ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMRT Measurement and Control Laboratory
Prof. Dr. H. P. Geering
Prof. Dr. L. Guzzella

BSc - Semesterendprüfung **1.7.2005**

Regelungstechnik II

Musterlösung

Dauer der Prüfung: **120 Minuten**

Anzahl der Aufgaben: **9** (**unterschiedlich** gewichtet, total 79 Punkte)

Bewertung: Um die Note 6 zu erlangen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden (50 von 79 Punkten → Note 6).

Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben.

Falsche Antworten bei den Multiple-Choice Aufgaben geben Punkteabzug. (Detaillierte Angaben sind bei den entsprechenden Aufgaben zu finden.)

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Blätter (**40 Seiten**)

Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben, und es sind **keine elektronischen Hilfsmittel** erlaubt.

Zur Beachtung: Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern.

Aufgabe 1 (Systemanalyse eines MIMO-Systems) 10 Punkte

Gegeben sei das folgende dynamische System dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -2\,x_1(t) + u_1(t) + u_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= -2\,x_2(t)\\
\dot{x}_3(t) &= -3\,x_1(t) - 4\,x_3(t) + 2\,u_1(t)\\
y_1(t) &= -x_3(t)\\
y_2(t) &= x_1(t) + x_2(t)\,.
\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $P(s)$ des gegebenen Systems.

b) Beurteilen Sie die Stabilität des gegebenen Systems.

c) Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ und die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ des Systems lauten wie folgt:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -11 & -3 & 50 & 18 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -18 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4\\ -1 & 0 & 4 & 0 & -16 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Ist das System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Bestimmen Sie den steuerbaren Teilraum und den beobachtbaren Teilraum des Systems. Wählen Sie dabei aus den untenstehenden Optionen, und begründen Sie Ihre Wahl.

i) $\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

ii) $\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

iii) $\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

iv) $\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

v) $\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle$

e) Ist das System BIBO[1]-stabil? Begründen Sie.

f) Hätten Sie MATLAB® zur Verfügung, würden Sie als Hilfe zur Lösung der Teilaufgaben **a)** bis **c)** vermutlich die folgenden Befehle verwenden: `obsv`, `ss`, `ctrb`, `tf`, `rank`, `eig`.

i) Ordnen Sie die Befehle den entsprechenden Teilaufgaben **a)**, **b)** und **c)** zu.

ii) Wie würden Sie in MATLAB® die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ berechnen?

[1] Bounded Input Bounded Output

Lösung 1

Das in der Aufgabe gegebene lineare System kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\,, \end{aligned}$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Die Übertragungsmatrix $P(s)$ eines MIMO-Systems wird analog zur Übertragungsfunktion eines SISO-Systems berechnet,

$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D\,.$$

Für das gegebene System ergibt sich,

$$\begin{aligned} P(s) &= C \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 3 & 0 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot B + D \\ &= C \cdot \left(\frac{1}{\det(sI-A)} \cdot \begin{bmatrix} (s+2)(s+4) & 0 & -3(s+2) \\ 0 & (s+2)(s+4) & 0 \\ 0 & 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix}^T \right) \cdot B + D \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s+4)} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} (s+2)(s+4) & 0 & 0 \\ 0 & (s+2)(s+4) & 0 \\ -3(s+2) & 0 & (s+2)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (s+2)(s+4) & (s+2)(s+4) \\ 0 & 0 \\ -3(s+2)+2(s+2)^2 & -3(s+2) \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s+4)} \cdot \begin{bmatrix} 3(s+2)-2(s+2)^2 & 3(s+2) \\ (s+2)(s+4) & (s+2)(s+4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{-2s-1}{s^2+6s+8} & \dfrac{3}{s^2+6s+8} \\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Für die Beurteilung der Stabilität des Systems werden die Eigenwerte von A, d.h. die Wurzeln des charakteristischen Polynoms berechnet.

$$\det(sI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s+2 & 0 & 0 \\ 0 & s+2 & 0 \\ 3 & 0 & s+4 \end{bmatrix}\right) = (s+2)^2(s+4) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -2 \text{ (doppelt)}\,, \ \lambda_3 = -4$$

Da alle Eigenwerte negativen Realteil haben, ist das System *asymptotisch stabil*.

c) Das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ vollen Rang hat,

$$\text{Vollständig steuerbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang}\big(\mathcal{R} = [B, A\cdot B, \ldots, A^{n-1}\cdot B]\big) = n\,.$$

Im vorliegenden Fall ergibt sich für die Steuerbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{R} = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -11 & -3 & 50 & 18 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich hat $\mathcal{R}$ nicht vollen Rang, $\text{Rang}(\mathcal{R}) = 2 < 3$ (der zweite Zeilenvektor ist ein Nullvektor), womit das System *nicht vollständig steuerbar* ist.

Das System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ vollen Rang hat,

$$\text{Vollständig beobachtbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang}\big(\mathcal{O} = [C^T, A^T\cdot C^T, \ldots, (A^T)^{n-1}\cdot C^T]^T\big) = n\,.$$

Im vorliegenden Fall lautet die Beobachtbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{O} = [C^T, A^TC^T, (A^T)^2C^T]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & -18 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -16 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Offensichtlich hat $\mathcal{O}$ vollen Rang, $\text{Rang}(\mathcal{O}) = 3$ (bereits die ersten drei Kolonnenvektoren von $\mathcal{O}^T$ sind linear unabhängig), womit das System *vollständig beobachtbar* ist.

d) Der steuerbare Teilraum des Systems entspricht dem Wertebereich der Matrix $\mathcal{R}$, d.h. dem durch die Kolonnenvektoren von $\mathcal{R}$ aufgespannten Teilraum,

$$\text{Steuerbarer Teilraum:} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Bemerkung: Aus dem gegebenen Differentialgleichungssystem ist direkt ersichtlich, dass die Zustandsgrösse $x_2(t)$ nicht steuerbar ist, da sie weder durch den Eingang $u(t)$ noch durch eine andere Zustandsgrösse beeinflusst wird.

Der beobachtbare Teilraum des Systems entspricht dem orthogonalen Komplement des Nullraums der Matrix $\mathcal{O}$, d.h. dem durch die Kolonnenvektoren von $\mathcal{O}^T$ aufgespannten Teilraum,

$$\text{Beobachtbarer Teilraum:} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Bemerkung: Da die Beobachtbarkeitsmatrix vollen Rang hat, entspricht der beobachtbare Teilraum dem gesamten Zustandsraum.

e) Da das System asymptotisch stabil ist (vergleiche Teilaufgabe **b)**) ist es auch *BIBO-stabil*.

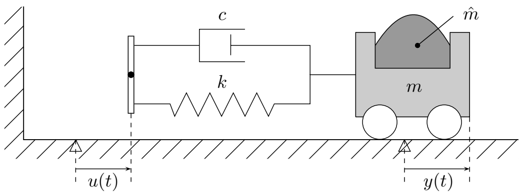
f) i) Die nachfolgende Tabelle zeigt die Zuordnung der Befehle.

Teilaufgabe	**a)**	**b)**	**c)**
MATLAB®-Befehle	`ss`, `tf`	`eig`	`ctrb`, `obsv`, `rank`

ii) `R = ctrb(A,B)` oder alternativ: `ctrb(ss(A,B,C,D))`.

Aufgabe 2 (Stabilitätsanalyse eines Regelsystems) 10 Punkte

Wir betrachten ein gedämpftes Feder-Masse-System bestehend aus einem Wagen der Masse m [kg] mit Zusatzmasse $\hat{m}$ [kg], einer Feder mit Federkonstante k [N/m] und einem linearen Stossdämpfer mit dem Reibungskoeffizienten c [Ns/m], bei dem die Position $u(t)$ [m] vorgegeben, und die Position des Wagens $y(t)$ [m] gemessen wird.



Das System kann durch die (auf die Gleichgewichtslage $y(t) \equiv 0$, $u(t) \equiv 0$ bezogene) Differentialgleichung,

$$(m+\hat{m})\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = k\,u(t) + c\,\dot{u}(t)\,, \qquad m, c, k > 0\,,\ \hat{m} \geq 0\,,$$

beschrieben werden. Um die Position des Wagens $y(t)$ zu regeln, wurde ein PI-Regler mit den Reglerparametern k_p und T_i ausgelegt,

$$k_p = 1\,, \quad T_i = 1\,.$$

Bestimmen Sie in Abhängigkeit der gegebenen System- und Reglerparameter den erlaubten Bereich der Zuladung, $0 \leq \hat{m} < \hat{m}_{max}$, so dass das geregelte System asymptotisch stabil bleibt.

Lösung 2

Um den erlaubten Bereich der Zuladung, $0 \leq \hat{m} < \hat{m}_{max}$, zu bestimmen, wird das algebraische Stabilitätskriterium nach Hurwitz[2] angewandt. Das Vorgehen gliedert sich im wesentlichen in vier Schritte:

1) Berechnen des charakteristischen Polynoms des Regelsystems

Die Stabilitätseigenschaften des Regelsystems sind gegeben durch das Nennerpolynom der (komplementären) Empfindlichkeit (charakteristisches Polynom des Regelsystems).

Aus der in der Aufgabenstellung gegebenen Bewegungsdifferentialgleichung,

$$\begin{aligned}
&(m+\hat{m})\,\ddot{y}(t) + c\,\dot{y}(t) + k\,y(t) = k\,u(t) + c\,\dot{u}(t) \quad \Leftrightarrow \\
&\ddot{y}(t) + \frac{c}{m+\hat{m}}\,\dot{y}(t) + \frac{k}{m+\hat{m}}\,y(t) = \frac{k}{m+\hat{m}}\,u(t) + \frac{c}{m+\hat{m}}\,\dot{u}(t)\,,
\end{aligned}$$

lässt sich direkt die Übertragungsfunktion der Strecke anschreiben,

$$P(s) = \frac{b_m\,s^m + \cdots + b_1\,s + b_0}{s^n + a_{n-1}\,s^{n-1} + \cdots + a_1\,s + a_0} = \frac{\frac{c}{m+\hat{m}}\,s + \frac{k}{m+\hat{m}}}{s^2 + \frac{c}{m+\hat{m}}\,s + \frac{k}{m+\hat{m}}}\,.$$

[2]Adolf Hurwitz (1859-1919)

Die Übertragungsfunktion eines PI-Reglers ist definiert als

$$C(s) = k_p\left(1 + \frac{1}{T_i\,s}\right) = \frac{k_p\,s + \frac{k_p}{T_i}}{s}\,.$$

Bemerkung: Die folgenden Berechnungen basieren auf der allgemeinen Formel für $C(s)$. Der Schreibaufwand kann reduziert werden, wenn an dieser Stelle für k_p und T_i die numerischen Werte eingesetzt werden.

Für das Nennerpolynom der Übertragungsfunktion des Regelsystems (komplementäre Empfindlichkeit) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
T(s) &= \frac{P(s)\,C(s)}{1 + P(s)\,C(s)} \\
&= \frac{(\cdots)}{1 + \frac{\frac{c}{m+\hat{m}}\,s + \frac{k}{m+\hat{m}}}{s^2 + \frac{c}{m+\hat{m}}\,s + \frac{k}{m+\hat{m}}} \cdot \frac{k_p\,s + \frac{k_p}{T_i}}{s}} \\
&= \frac{(\cdots)}{\left(s^2 + \frac{c}{m+\hat{m}}\,s + \frac{k}{m+\hat{m}}\right)s + \left(\frac{c}{m+\hat{m}}\,s + \frac{k}{m+\hat{m}}\right)\left(k_p\,s + \frac{k_p}{T_i}\right)} \\
&= \frac{(\cdots)}{s^3 + \frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}}\,s^2 + \left(\frac{k\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} + \frac{c\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})}\right)s + \frac{k\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})}}\,.
\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom lautet also:

$$a(s) = \underbrace{1}_{a_3}\,s^3 + \underbrace{\frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}}}_{a_2}\,s^2 + \underbrace{\left(\frac{k\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} + \frac{c\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})}\right)}_{a_1}\,s + \underbrace{\frac{k\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})}}_{a_0}\,, \quad a_3 > 0\,.$$

Bemerkung: Das charakteristische Polynom darf mit positiven Faktoren skaliert werden. Dies vereinfachte u.U. die Berechnung der Hurwitz Determinanten.

2) Bilden der Hurwitz Matrix

Für das berechnete charakteristische Polynom ergibt sich die folgende Hurwitz Matrix,

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} & 1 & 0 \\ \frac{k\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})} & \frac{k\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} + \frac{c\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})} & \frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} \\ 0 & 0 & \frac{k\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})} \end{bmatrix} \in R^{3\times 3}\,.$$

3) Berechnen der Hurwitz Determinanten

Die Hurwitz Determinanten für dieses System lauten:

$$\begin{aligned}
d_1 &= a_2 = \frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} \\
d_2 &= a_2\,a_1 - a_0\,a_3 = \frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}}\left(\frac{k\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} + \frac{c\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})}\right) - \frac{k\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})} \\
d_3 &= a_0 \cdot d_2 = \frac{k\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})} \cdot d_2\,.
\end{aligned}$$

4) Anwenden des Hurwitz Theorems

Das resultierende Regelsystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Hurwitz Determinanten streng positiv sind. Im vorliegenden Fall lässt sich für die Zusatzmasse $\hat{m}$ aus der Determinante d_2 die folgende Bedingung ableiten (Beachte: da die Parameter m, $\hat{m}$, k, c, k_p und T_i alle positiv sind, sind die Bedingungen für die Determinanten d_1 und d_3 trivialerweise erfüllt):

$$\begin{aligned} d_2 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} \left(\frac{k\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} + \frac{c\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})} \right) - \frac{k\,k_p}{T_i\,(m+\hat{m})} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{c\,(1+k_p)}{m+\hat{m}} \left(k\,(1+k_p) + \frac{c\,k_p}{T_i} \right) > \frac{k\,k_p}{T_i} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{T_i\,c}{k_p}\,(1+k_p)^2 + \frac{c^2}{k}\,(1+k_p) > m + \hat{m}\,. \end{aligned}$$

Das Regelsystem ist somit (genau dann) asymptotisch stabil, wenn die Zusatzmasse $\hat{m}$ kleiner als eine maximal erlaubte Zusatzlast $\hat{m}_{max}$ ist,

$$\text{Regelsystem asymptotisch stabil} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{m} < \hat{m}_{max} = \frac{c^2}{k}\,(1+k_p) + c\,\frac{T_i}{k_p}\,(1+k_p)^2 - m\,.$$

Mit den numerischen Werten für k_p und T_i erhält man:

$$\text{Regelsystem asymptotisch stabil} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{m} < \hat{m}_{max} = \frac{2\,c^2}{k} + 4\,c - m\,.$$

Aufgabe 3 (Spezifikationen, Totzeit) — 10 Punkte

Für die Regelstrecke mit der nominellen Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$$

und dem Unsicherheitsmodell

$$W_2(s) = 0.2\,\frac{0.3s+1}{0.012s+1}\,(0.025s+1)^2$$

soll die Vorbereitung für eine Reglerauslegung gemacht werden. Das geschlossene Regelsystem soll im Zeitbereich folgende Eigenschaften aufweisen:

- keine bleibende Regelabweichung,
- kein Überschwingen,
- Anstiegszeit etwa 1 s.

Hinweis: Verwenden Sie für eine allfällige Berechnung der geforderten Durchtrittsfrequenz und Phasenreserve die Approximationsformeln, welche auf einem System 2. Ordnung basieren.

a) Wählen Sie aus der folgenden Liste die einzig sinnvolle Gewichtung $W_1(s)$. Geben Sie für alle anderen jeweils einen Grund, warum sie nicht gewählt werden sollten.
Tipp: Betrachten Sie insbesondere die Asymptoten und den Durchtrittsbereich.

i) $W_1 = \dfrac{2s+0.2}{s+0.002}$

ii) $W_1 = \dfrac{s+2}{2s+0.02}$

iii) $W_1 = \dfrac{s+0.002}{3s+0.3}$

iv) $W_1 = \dfrac{s+0.01}{2s+0.0001}$

v) $W_1 = \dfrac{100}{s+1}$

b) Warum wurde bei $W_2(s)$ der Term $(0.025s+1)^2$ angefügt? Welche relative Ordnung muss der Regler mindestens haben, damit alle Spezifikationen erfüllt werden können?

c) Nehmen Sie an, Sie hätten einen Regler gefunden, der alle Spezifikationen erfüllt. Leider bemerken Sie, dass das reale System zusätzlich eine Totzeit von 0.5 s aufweist. Wäre das Regelsystem mit Ihrem Regler trotzdem noch asymptotisch stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 3

Aus der Forderung an die Anstiegszeit kann die gewünschte Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung bestimmt werden,

$$\omega_D \approx \frac{1.7}{t_{90}} = 1.7\,\text{rad/s}\,.$$

a) Die Gewichtung ii) ist die richtige Wahl.

- Die Gewichtung i) bleibt auch für hohe Frequenzen grösser als 1, die Sensitivität jedes realen Systems geht jedoch gegen 1 für hohe Frequenzen.
- Die Gewichtung iii) gewichtet die Sensitivität bei kleinen Freqeuenzen mit Werten kleiner als 1 $\rightarrow$ keine Störgrössenunterdrückung.
- Die Durchtrittsfrequenz der Gewichtung iv) berechnet sich aus der Gleichung $|W_1(j\omega_D)| = 1$,

$$\frac{\omega_D^2 + 0.01^2}{4\omega_D^2 + 0.0001^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_D \approx 0.006\,\text{rad/s}\,.$$

  Diese Gewichtung stellt somit keine brauchbaren Anforderungen an das Regelsystem.
- Die Durchtrittsfrequenz der Gewichtung v) lässt sich analog berechnen,

$$\frac{10000}{\omega_D^2 + 1^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_D \approx 100\,\text{rad/s}\,.$$

  Diese Durchtrittsfrequenz ist viel höher als die verlangte Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung. Zudem hat die Gewichtung v) keine endliche Nullstelle; der Überschwinger der Sensitivität würde somit zu wenig gewichtet werden.

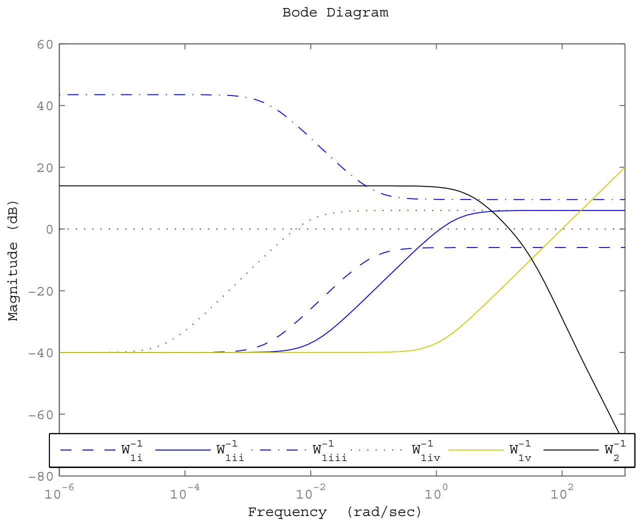


Abbildung 1: Amplitudengang der inversen Gewichtungen

b) Der Term $(0.025s+1)^2$ in $W_2(s)$ sorgt dafür, dass die komplementäre Sensitivität bei hohen Frequenzen mit mindestens 40 dB/dek. abfällt und damit hochfrequente Störungen stark abgeschwächt werden.

Weil die Strecke bereits eine relative Ordnung von 2 hat, ist die minimale relative Ordnung des Regler gleich Null.

c) Die Totzeit dreht den Regelkreis bei der Durchtrittsfrequenz um den Winkel α in Richtung des Nyquistpunktes,

$$\alpha = \omega_D \cdot T = 1.7 \text{ rad/s} \cdot 0.5 \text{ s} = 0.85 \text{ rad}\,.$$

Aus der Spezifikation bezüglich des Überschwinges kann die Phasenreserve des ursprünglichen Systems berechnet werden,

$$\varphi = 71^\circ - 117 \cdot e_{max}\,.$$

Mit $e_{max} = 0$ (kein Überschwingen) wird die Phasenreserve somit zu

$$\varphi = 71^\circ\,.$$

Dies entspricht ungefähr $\varphi \approx 1.2\,\text{rad}$.

Das System ist somit immer noch asymptotisch stabil.

Aufgabe 4 (Smith Prädiktor) 10 Punkte

Für die Regelstrecke mit der Übertragungsfunktion

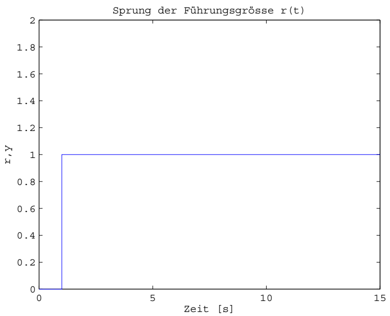
$$P(s) = \frac{2}{2s+1} \cdot e^{-s}$$

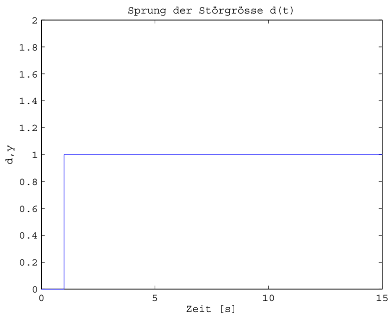
soll ein Smith Prädiktor entworfen werden. Das Folgeverhalten des resultierenden Regelsystems soll 5× schneller sein als die Regelstrecke selbst (d.h. die Zeitkonstante der komplementären Sensitivität soll 5× kleiner sein als die der Regelstrecke).

a) Zeichnen Sie das Signalflussbild des Regelsystems. Zeichnen Sie zusätzlich eine Störung d ein, welche direkt auf die Ausgangsgrösse wirkt.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion eines Reglers, der die gegebenen Anforderungen erfüllt. Berechnen Sie die Reglerparameter des Teils des Reglers, welcher das prädiktierte Fehlersignal (Fehlersignal der Strecke ohne Totzeit) regelt. (**Tipp:** Finden Sie diesen Teil des Reglers, indem Sie die berechnete Übertragungsfunktion mit der Übertragungsfunktion aus dem Signalflussbild aus **a)**) vergleichen.

c) Skizzieren Sie in den abgebildeten Diagrammen die Antwort y des Systems auf einen Sprung in der Führungsgrösse r und auf einen Sprung in der Störgrösse d.





Lösung 4

a) Das Signalflussbild des Regelsystems ist in Abbildung 2 dargestellt, wobei gilt:

$$P_0 = \frac{2}{2s+1}\,, \quad T = 1\,\mathrm{s}\,.$$

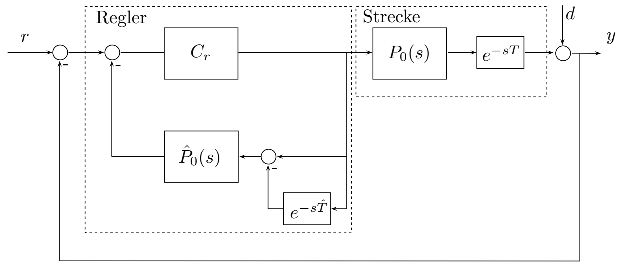


Abbildung 2: Signalflussbild des Regelsystems.

b) Das Regelsystem soll folgende komplementäre Sensitivität haben:

$$T(s) = \frac{1}{\frac{2}{5}s+1} \cdot e^{-s}.$$

Die Gleichung für die komplementäre Sensitivität,

$$T(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}\,,$$

mit $P(s) = P_0(s) \cdot e^{-sT}$, kann nach dem Regler aufgelöst werden:

$$C(s) = \frac{T(s)}{P(s)(1-T(s))}\,.$$

Setzt man für T und P ein, erhält man:

$$C(s) = \frac{\frac{1}{\frac{2}{5}s+1} \cdot e^{-s}}{\frac{2}{2s+1} \cdot e^{-s}\left(1 - \frac{1}{\frac{2}{5}s+1} \cdot e^{-s}\right)}\,.$$

Dies lässt sich vereinfachen zu:

$$C(s) = \frac{2s+1}{2\left(1+\frac{2}{5}s - e^{-s}\right)}\,.$$

Setzt man $\hat{P}_0(s) = P_0$ und $\hat{T} = T\,\mathrm{s}$, erhält man aus dem Signalflussbild für den Regler:

$$C(s) = \frac{C_r}{1 + \frac{2}{2s+1}C_r\left(1-e^{-s}\right)}\,.$$

Setzt man nun die beiden Regler gleich, erhält man für C_r:

$$C_r(s) = \frac{10s+5}{4s} = \frac{5}{2}\left(1+\frac{1}{2s}\right)\,.$$

Der Regler ist also ein PPI-Regler mit den Reglerparametern $k_p = \frac{5}{2}$ und $T_i = 2\,\mathrm{s}$.

c) Für die Sprungantwort von r betrachtet man einfach $T(s)$ und für die Sprungantwort von d betrachtet man $S(s) = 1 - T(s)$.

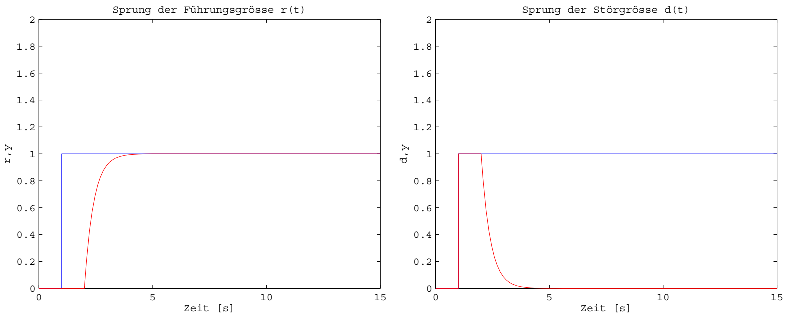


Abbildung 3: Sprungantworten

Aufgabe 5 (LQR-Problem) 5 Punkte

Für die Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = 2x(t) + 3u(t)$$

wurde ein LQR-Problem mit dem Gütekriterium

$$J = \int_0^\infty \left[Q\, x^2(t) + u^2(t)\right] dt$$

gelöst. Der Pol des optimalen Regelsystems liegt bei $s = -6$.

a) Ist die Regelstrecke asymptotisch stabil?

b) Welcher Wert für Q ist bei der Lösung des Optimierungsproblems verwendet worden?

Lösung 5

a) Die Systemmatrizen lauten: $A = 2$, $B = 3$.
Stabilität falls Realteil der Pole negativ.
Pol bei $s = 2$, deswegen ist die Regelstrecke nicht stabil.

b) Mit der Matrix $R = 1$ und dem Pol bei $s = -6$ kann man auf Q zurückschliessen. Die neue A-Matrix des Regelsystem ist

$$\tilde{A} = A - BK = A - BR^{-1}B^T\Phi = 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \Phi = 2 - 9 \cdot \Phi\,.$$

Es folgt, dass

$$\det[sI - \tilde{A}] = \det[s - (2 - 9 \cdot \Phi)] = s + (9 \cdot \Phi - 2) \overset{!}{=} s + 6\,,$$

und mit Koeffizientenvergleich $9 \cdot \Phi - 2 = 6$ folgt, dass $\Phi = \frac{8}{9}$. Wenn man dieses Resultat in der Riccati Gleichung

$$\Phi BR^{-1}B^T\Phi - \Phi A - A^T\Phi - Q = 0$$

einsetzt, bekommt man

$$Q = \Phi BR^{-1}B^T\Phi - \Phi A - A^T\Phi = \frac{8}{9} \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{8}{9} - \frac{8}{9} \cdot 2 - 2 \cdot \frac{8}{9} = \frac{32}{9}\,.$$

Aufgabe 6 (Zustandsbeobachter) **10 Punkte**

Gegeben sei eine Strecke, die durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t)\,. \end{aligned}$$

Sie sollen einen Zustandsbeobachter

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

auslegen, der parallel zu diesem System auf einem Rechner läuft.

a) Nehmen Sie an, der Entwurfsparameter μ sei bekannt, $\mu = \frac{1}{3}$. Berechnen Sie die Beobachterverstärkungsmatrix L.

b) Sie sind mit Ihrem Resultat nicht zufrieden, und deswegen entscheiden Sie sich, die Beobachterverstärkungsmatrix L so zu berechnen, dass die Pole des Zustandsbeobachters bei $s_1 = -2$ und $s_2 = -3$ liegen.

Lösung 6

Die Systemmatrizen sind gegeben durch:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0\,.$$

a) Für die Auslegung des Zustandsbeobachters wird die folgende Riccati-Gleichung gelöst:

$$0 = \frac{1}{\mu}\,\Psi C^T C \Psi - \Psi A^T - A\Psi - BB^T\,,$$

wobei die Matrix Ψ symmetrisch und positiv definit ist. Durch Einsetzen erhält man,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= 3 \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 \\ \psi_1\psi_2 & \psi_2^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi_2 & \psi_1 \\ \psi_3 & \psi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \psi_2 & \psi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

womit für ψ_1, ψ_2 und ψ_3 folgt:

$$\begin{cases} 3\psi_1^2 - 2\psi_2 = 0 & \rightarrow \quad \psi_1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}\psi_2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} & \rightarrow \psi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 3\psi_1\psi_2 - \psi_3 - \psi_1 = 0 & \rightarrow \quad \psi_3 = \psi_1(3\psi_2 - 1) = \sqrt{\frac{2}{3}}(3-1) = 2\sqrt{\frac{2}{3}} & \rightarrow \psi_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 3\psi_2^2 - 2\psi_2 - 1 = 0 & \rightarrow \quad \psi_2 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4\cdot 3}}{6} = \frac{2\pm 4}{6} = 1 \text{ oder } -\frac{1}{3} & \rightarrow \psi_2 = 1\,. \end{cases}$$

Für die transponierte Beobachterverstärkungsmatrix folgt:

$$L^T = \frac{1}{\mu}\,C\Psi = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 1 \\ 1 & 2\sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sqrt{\frac{2}{3}} & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Durch Koeffizientenvergleich des charakteristischen Polynoms kann man die unbekannte Beobachterverstärkungsmatrix $L^T = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 \end{bmatrix}$ bestimmen. Das charakteristische Polynom berechnet sich durch:

$$\begin{aligned} \det\{sI - [A - LC]\} &= \det\left\{ \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\} \\ &= \det \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 1 & s \end{bmatrix} = s(s + l_1) + l_2 - 1 \\ &= s^2 + s \cdot l_1 + (l_2 - 1) \stackrel{!}{=} (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6\,. \end{aligned}$$

Damit ist $l_1 = 5$ und $l_2 = 7$, d.h. $L^T = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Aufgabe 7 (MULTIPLE-CHOICE) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (-1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

Im folgenden bezeichnen L: Kreisverstärkung, D: Kreisverstärkungsdifferenz, S: Sensitivität, T: komplementäre Sensitivität, ω_c: Durchtrittsfrequenz von L.

Für alle realen SISO-Regelsysteme gilt:

a) Je kleiner $\max_\omega |T(j\omega)|$, desto grösser ist der minimale Abstand der Nyquist-Kurve des aufgeschnittenen Regelkreises $L(j\omega)$ vom kritischen Punkt $(-1, 0j)$.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

b) Je grösser die Phasenreserve φ, desto grösser ist $\max_\omega |S(j\omega)|$.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

c) Man erhöht die Phasenreserve eines Regelsystems, indem man dessen Bandbreite erhöht.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

d) $\big||S(j\omega)| - |T(j\omega)|\big| \leq 0\,\mathrm{dB}\,, \quad \forall\ \omega \in [0, \infty)$.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

e) Falls $|D(j\omega)| = |1 + L(j\omega)| < 0\,\mathrm{dB}$ für $\omega \in [\omega_1, \omega_2] \Rightarrow$ Störungen $d(j\omega)$ mit $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$, die auf den Ausgang der Strecke wirken, werden durch den Regelkreis abgeschwächt.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

f) Falls $\max_\omega |T(j\omega)| > 3\,\mathrm{dB} \Rightarrow \omega_c > \sqrt{2}\,\mathrm{rad/s}$.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

g) Falls $\max_\omega |T(j\omega)| < 1.5\,\mathrm{dB}\,(\approx 1.2) \Rightarrow \max_\omega |S(j\omega)| < 7.6\,\mathrm{dB}\,(\approx 2.4)$.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

h) Falls $\max_\omega |S(j\omega)| = 1.5 \Rightarrow$ Die Verstärkungsreserve γ liegt mindestens im Bereich $0.6 < \gamma < 3$.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

Lösung 7

a) *Falsch.* Der geometrische Ort einer konstanten komplementären Sensitivität ist der Apolloniuskreis mit Zentrum $(-\frac{|T|^2}{|T|^2-1}, 0j)$ und Radius $\frac{|T|}{|T|^2-1}$. Da die Zentren der Apolloniuskreise nicht mit dem kritischen Punkt zusammenfallen, ist die Aussage falsch.

b) *Falsch.* Die Phasenreserve φ gibt lediglich Auskunft über den Punkt $L(j\omega)|_{|L(j\omega)|=1}$. Über den Verlauf von $L(j\omega)$ für grössere oder kleinere Frequenzen als die Durchtrittsfrequenz wird damit aber keine Aussage gemacht.

c) *Falsch.* Um die Phasenreserve eines Regelsystems zu erhöhen muss typischerweise die Bandbreite gesenkt werden.

d) *Richtig.* Aus der Beziehung $S(j\omega) + T(j\omega) = 1$ folgt, dass $|S(j\omega) + T(j\omega)| = 1$ ist und somit $\big||S(j\omega)| - |T(j\omega)|\big| \leq 1$ (=0 dB) gelten muss. Dies impliziert:

$$|T(j\omega)| - 1 \leq |S(j\omega)| \leq |T(j\omega)| + 1 \leq \max_\omega |T(j\omega)| + 1$$
$$|S(j\omega)| - 1 \leq |T(j\omega)| \leq |S(j\omega)| + 1 \leq \max_\omega |S(j\omega)| + 1\,.$$

e) *Falsch.* $|D(j\omega)| < 0\,\mathrm{dB}$ für $\omega \in [\omega_1, \omega_2] \;\Leftrightarrow\; |S(j\omega)| > 0\,\mathrm{dB}$ für $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Beträgt die Amplitude der Sensitivität in einem Frequenzintervall mehr als 1, werden in diesem Frequenzintervall Störungen am Ausgang der Strecke am Ausgang des Regelsystems verstärkt wahrgenommen.

f) *Falsch.* Aufgrund von $\max_\omega |T(j\omega)|$ kann im allgemeinen keine Aussage über die Durchtrittsfrequenz ω_c gemacht werden.

g) *Richtig.* Aus $\max_\omega |T(j\omega)| < 1.5\,\mathrm{dB} \approx 1.2$ folgt mit der Beziehung aus Teilaufgabe **d)**: $\max_\omega |S(j\omega)| \leq 1 + \max_\omega |T(j\omega)| < 2.2 < 2.4 \approx 7.6\,\mathrm{dB}$.

h) *Richtig.* Für $\max_\omega |S(j\omega)| = 1.5$ folgt aus der Beziehung,

$$\min\left\{1 - \frac{1}{\max_\omega |T(j\omega)|}\,,\ \frac{\max_\omega |S(j\omega)|}{\max_\omega |S(j\omega)|+1}\right\} < \gamma < \max\left\{1 + \frac{1}{\max_\omega |T(j\omega)|}\,,\ \frac{\max_\omega |S(j\omega)|}{\max_\omega |S(j\omega)|-1}\right\}\,,$$

dass mindestens gilt, $0.6 < \gamma < 3$.

Aufgabe 8 (MULTIPLE-CHOICE) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (-1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

a) Eine Totzeit ist ein lineares und unendlichdimensionales Element.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

b) Das SISO-System mit dem charakteristischen Polynom $5\,s^3+s^2-2\,s+17$ ist asymptotisch stabil.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

c) Der grösste Singularwert der Matrix $M=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ beträgt $\sigma_{max}\{M\}=\sqrt{3}$.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

d) Wenn die RGA-Matrix eines 2×2-Systems gleich der Einheitsmatrix ist, hat die erste Eingangsgrösse u_1 keinen Einfluss auf die zweite Ausgangsgrösse y_2 und die zweite Eingangsgrösse u_2 keinen Einfluss auf die erste Ausgangsgrösse y_1.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

e) Je hochfrequenter das Messrauschen, desto tiefer muss die Durchtrittsfrequenz des Regelsystems spezifiziert werden.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

f) Treten keine Modellunsicherheiten auf, so sind die Forderungen nach robuster Regelungsqualität („Robust Performance") und nomineller Regelungsqualität („Nominal Performance") äquivalent.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

g) $\Delta(s)$ sei eine beliebige Übertragungsfunktion, mit:

$$||\Delta(s)||\leq 1 \quad \text{und} \quad \arg\{\Delta(s)\}\in[-\pi,\pi]\,.$$

Für eine solche Übertragungsfunktion gilt:

$$\max_{\omega}\left\{\left|\frac{\Delta(j\omega)\Delta(j\omega)}{2+\Delta(j\omega)}\right|\right\}\leq 1$$

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

h) Eine Anti-Reset-Windup Schaltung setzt den Wert des Integrators im Regler zurück auf Null, sobald ein Aktuator in die Sättigung läuft.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

Lösung 8

a) *Richtig.*

b) *Falsch.* Ein System kann nur dann asymptotisch stabil sein, wenn alle Koeffizienten des charakteristischen Polynoms dasselbe Vorzeichen haben.

c) *Falsch.* Die Singularwerte der Matrix M berechnen sich zu $\sigma_{1,2}\{M\}=\sqrt{\lambda_{1,2}\{\bar{M}^T M\}}$. Man erhält: $\sigma_1=\sqrt{9}=3$, $\sigma_2=\sqrt{4}=2$. Der grösste Singularwert beträgt damit $\sigma_{max}\{M\}=3$.

d) *Falsch.* Wenn die RGA-Matrix gleich der Einheitsmatrix ist, heisst das nur, dass mindestens eine Kreuzkopplung des 2×2-Systems nicht vorhanden ist (bzw. höchstens eine Kreuzkopplung vorhanden ist).

e) *Falsch.* Das Messrauschen sei ein hochfrequentes Signal, dessen Spektrum auf Frequenzen $\omega>\omega_n$ beschränkt ist. Dann bildet die Frequenz ω_n eine obere Grenze für die erreichbare Durchtrittsfrequenz ($\omega_c<0.1\,\omega_n$), damit eine Verstärkung des Messrauschens im Regelsystem vermieden wird. Je höher die Frequenz des Messrauschens, desto höher kann also die Durchtrittsfrequenz spezifiziert werden.

f) *Richtig.* Für ein (hypothetisches) Modell ohne Unsicherheit verschwindet die Unsicherheitsschranke $W_2(s)$ identisch, und die Forderungen nach robuster Regelungsqualität und nomineller Regelungsqualität sind äquivalent.

g) *Richtig.* Der Ausdruck wird dann maximal, wenn der Nenner des Bruchs minimal wird. Dies geschieht, wenn die Phase und der Betrag von $\Delta(j\omega)$ so gewählt werden, dass gilt: $|2+\Delta(j\omega)|=2-|\Delta(j\omega)|=1$. Somit:

$$\max_{\omega}\left\{\left|\frac{\Delta(j\omega)\Delta(j\omega)}{2+\Delta(j\omega)}\right|\right\}=\left|\frac{1}{2-1}\right|\leq 1,\quad \forall\,|\Delta(j\omega)|\leq 1.$$

h) *Falsch.* Die-Anti-Reset-Windup Schaltung setzt den Wert des Integrators im Regler nicht auf Null, sondern sie stellt den Integrator so ein, dass die Summe aller (parallel geschalteten) Reglerelemente gleich der Sättigung wird.

Aufgabe 9 (MULTIPLE-CHOICE) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (-1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

a) Eine lineare Zustandsrückführung kann genau dann zu einem asymptotisch stabilen Regelsystem führen, wenn diejenigen Eigenwerte der Regelstrecke λ_i, für welche $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0$ gilt (d.h. die Eigenwerte in der offenen rechten Halbebene), verschiebbar sind.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

b) Die Lösung der Riccati-Gleichung für das SISO-System

$$\dot{x}(t) = -4x(t) + u(t)$$

mit dem Gütekriterium

$$J = \int_0^\infty [9\,x^2(t) + u^2(t)]\,dt$$

ist gleich $\Phi = 1$.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

c) Der Entwurfsparameter ρ im LQR-Problem mit $J = \int_0^\infty [x^T Q x + u^T(\rho \cdot I)u]\,dt$ stellt ein Mass für die Gewichtung der Steuerenergie dar. Je grösser ρ gewählt wird, desto grösser wird die Verstärkung des resultierenden Reglers.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

d) Für die Strecke

$$\dot{x}(t) = 3x(t) - 2u(t)$$

wurde ein LQR-Problem gelöst und die Reglermatrix ist $k = -4$. Die Kreisverstärkung des Regelsystems lautet demnach $L(s) = \frac{8}{s-3}$.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

e) Der LQR-Regler garantiert a priori, dass der statische Nachlauffehler, verursacht durch eine nicht messbare Störung, vollständig kompensiert wird.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

f) LTR-Verfahren ($L = \mathrm{lqr}(A^T, C^T, B_u B_u^T, \nu I)^T$): Wenn der Entwurfsparameter ν verkleinert wird, um die Kreisverstärkung des LQR-Reglers zu erreichen, wird das Regelsystem zwar robuster, aber die hochfrequenten Signale werden weniger unterdrückt.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

g) Rauschen, welches auf die Eingangssignale eines Zustandsbeobachters wirkt, stört den Schätzprozess nicht, da der Beobachter integrierendes Verhalten aufweist.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

h) Um mit MATLAB® die Stabilität eines LQR-Zustandsregler zu untersuchen, kann man die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreis mit `eig(K-A*B)` berechnen. (K: Matrix des Reglers, A, B: Systemmatrizen)

☐ Richtig.
☐ Falsch.

Lösung 9

a) *Falsch.* Auch die grenzstabilen Eigenwerte ($\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$) müssen verschiebbar sein.

b) *Richtig.* Da $a = -4$ und $b = 1$ ist, lauted die Riccati-Gleichung:

$$\Phi \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \Phi + \Phi \cdot 4 + 4 \cdot \Phi - 9 = \Phi^2 + 8\Phi - 9 = 0\,.$$

Es folgt, dass

$$\Phi_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 9}}{2} = -4 \pm 5 = (1; -9)\,.$$

$\Phi = 1$ ist die einzige positiv definite Lösung.

c) *Falsch.* Es ist genau umgekehrt, da ein grosser Bestrafungsterm im Gütekriterium bedeutet, dass die Steuerenergie „mehr" minimiert wird.

d) *Richtig.* Mit $a = 3$ und $b = -2$ lautet die Kreisverstärkung:

$$L(s) = k \cdot (s-a)^{-1} \cdot b = \frac{-4 \cdot (-2)}{s-3} = \frac{8}{s-3}\,.$$

e) *Falsch.* Der LQR-Regler besitzt kein integrierendes Verhalten.

f) *Richtig.*

g) *Falsch.* Ein Zustandsbeobachter hat differenzierendes Verhalten, und deswegen wird das Rauschen verstärkt.

h) *Falsch.* Die Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises werden mit `eig(A-B*K)` berechnet.