtbar* (completely observable), wenn die Matrix $\mathcal{O}_n$ vollen Rang n hat,

$$\text{Vollständig beobachtbar} \Leftrightarrow \text{Rang}(\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}) = n.$$

Die Matrix $\mathcal{O}_n$ berechnet sich für das gegebene System zu:

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ C \cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \\ 15 & 0 & 0 \\ 19 & -6 & -49 \\ -30 & 45 & 0 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich² hat $\mathcal{O}_3$ vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{O}_3) = 3$), womit das gegebene System *vollständig beobachtbar* ist.

- c) Für die Beurteilung der Stabilität des Systems werden die Eigenwerte von A , d.h. die Wurzeln des charakteristischen Polynoms berechnet.

$$\det(sI - A) = \det \begin{pmatrix} s+2 & -3 & 0 \\ -5 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+7 \end{pmatrix} = (s^2 + 2s - 15)(s+7) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+15} = 3, -5, \lambda_3 = -7$$

Da ein Eigenwert positiven Realteil hat, ist das System *instabil*.

¹Bereits die ersten drei Kolonnenvektoren von $\mathcal{R}_3$ sind linear unabhängig. (Auf die Berechnung von $A^2 \cdot B$ kann demnach verzichtet werden.)

²Bereits die ersten drei Zeilenvektoren von $\mathcal{O}_3$ sind linear unabhängig. (Auf die Berechnung von $C \cdot A^2$ kann demnach verzichtet werden.)

- d) Die Übertragungsmatrix $P(s)$ eines MIMO-Systems wird analog zur Übertragungsfunktion eines SISO-Systems berechnet,

$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D.$$

Für das gegebene System gilt,

$$\begin{aligned} P(s) &= C \cdot \begin{bmatrix} s+2 & -3 & 0 \\ -5 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot B + D \\ &= C \cdot \left(\frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} s(s+7) & 5(s+7) & 0 \\ 3(s+7) & (s+2)(s+7) & 0 \\ 0 & 0 & s^2 + 2s - 15 \end{bmatrix}^T \right) \cdot B + D \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} s(s+7) & 3(s+7) & 0 \\ 5(s+7) & (s+2)(s+7) & 0 \\ 0 & 0 & s^2 + 2s - 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{1}{(s^2 + 2s - 15)(s+7)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & s(s+7) \\ 0 & 5(s+7) \\ s^2 + 2s - 15 & 0 \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{1}{(s^2 + 2s - 15)(s+7)} \cdot \begin{bmatrix} -(s^2 + 2s - 15) & s(s+7) \\ 0 & 15(s+7) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{s+7} & \frac{s}{s^2 + 2s - 15} \\ 0 & \frac{15}{s^2 + 2s - 15} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- e) Das Zustandsraummodell des gegebenen Systems kann in detaillierter Schreibweise wie folgt angegeben werden:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + u_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 5x_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -7x_3(t) + u_1(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) - x_3(t)$$

$$y_2(t) = 3x_2(t).$$

Wird das Ausgangssignal $y_2(t)$ wie in der Aufgabenstellung vorgeschlagen zum Eingang $u_2(t)$ zurückgeführt,

$$u_2(t) = k \cdot y_2(t)$$

so resultiert die folgende Systemdynamik:

$$\dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + 3x_2(t) + 3kx_2(t) = -2x_1(t) + 3(1+k)x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = 5x_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = -7x_3(t) + u_1(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) - x_3(t).$$

Die Dynamikmatrix $\tilde{A}$ dieses modifizierten Systems lautet:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3(1+k) & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $\tilde{A}$ berechnen sich zu:

$$\det(sI - \tilde{A}) = \det \begin{bmatrix} s+2 & -3(1+k) & 0 \\ -5 & s & 0 \\ 0 & 0 & s+7 \end{bmatrix} = (s^2 + 2s - 15(1+k))(s+7) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 15(1+k)}, \lambda_3 = -7.$$

Das modifizierte System ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von $\tilde{A}$ negativen Realteil haben. Für die Konstante k ergibt sich daher die folgende Bedingung:

$$\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) = \operatorname{Re}(-1 \pm \sqrt{1 + 15(1+k)}) \stackrel{!}{<} 0$$

$$\Rightarrow 1 + 15(1+k) \stackrel{!}{<} 1$$

$$\Rightarrow k \stackrel{!}{<} -1.$$

f) Das vollständige m-File enthält den folgenden Code:

```
%-----
A = [-2 3 0; 5 0 0; 0 0 -7];
B = [0 1; 0 0; 1 0];
C = [1 0 -1; 0 3 0];
D = zeros(2,2);

eig(A)

R = ctrb(A,B)
rank(R)

O = obsv(A,C)
rank(O)

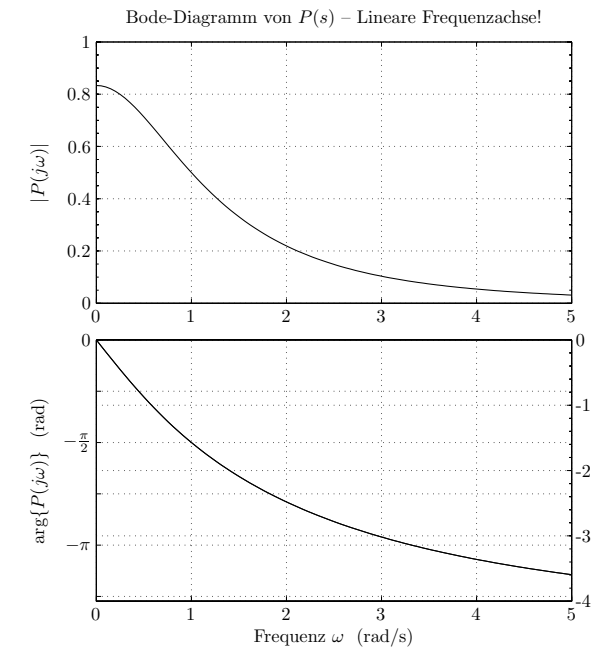
P = tf(ss(A,B,C,D))
%-----
```

Aufgabe 2 (Auslegung PID-Regler und MATLAB/Simulink)

10 Punkte

Bem: Bei dieser Aufgabe sind die Teilaufgaben **a)** und **b)** unabhängig voneinander lösbar.

Für eine Strecke (plant), die durch das Bode-Diagramm³ ihrer Übertragungsfunktion $P(s)$ gegeben ist,



soll ein PID-Regler (PID controller),

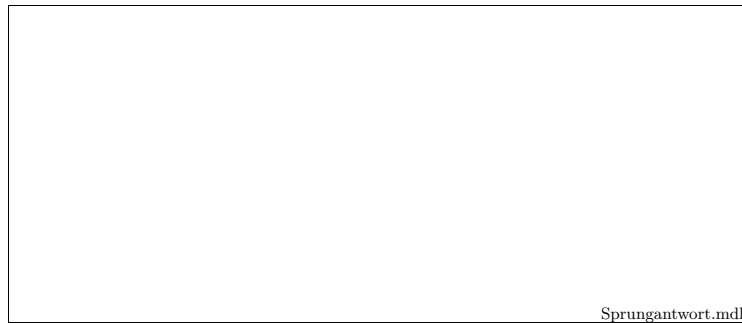
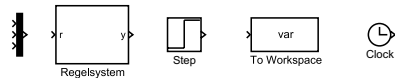
$$C(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

ausgelegt werden. Das resultierende Regelsystem (closed-loop system) soll die folgenden Spezifikationen erfüllen:

- Die Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung (crossover frequency) soll bei $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ liegen
- Die Phasenreserve (phase margin) soll $\varphi = 90^\circ$ betragen
- Die Kreisverstärkung (loop gain) soll im Nyquist-Diagramm den Einheitskreis parallel zur Imaginären Achse betreten
- Es soll kein stationärer Regelfehler auftreten.

³Beachten Sie, dass die Frequenzachse *linear* skaliert ist.

- a) Bestimmen Sie die Reglerparameter k_p , T_i , und T_d .
- b) Die Sprungantwort des Regelsystems wird mit MATLAB®/Simulink® berechnet und dargestellt. Das Programm ist so aufgebaut, dass der Simulationsvorgang von einem m-File aus gesteuert wird.
- i) Zeichnen Sie das benötigte Simulinkmodell in das untenstehende Feld. Verwenden Sie dazu ausschliesslich die unten angezeigten Blöcke, wobei jeder Block nur einmal verwendet werden darf. Der Name des Modells lautet "Sprungantwort.mdl".
Bemerkung: Der "To Workspace" Block speichert die Signale in einem Spaltenarray mit dem Namen "var".



- ii) Vervollständigen Sie das folgende m-File, so dass:
- Das Simulinkmodell für 15 s simuliert wird
 - Die Ausgangsgrösse y und das Referenzsignal r in einem Plot dargestellt werden
 - Die x-Achse des Plots mit "Zeit [s]" beschriftet wird
 - Eine Legende für die beiden Signale eingeführt wird.

Verwenden Sie exakte MATLAB®-Syntax.

```
%-----
sim(.....)    % Simulation

r = .....

y = .....

t = .....

.....        % Plot

.....        % Beschriftung x-Achse

.....        % Legende
%-----
```

Lösung 2

- a) Die Parameter des PID-Reglers werden gemäss den Formeln für die *analytischen Crossover-Spezifikationen* bestimmt. Aus den in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften des Regelsystems ergeben sich die folgenden Werte für die Spezifikationsparameter (vergleiche auch Abbildung 1):

$$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$$

Bemerkung: Die Forderung nach einem verschwindenden stationären Nachlauffehler ist automatisch erfüllt, da ein PID-Regler integrierendes Verhalten aufweist.

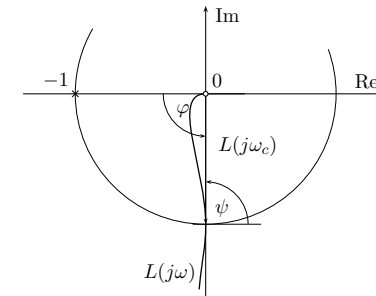


Abbildung 1: Skizze der Spezifikationen im Nyquist-Diagramm

Die für die Berechnung benötigten charakteristischen Grössen der Strecke lassen sich graphisch aus dem gegebenen Bode-Diagramm für $P(s)$ bestimmen (vergleiche Abbildung 2):

$$r_P = |P(j\omega_c)| \approx \frac{1}{2}$$

$$r'_P = \left. \frac{\partial |P(j\omega)|}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} \approx -\frac{0.4}{1} = -\frac{2}{5} \text{ s/rad}$$

$$\varphi_P = \arg \{P(j\omega_c)\} \approx -\frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$\varphi'_P = \left. \frac{\partial \arg \{P(j\omega)\}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_c} \approx -\frac{1.2}{1} = -\frac{6}{5} \text{ s.}$$

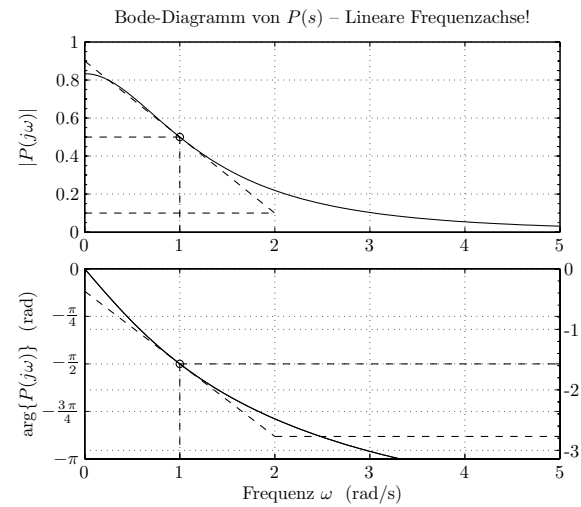


Abbildung 2: Bestimmen der charakteristischen Größen der Strecke aus dem Bode-Diagramm

Mit den Formeln für die analytischen Crossover-Spezifikationen können nun die drei Parameter des Reglers, k_p , T_i und T_d , berechnet werden.

$$k_p = -\frac{1}{r_P} \cos(\varphi - \varphi_P) \approx -2 \cos(\pi) = 2$$

$$T_d = \frac{1}{2} \left[\tan(\psi - \varphi_P) \left(\frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(\varphi - \varphi_P) \right) + \tan(\varphi - \varphi_P) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right]$$

$$\approx \frac{1}{2} \left[\tan(\pi) \left(-\frac{4}{5} + \frac{6}{5} \tan(\pi) \right) + \tan(\pi) \frac{9}{5} + \frac{6}{5} \right] = \frac{3}{5} = 0.6 \text{ s}$$

$$T_i = [T_d \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_P) \omega_c]^{-1} \approx \left[\frac{3}{5} - \tan(\pi) \right]^{-1} = \frac{5}{3} \approx 1.67 \text{ s}$$

- b) i) Für die Simulation wird folgendes System aufgebaut:

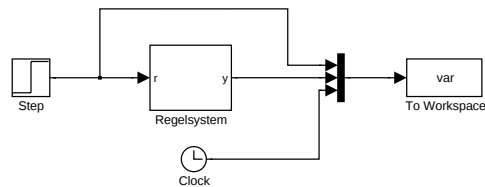


Abbildung 3: Simulinkmodell "Sprungantwort.mdl"

- ii) Wenn man den folgenden Code in MATLAB[®] ausführt,

```
%-----
sim('Sprungantwort',15)
r = var(:,1);
y = var(:,2);
t = var(:,3);
plot(t,r,t,y)
xlabel('Zeit [s]')
legend('r','y')
%-----
```

erhält man den gewünschten Plot:

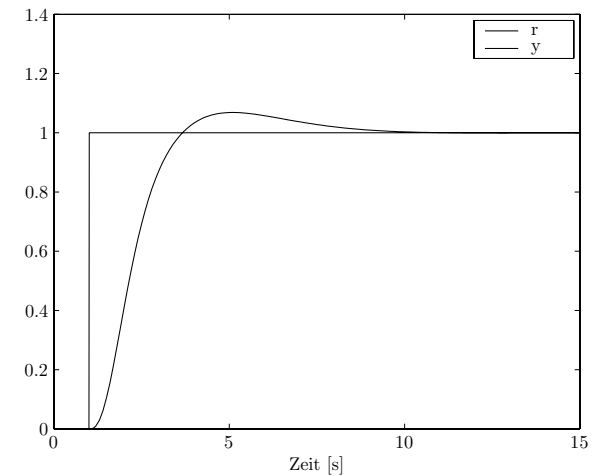


Abbildung 4: Sprungantwort des Regelsystems

Aufgabe 3 (Smith Prädiktor)**8 Punkte**

Für die Regelstrecke (plant) mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{2}{s+3} \cdot e^{-s}$$

wurde ein Smith Prädiktor entworfen. Das Folgeverhalten des Regelsystems (Übertragungsverhalten vom Referenzsignal zur Ausgangsgrösse) wurde dabei mit einer der folgenden Übertragungsfunktionen spezifiziert:

$$T_{r1}(s) = \frac{6}{s+6} \cdot e^{-s}, \quad T_{r2}(s) = \frac{4}{s+6} \cdot e^{-s}, \quad T_{r3}(s) = \frac{3}{s+3} \cdot e^{-2s}, \quad T_{r4}(s) = \frac{2}{s-3} \cdot e^{-s}.$$

- Bestimmen Sie die einzig sinnvolle Spezifikation aus der obigen Liste und geben Sie für jede andere jeweils einen Grund an, warum Sie sie nicht wählen würden.
- Zeichnen Sie das Signalflussbild des Regelsystems. Das Signalflussbild soll die Wirkungsweise des Smith Prädiktors veranschaulichen. (Bemerkung: Für die Skizze des Signalflussbildes müssen Sie den internen Regler $C_r(s)$ nicht explizit berechnen.)
Führen Sie im Signalflussbild zusätzlich eine Störung d ein, welche direkt auf die Ausgangsgrösse wirkt.
- Berechnen Sie die Übertragungsfunktion von der Störung d zum Ausgang y . Hat der Regler einen offenen Integrator (Pol im Ursprung)? Begründung?
- Nehmen Sie nun an, dass sich die Totzeit der Regelstrecke $P(s)$ aus irgend einem Grund verdoppelt hat. Wie muss der Regler verändert werden, damit das Regelsystem wieder die gleiche Bandbreite wie vorher aufweist?

Lösung 3

- $T_{r1}(s)$ ist die einzig sinnvolle Spezifikation. Der statische Übertragungsfaktor von $T_{r2}(s)$ ist nicht 1 und somit ist $T_{r2}(s)$ für eine Folgeregelung unbrauchbar. $T_{r3}(s)$ hat eine Totzeit von 2s; die Totzeit der Strecke ist jedoch nur 1s. $T_{r4}(s)$ hat einen positiven Pol und ist damit instabil.
- Das Signalflussbild des Regelsystems ist in Abbildung 5 dargestellt, mit: $\tilde{P}(s) = \frac{2}{s+3}$.

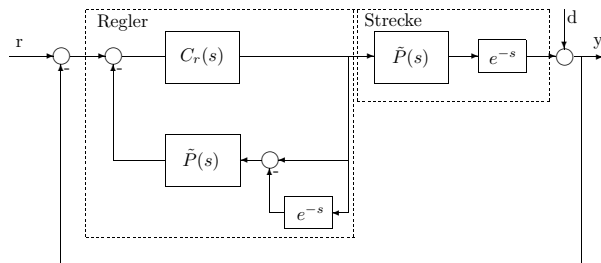


Abbildung 5: Signalflussbild des Regelsystems mit Störung am Ausgang

- Die Übertragungsfunktion von d nach r ist die sogenannte Sensitivität $S(s)$. Dank dem fundamentalen Zusammenhang $S(s) + T(s) \equiv 1$, lässt sich die Sensitivität sehr einfach berechnen:

$$S(s) = 1 - T_{r1}(s) = 1 - \frac{6}{s+6} \cdot e^{-s} = \frac{s+6 \cdot (1 - e^{-s})}{s+6}$$

Ein Regelsystem dessen Strecke oder Regler einen offenen Integrator aufweist, hat die Eigenschaft, dass die Sensitivität statisch zu 0 wird, d.h. $S(0) = 0$. Im vorliegenden Fall gilt:

$$S(0) = \frac{0+6 \cdot (1 - e^{-0})}{0+6} = 0.$$

Da die Strecke nicht integrierend ist, hat der Regler einen offenen Integrator.

- Bei einer Verdopplung in der Totzeit muss nur die modellierte Totzeit im Regler verdoppelt werden. Die resultierende Übertragungsfunktion des Regelsystems verändert sich somit nur in der Totzeit, d.h. es findet nur eine Veränderung in der Phase statt. Die Bandbreite des Systems bleibt erhalten.

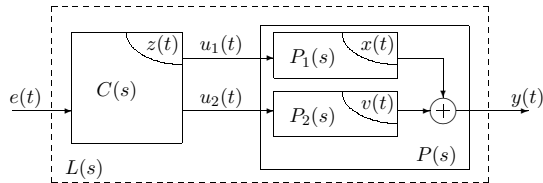
Aufgabe 4 (MIMO-Systeme und Singularwerte)**10 Punkte****Bem:** Bei dieser Aufgabe sind sämtliche Teilaufgaben unabhängig voneinander lösbar.**a)** Gegeben sei die Serieschaltung eines MIMO-Reglers $C(s)$ mit der Zustandsraumdarstellung

$$\frac{d}{dt}z(t) = F \cdot z(t) + G \cdot e(t)$$

$$u_1(t) = H_1 \cdot z(t)$$

$$u_2(t) = H_2 \cdot z(t)$$

und einer Regelstrecke $P(s)$. Die Regelstrecke besteht aus zwei ausgangsseitig gekoppelten Teilstrecken $P_1(s)$ und $P_2(s)$ (siehe Zeichnung) mit den Zustandsraummatrizen A_1, B_1, C_1 und D_1 bzw. A_2, B_2, C_2 und D_2 und den Zustandsvektoren $x(t)$ bzw. $v(t)$.



i) Bestimmen Sie die Matrizen A , B und C der folgenden Zustandsraumdarstellung der Kreisverstärkung $L(s)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + B \cdot e(t)$$

$$y(t) = C \cdot \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}.$$

ii) Von der Strecke und vom Regler seien die folgenden Matrizen bekannt:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Weiterhin sei bekannt:

- Der Eingangsvektor $e(t)$ hat die Dimension 2
- Die Kreisverstärkung $L(s)$ ist open-loop stabil
- $P_2(s)$ ist vollständig steuerbar.

Ordnen Sie mit diesen Informationen den Systemmatrizen

$$A_1, \quad B_2, \quad F, \quad G, \quad D_1, \quad C_1, \quad H_1$$

die passenden Matrizen

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad M_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M_7 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zu; also z.B.: $M_x \rightarrow A_1$. (Tipp: Beachten Sie die Dimensionen der Signale und der Zustandsvektoren.)

b) Gegeben sei die Matrix M ,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- i) Berechnen Sie die Singularwerte $\sigma_{\max}\{M\}$ und $\sigma_{\min}\{M\}$.
- ii) Nehmen Sie an, die Matrix M sei bereits im Workspace von MATLAB[®] definiert. Schreiben Sie den MATLAB[®]-Code für die Berechnung der Singularwerte von M .

Lösung 4**a)** i) Für die Regelstrecke $P(s)$ erhält man

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_1 \cdot x(t) + B_1 \cdot u_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}v(t) = A_2 \cdot v(t) + B_2 \cdot u_2(t)$$

$$y(t) = C_1 x(t) + C_2 v(t) + D_1 u_1(t) + D_2 u_2(t)$$

Man ersetzt jeweils $u_1(t) = H_1 z(t)$ sowie $u_2(t) = H_2 z(t)$ und erhält zusammen mit der Zustandsraumdarstellung des Reglers das Gesamtsystem.

$$\begin{pmatrix} \dot{z}(t) \\ \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} F & 0 & 0 \\ B_1 H_1 & A_1 & 0 \\ B_2 H_2 & 0 & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} G \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot e(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} D_1 H_1 + D_2 H_2 & C_1 & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z(t) \\ x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

- ii) Anhand von B_1 sieht man, dass $P_1(s)$ 1 Eingang und 2 Zustände hat. Anhand von C_2 sieht man, dass $P_2(s)$ 2 Zustände und 2 Ausgänge hat. Demnach hat $P_1(s)$ wegen der Addition ebenfalls 2 Ausgänge. Anhand von H_2 sieht man, dass $P_2(s)$ 1 Eingang hat und dass der Regler $C(s)$ 3 Zustände hat.

Somit ergeben sich folgende Zuordnungen:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\text{open-loop stabil!}), \quad C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bemerkung: Mit $B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ wäre $P_2(s)$ nicht steuerbar.

- b) i) Die Singularwerte sind definiert als die positiven Quadratwurzeln der Eigenwerte der Matrix $M^T M$:

$$\sigma_i\{M\} = \sqrt{\lambda_i\{M^T M\}}$$

$$M^T M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte berechnen sich aus der Determinante,

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - M^T M) &= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (\lambda - 2) \cdot [(\lambda - 2)^2 - 1] - (-1) \cdot (2 - \lambda + 1) + 1 \cdot (1 - \lambda + 2) \\ &= (\lambda - 2) \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 3) - 2\lambda + 6 \\ &= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 2\lambda^2 + 8\lambda - 6 - 2\lambda + 6 \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda \\ &= \lambda \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 9) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9}}{2} = 3.$$

Das heisst, $\sigma_{\min}\{M\} = \sqrt{\lambda_1} = 0$ und $\sigma_{\max}\{M\} = \sqrt{\lambda_{2,3}} = \sqrt{3}$.

- ii) Singularwerte mit MATLAB®: `Sigma = sqrt(eig(M'*M));`

Aufgabe 5 (Beobachter)

6 Punkte

Bem: Bei dieser Aufgabe sind die Teilaufgaben **a)** und **b)** unabhängig voneinander lösbar.

Für eine Strecke (plant) mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3}$$

soll ein Zustandsbeobachter (observer) der Form

$$\dot{\hat{x}}(t) = A \hat{x}(t) + B u(t) + L [y(t) - C \hat{x}(t)]$$

für eine nachfolgende Reglersynthese ausgelegt werden.

- a) Berechnen Sie die Verstärkungsmatrix $L = [l_1 \ l_2]^T$, so dass die Pole des resultierenden Beobachters drei mal schneller sind als die Pole der Strecke. (Tipp: beobachtbare Standardform.)

- b) Schreiben Sie einen MATLAB®-Code, der

- Die Strecke $P(s)$ als Übertragungsfunktion (transfer function) definiert
- Die Pole der Strecke berechnet
- Das Bode-Diagramm der Strecke im Frequenzintervall

$$10^{-2} \leq \omega \leq 10^3 \text{ [rad/s]}$$

darstellt.

Lösung 5

- a) Zustandsraumdarstellung der Strecke in der beobachtbare Standardform:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

Die Pole von $P(s)$ liegen bei $s^2 + 4s + 3 \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow s_1 = -1, s_2 = -3$. Gemäss der Forderung müssen deswegen die Pole des Beobachters bei $s_1 = -3$, und $s_2 = -9$ liegen.

Die Pole des Beobachters entsprechen den Polen von $[A - LC]$, d.h.:

$$\begin{aligned} \det(sI - [A - LC]) &= \det\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ 3 + l_2 & s + 4 \end{bmatrix}\right) \\ &= (s + l_1)(s + 4) + 3 + l_2 \\ &= s^2 + (4 + l_1)s + 3 + 4l_1 + l_2. \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich der zwei charakteristischen Polynome

$$s^2 + (4 + l_1)s + 3 + 4l_1 + l_2 \stackrel{!}{=} (s + 3)(s + 9) = s^2 + 12s + 27$$

folgt:

$$\begin{aligned} 4 + l_1 &\stackrel{!}{=} 12 \rightarrow l_1 = 8 \\ 3 + 4l_1 + l_2 &\stackrel{!}{=} 27 \rightarrow l_2 = -8. \end{aligned}$$

Die Beobacherverstärkungsmatrix ist somit $L = \begin{bmatrix} 8 & -8 \end{bmatrix}^T$.

- b) i) `G = tf(2,[1 4 3]);`
 oder
`s = tf('s');`
`G = 2/(s^2+4*s+3);`
- ii) `Pole = pole(G);`
- iii) `bode(G,{1e-2,1e3})`
 oder
`w = logspace(-2,3);`
`bode(G,w)`

Aufgabe 6 (LQR-Problem)

9 Punkte

Bem: Bei dieser Aufgabe können die Teilaufgaben **b)** und **c)** unabhängig von **a)** gelöst werden.

Für die folgende Regelstrecke 2. Ordnung,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

soll ein LQ-Regulator entworfen werden. Das Gütekriterium wird dabei wie folgt definiert:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt = \int_0^\infty [(k_1 x_1 + k_2 x_2)^2 + \rho u^2] dt.$$

- a) Bestimmen Sie die Matrix $Q = Q^T$ als Funktion von k_1 und k_2 .
- b) Nun sei $k_1 = 1$ und $k_2 = 0$, sowie $\rho = 0.25$. Bestimmen Sie die Lösung Φ der Matrix-Riccati Gleichung, sowie den resultierenden Regulator K .
- c) Bestimmen Sie die Pole des resultierenden Regelsystems.

Lösung 6

- a) Die symmetrische Zustandsgewichtungsmatrix $Q = Q^T = \tilde{C}^T \tilde{C}$ erhält man, wenn die Ausgangsmatrix $\tilde{C} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$ quadriert wird. Somit gilt:

$$Q = \begin{bmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \\ k_1 k_2 & k_2^2 \end{bmatrix}.$$

Man kann Q auch mit einem Koeffizientenvergleich ermitteln:

$$\begin{aligned} x^T Q x &= (x_1 \ x_2) \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= x_1^2 q_1 + x_1 x_2 q_3 + x_1 x_2 q_2 + x_2^2 q_4 \stackrel{!}{=} k_1^2 x_1^2 + 2x_1 x_2 k_1 k_2 + k_2^2 x_2^2 \end{aligned}$$

- b) Zunächst setzt man eine symmetrische Matrix $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix}$ in die Riccati-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \Phi B R^{-1} B^T \Phi - \Phi A - A^T \Phi - Q \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot 4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4\Phi_2^2 & 4\Phi_2\Phi_3 \\ 4\Phi_2\Phi_3 & 4\Phi_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2\Phi_1 + \Phi_2 \\ 2\Phi_1 + 2\Phi_2 & 4\Phi_2 + 2\Phi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$4\Phi_2^2 - 1 = 0 \rightarrow \Phi_2 = 0.5 \text{ (oder -0.5)}$$

$$4\Phi_3^2 - 4\Phi_2 - 2\Phi_3 = 0 \rightarrow \Phi_3 = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = 1,$$

($\Phi_2 = -0.5$ geht nicht, da Φ_3 sonst nicht reell wäre. Bei $\Phi_3 = -0.5$ wäre $\Phi \not\geq 0$.)

$$4\Phi_2\Phi_3 - 2\Phi_1 - \Phi_2 = 0 \rightarrow \Phi_1 = 2\Phi_2\Phi_3 - 0.5\Phi_2 = 0.75.$$

So erhält man $\Phi = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} > 0$.

Mit $K = R^{-1}B^T\Phi$ erhält man dann den Regler:

$$u(t) = -K \cdot x(t) = -4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \cdot x(t) = -\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot x(t).$$

c) Die Pole des entstandenen Regelsystems sind die Eigenwerte von $[A - BK]$:

$$\det[sI - (A - BK)] = \det \begin{bmatrix} s & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 4 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightarrow s_1 = -1.5 + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \quad s_2 = -1.5 - \frac{\sqrt{7}}{2}i.$$

Das System ist somit stabil.

Aufgabe 7 (LQG-LTR und MATLAB)

6 Punkte

Für einen LQG-LTR Entwurf wurde folgendes MATLAB®-Skript geschrieben:

```
%-----
close all, clear all

A = [1,-3,-1,-2; 2,-1,1,-1; 0,2,-3,1; -3,4,-1,1];
B = [0,-2;1,0;0,1; 3,0];
C = [1,0,4,0; 0,0,2,1];
D = zeros(2,2);
sys1 = ss(A,B,C,D);

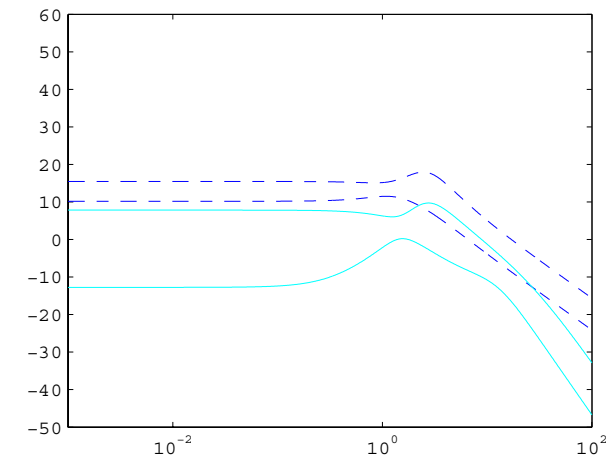
rho = 0.1;
K = lqr(A,B,C'*C,rho*eye(2));
sys2 = ss(A,B,K,zeros(2));

nu = 1e-1;
L = lqr(A',C',B*B',nu*eye(2))';
sys3 = ss(A-B*K-L*C,-L,-K,zeros(2));

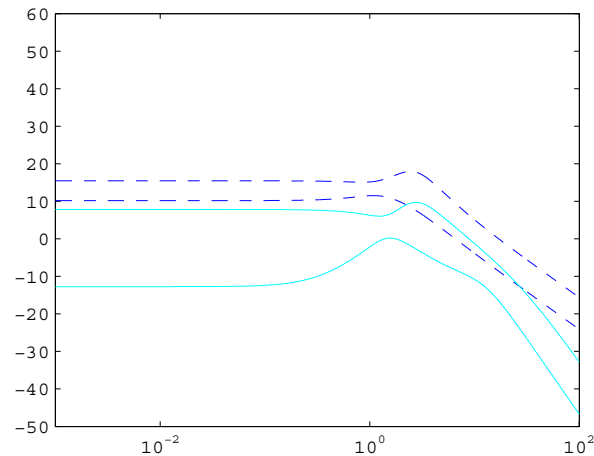
sys4 = series(sys1,sys3); % series(sys1,sys3) berechnet die
                           % Serienschaltung von sys1 und sys3

sigma(sys2,'--',sys4)
%-----
```

- a) Beschreiben Sie in regelungstechnischen Worten, um was es sich bei **sys2** und **sys4** handelt.
- b) Wenn man das Skript ausführt, gibt MATLAB® das untenstehende Diagramm aus. Beschriften Sie die Achsen und alle Graphen des Diagramms.



- c) Das Regelsystem weist einen stationären Nachlauffehler auf. Beschreiben Sie in Worten, was Sie dagegen unternehmen würden. Zeichnen Sie im folgenden Diagramm qualitativ, wie die Graphen nach dieser Massnahme aussehen würden.



Lösung 7

- a) `sys2` ist das Zustandsraummodell der Kreisverstärkung des Regelsystems mit dem LQG-Regulator. `sys4` ist das Zustandsraummodell der Kreisverstärkung des Regelsystems mit dem LQG/LTR-Regler.
- b) Auf dem Plot (Abbildung 6) sieht man den Verlauf des jeweils kleinsten und grössten Singularwertes von der Kreisverstärkung des Regelsystems; einmal unter der Annahme, dass alle Zustände gemessen werden können (LQG) und einmal mit Zustandsbeobachter (LQG/LTR).
- c) Um den stationären Nachlauffehler vollständig zu eliminieren, muss die Kreisverstärkung des Regelsystems einen offenen Integrator enthalten. Man erweitert also die Strecke mit einem offenen Integrator und legt nachher den LQG/LTR Regler aus. Der offene Integrator hat eine unendlich hohe Verstärkung bei tiefen Frequenzen, die Kreisverstärkung steigt dementsprechend in Richtung tiefe Frequenzen mit 20 dB/dek an. (Vergleiche Abbildung 7.)

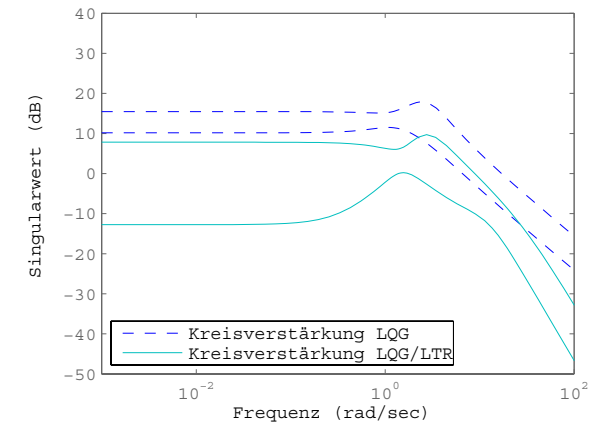


Abbildung 6: Vom Skript generierter Plot

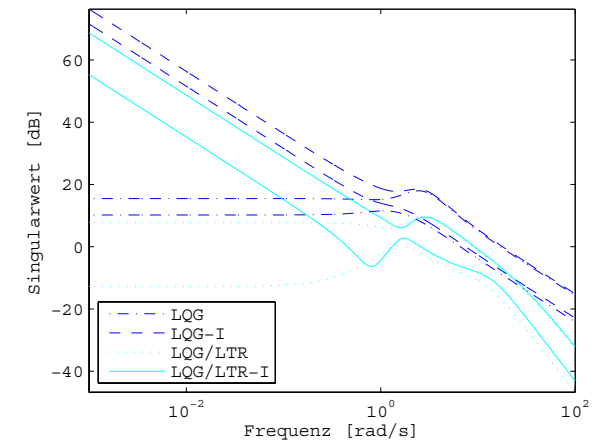


Abbildung 7: System nach einer Integrator-Erweiterung der Strecke

Aufgabe 8 (MULTIPLE-CHOICE — LQR und LQG/LTR) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (−1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

- a) Ein lineares Zustandsraummodell, dessen Dynamikmatrix nur Eigenwerte mit streng negativen Realteilen besitzt, ist immer stabilisierbar.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- b) Ein LQG-LTR Regelsystem hat eine garantierte Phasenreserve von 60° .
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.

Gegeben sei eine Strecke 3. Ordnung mit der Dynamikmatrix A bzw. der Eingangsmatrix B ,

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für diese Strecke soll ein LQ-Regulator entworfen werden, mit:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt = \int_0^\infty (k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 + 2\rho u_1^2 + \rho u_2^2) dt, \quad k_2, k_3, \rho > 0$$

$$u(t) = -K \cdot x(t), \quad K = R^{-1} B^T \Phi.$$

Beurteilen Sie die folgenden Aussagen zu diesem Regelproblem.

- c) Die Strecke hat 3 Eingänge.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- d) Die Strecke ist vollständig steuerbar.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- e) Die Matrix R ist positiv definit.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- f) Die Matrix Q ist zulässig für das formulierte LQR-Problem.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.

- g) Aus der Riccati-Gleichung ergibt sich ein eindeutiger und stabilisierender Regler.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- h) Nur die Matrix Φ_3 ist eine mögliche Lösung der Riccati-Gleichung für entsprechende Werte von k_2 , k_3 , und ρ .

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1.1 & 1 \\ 0.9 & 3 & 0.9 \\ 1 & 1.1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \Phi_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

- ☐ Richtig.
☐ Falsch.

Lösung 8

- a) *Richtig.* Stabilisierbarkeit setzt voraus, dass alle Eigenwerte der Dynamikmatrix mit einem positiven Realteil verschiebbar sind. In unserem Fall hat das System keine positiven Eigenwerte und ist demzufolge stabilisierbar.
- b) *Falsch.* Wenn alle Zustände messbar sind und ein LQ-Regulator entworfen wird, so weist dieser eine Phasenreserve von 60° in allen Kanälen auf. Werden die Zustände jedoch (teilweise) beobachtet, wie beim LQG-LTR Regler kann diese Phasenreserve nicht garantiert werden.
- c) *Falsch.* Die Strecke hat zwei Eingänge.
- d) *Falsch.* Auch ohne Berechnung kann man sehen, dass der Zustand x_1 nicht direkt gesteuert werden kann, er ist auch nicht von anderen Zuständen abhängig. Jedoch ist das System stabilisierbar, denn der nicht steuerbare Zustand ist stabil.
- e) *Richtig.* $R = \begin{bmatrix} 2\rho & 0 \\ 0 & \rho \end{bmatrix}$ mit $\rho > 0$ ist positiv definit.
- f) *Richtig.* Die Matrix

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$$

ist positiv-semidefinit und damit zulässig. Der Zustand 1 wird sinnvollerweise nicht bestraft, weil man ihn nicht steuern kann.

- g) *Richtig.* Das Paar $[A, B]$ ist stabilisierbar und das Paar $[A, \tilde{C}]$ mit $Q = \tilde{C}^T \cdot \tilde{C}$ hat keine nicht detektierbaren Eigenwerte auf der imaginären Achse, da $k_2, k_3 > 0$. Daher kann ein eindeutiger und stabilisierender Regler mittels der Riccati-Gleichung berechnet werden.
- h) *Falsch.* Die Matrix Φ_2 ist möglich. Φ_1 ist unmöglich, da die Matrix nicht symmetrisch ist. Φ_3 ist nicht möglich, weil die Matrix indefinit ist.

Aufgabe 9 (MULTIPLE-CHOICE — Diverse)**8 Punkte**

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (−1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

- a) Für den SISO-Fall ist die Ungleichung $|T(j\omega)W_1(j\omega)| < |L(j\omega)|$ äquivalent zur Bedingung für die nominelle Regelungsqualität (nominal performance).
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- b) Hat eine Übertragungsmatrix $P(s)$ Dreieckstruktur, so ist die zugehörige RGA-Matrix gleich der Identitätsmatrix.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- c) Für ein MIMO-System ist der Übergang von der Zustandsraumdarstellung (A, B, C, D) zur Übertragungsmatrix $P(s)$ nicht eindeutig.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- d) $P(s)$ sei die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke (plant) und $C(s)$ die Übertragungsfunktion eines Reglers. Mit dem folgenden MATLAB®-Code werden die Singularwerte der komplementären Empfindlichkeit $T(s)$ in einem logarithmischen Plot dargestellt.
- ```
%-----
w = logspace(-3,3,100);
D = eye(3)+P*C;
figure
sigma(P*C*inv(D),w)
%-----
```
- ☐ Richtig.  
☐ Falsch.
- e) Aus dem Singularwertverlauf eines MIMO-Systems kann man Informationen sowohl über die Amplitude als auch über die Phase des Systems gewinnen.
- ☐ Richtig.  
☐ Falsch.

- f) Für alle realen SISO-Systeme gilt: Wenn die Forderungen  $\max_{\omega}\{|S(j\omega)W_1(j\omega)|\} < 0.5$  und  $\max_{\omega}\{|T(j\omega)W_2(j\omega)|\} < 0.5$  erfüllt sind, dann ist robuste Regelgüte (robust performance) gewährleistet.
- ☐ Richtig.  
☐ Falsch.
- g) Für alle realen SISO-Systeme gilt: Ein System mit Phasenreserve von  $\varphi = 60^\circ$  erfüllt die Bedingung für nominelle Regelungsqualität (nominal performance) mit  $|W_1(j\omega)| = 1, \forall \omega$ .
- ☐ Richtig.  
☐ Falsch.
- h) Wenn die Aktuatoren eines Regelsystems Sättigungen aufweisen, jedoch nur die Regelstrecke (und nicht der Regler) integrierend ist, ist eine Anti-Reset-Windup Massnahme nicht nötig.
- ☐ Richtig.  
☐ Falsch.

**Lösung 9**

- a) *Richtig.* Wenn man  $S(s)$  durch  $T(s)/L(s)$  in der Bedingung für die nominelle Regelungsqualität ersetzt, bekommt man für den SISO-Fall den gegebenen Ausdruck.
- b) *Richtig.* Die RGA-Matrix eines Systems mit Dreieckstruktur ist gleich der Einheitsmatrix. Solche Systeme können meistens mit SISO-Regelstrukturen gut geregelt werden.
- c) *Falsch.* Er ist eindeutig. Der umgekehrte Zusammenhang ist jedoch nicht eindeutig.
- d) *Richtig.*
- e) *Falsch.* Aus den Singularwertverläufen können keine Phaseninformationen gewonnen werden.
- f) *Richtig.* Diese Forderungen kann man für das Design von Systemen mit robuster Regelgüte verwenden. Die kombinierte Forderung ist hinreichend (und schärfer) für robuste Regelungsqualität, da  $\max_{\omega}\{|S(j\omega)W_1(j\omega)| + |T(j\omega)W_2(j\omega)|\} < 1$  damit automatisch erfüllt ist.
- g) *Falsch.* Die Schlussfolgerung gilt zwar in die andere Richtung, aber nominelle Regelungsqualität ist eine stärkere Forderung als die Phasenreserve (welche nur bei der Durchtrittsfrequenz etwas über den Abstand zum Punkt -1 aussagt).
- h) *Richtig.* Eine Anti-Reset-Windup Massnahme ist nur dann nötig, wenn der Regler integrierend ist.