ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMRT Measurement and Control Laboratory
Prof. Dr. H. P. Geering
Prof. Dr. L. Guzzella

BSc - Sessionsprüfung **08. 03. 2007**

Regelungstechnik II (151-0590-00)

Prof. L. Guzzella

Musterlösung

Dauer der Prüfung:	**120 Minuten**
Anzahl der Aufgaben:	**7** (**unterschiedlich** gewichtet, total 63 Punkte)
Bewertung:	Für eine Note 6 müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Punktezahl angegeben. Viele Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar. Falsche Antworten bei den Multiple-Choice Aufgaben geben Punkteabzug. (Detaillierte Angaben sind bei den entsprechenden Aufgaben zu finden.)
Erlaubte Hilfsmittel:	20 A4-Blätter (**40 Seiten**) Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben, und es sind **keine elektronischen Hilfsmittel** erlaubt.
Zur Beachtung:	Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern. Zusatzblätter sind bei den Assistenten erhältlich.

Aufgabe 1 (Systemanalyse) **10 Punkte**

Gegeben sei das folgende lineare MIMO-System dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Ist das System vollständig steuerbar (*completely reachable*)?
Begründen Sie Ihre Aussage.

b) Ist das System vollständig beobachtbar (*completely observable*)?
Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Beurteilen Sie die Lyapunov-Stabilität des Systems.

d) Berechnen Sie das statische Übertragungsverhalten (Übertragungsmatrix $P(0)$) des gegebenen Systems vom Eingang $u(t)$ zum Ausgang $y(t)$.

e) Berechnen Sie die Singularwerte $\sigma_{min}\{P(j\omega_1)\}$ und $\sigma_{max}\{P(j\omega_1)\}$ der Übertragungsmatrix $P(s)$ für die Frequenz $\omega_1 = 0\,\text{rad/s}$.

f) Finden sie alle Fehler im untenstehenden MATLAB®-Code, markieren Sie diese und schreiben Sie rechts daneben die korrekte Version.

```
%--------------------------------------------------
   A = [ -2 0 3; 0 -5 0; 1 0 0]
   B = [ 1, 0; 0, 1; 0, 0]
   C = [ 0, 0, 3; 0, sqrt(2)*5, -3]
   D = [ 1-sqrt(2) 0; 0 0]

   R = ctrb(B,A)
   rank(R)

   O = obsv(A,c)
   rank(O)

   eig(A)

   P = ss(tf(A,B,C,D))

   w1 = 0;
   sv = sigma(P,w1)
%--------------------------------------------------
```

Lösung 1

a) Ein System $(A,\, B)$ ist genau dann vollständig steuerbar (*completely reachable*), wenn die Matrix $\mathcal{R}_n$ vollen Rang n hat,

$$\text{Vollständig steuerbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang}\big(\mathcal{R}_n = \big[B,\, A\cdot B,\, \cdots, A^{n-1}\cdot B\big]\big) = n.$$

Für das gegebene System ergibt sich:

$$\mathcal{R}_3 = [B,\, A\cdot B,\, A^2\cdot B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Offensichtlich[1] hat $\mathcal{R}_3$ vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{R}_3) = 3$), womit das gegebene System *vollständig steuerbar* ist.

b) Ein System $(A,\, C)$ ist genau dann vollständig beobachtbar (*completely observable*), wenn die Matrix $\mathcal{O}_n$ vollen Rang n hat,

$$\text{Vollständig beobachtbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang}\Big(\mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} C \\ C\cdot A \\ \vdots \\ C\cdot A^{n-1} \end{bmatrix}\Big) = n.$$

Die Matrix $\mathcal{O}_n$ berechnet sich für das gegebene System zu:

$$\mathcal{O}_3 = \begin{bmatrix} C \\ C\cdot A \\ C\cdot A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5\sqrt{2} & -3 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & -25\sqrt{2} & 0 \\ -6 & 0 & 9 \\ 6 & 125\sqrt{2} & -9 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Offensichtlich[2] hat $\mathcal{O}_3$ vollen Rang ($\text{Rang}(\mathcal{O}_3) = 3$), womit das gegebene System *vollständig beobachtbar* ist.

c) Für die Beurteilung der Stabilität des Systems werden die Eigenwerte von A, d.h. die Wurzeln des charakteristischen Polynoms berechnet.

$$\det(sI - A) = \det\Big(\begin{bmatrix} s+2 & 0 & -3 \\ 0 & s+5 & 0 \\ -1 & 0 & s \end{bmatrix}\Big)$$

$$= (s+5)\,[(s+2)\,s - 3] = (s+5)\,(s^2 + 2\,s - 3) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -5,\ \lambda_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+3} = 1, -3$$

Da ein Eigenwert positiven Realteil hat, ist das System *instabil.*

[1] Bereits die ersten drei Kolonnenvektoren von $\mathcal{R}_3$ sind linear unabhängig. (Auf die Berechnung von $A^2 \cdot B$ kann demnach verzichtet werden.)

[2] Bereits die ersten drei Zeilenvektoren von $\mathcal{O}_3$ sind linear unabhängig. (Auf die Berechnung von $C \cdot A^2$ kann demnach verzichtet werden.)

d) Für das gegebene dynamische System gilt stationär:

$$0 \equiv A\,x(t) + B\,u(t). \tag{3}$$

Da A regulär ist, kann für den stationären Zustandsvektor geschrieben werden

$$x(t) \equiv -A^{-1}\,B\,u(t). \tag{4}$$

Setzt man den Ausdruck für $x(t)$ in die Ausgangsgleichung des Systems ein, so erhält man für $y(t)$,

$$\begin{aligned} y(t) &\equiv C\,[-A^{-1}\,B\,u(t)] + D\,u(t) && (5)\\ &\equiv [D - C\,A^{-1}B]\,u(t) && (6) \end{aligned}$$

und damit die statische Verstärkung zu

$$P(0) = [D - C\,A^{-1}B]. \tag{7}$$

Mit den gegebenen Matrizen A, B, C, und D resultiert:

$$\begin{aligned} P(0) &= D - C \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot B \\ &= D - C \cdot \left(\frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ [15] & [0] & [10] \end{bmatrix}^{T} \right) \cdot B \\ &= D - C \cdot \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & [15] \\ 0 & -3 & [0] \\ 5 & 0 & [10] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= D - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{8}$$

Bemerkung: Die Übertragungsmatrix $P(s)$ berechnet sich zu

$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D\,. \tag{9}$$

Für das gegebene System gilt:

$$
\begin{aligned}
P(s) &= C \cdot \begin{bmatrix} s+2 & 0 & -3 \\ 0 & s+5 & 0 \\ -1 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot B + D \\
&= C \cdot \left(\frac{1}{\det(sI-A)} \cdot \begin{bmatrix} [s\,(s+5)] & 0 & s+5 \\ [0] & (s+2)\,s-3 & 0 \\ [3\,(s+5)] & [0] & [(s+2)\,(s+5)] \end{bmatrix}^T \right) \cdot B + D \\
&= \frac{1}{\det(sI-A)} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} [s\,(s+5)] & [0] & [3\,(s+5)] \\ 0 & (s+2)\,s-3 & [0] \\ s+5 & 0 & [(s+2)\,(s+5)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + D \\
&= \frac{1}{(s+5)\,(s^2+2\,s-3)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5\sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [s\,(s+5)] & [0] \\ 0 & s^2+2\,s-3 \\ s+5 & 0 \end{bmatrix} + D \\
&= \frac{1}{(s+5)\,(s^2+2\,s-3)} \cdot \begin{bmatrix} 3\,(s+5) & 0 \\ -3\,(s+5) & 5\sqrt{2}\,(s^2+2\,s-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{(1-\sqrt{2})\,s^2+(2-2\sqrt{2})\,s+3\sqrt{2}}{s^2+2\,s-3} & 0 \\ -\dfrac{3}{s^2+2\,s-3} & \dfrac{5\sqrt{2}}{s+5} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

e) Die Singularwerte $\sigma_i\{M\}$, $i = 1, \ldots, k$ einer Matrix M sind die positiven Quadratwurzeln der k grössten Eigenwerte $\lambda_i\{\bar{M}^T M\}$ der Hermiteschen Matrix $\bar{M}^T M$:

$$\sigma_i\{M\} = \sqrt{\lambda_i\{\bar{M}^T M\}} \qquad i = 1, \ldots, k\,. \tag{11}$$

Der grösste Singularwert wird mit $\sigma_{max}\{M\}$, der kleinste mit $\sigma_{min}\{M\}$ bezeichnet.

An der Stelle $s = j\omega_1$ mit $\omega_1 = 0\,\text{rad/s}$ wird die Übertragungsmatrix zu (vergleiche **d)**)

$$P(0) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Wendet man nun die Definition der Singularwerte auf die Matrix $P(0)$ an, so erhält man für die Singularwerte (mit Zwischenresultaten),

$$
\begin{aligned}
&\bar{P}(0)^T P(0) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix} \\
&(\lambda-3)\,(\lambda-2)-2 = \lambda^2-5\,\lambda+4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{max} = 4,\ \lambda_{min} = 1 \\
&\Rightarrow \quad \sigma_{max}\{P(0)\} = \sqrt{\lambda_{max}} = 2\,, \quad \sigma_{min}\{P(0)\} = \sqrt{\lambda_{min}} = 1\,.
\end{aligned}
$$

f) Das korrekte m-File enthält den folgenden Code:

```
%---------------------------------------------------
  A = [ -2 0 3; 0 -5 0; 1 0 0]
  B = [ 1, 0; 0, 1; 0, 0]
  C = [ 0, 0, 3; 0, sqrt(2)*5, -3]
  D = [ 1-sqrt(2) 0; 0 0]

  R = ctrb(A,B)
  rank(R)

  O = obsv(A,C)
  rank(O)

  eig(A)

  P = tf(ss(A,B,C,D))

  w1 = 0;
  sv = sigma(P,w1)
%---------------------------------------------------
```

Bemerkungen

Punkteverteilung: a) 1.25, b) 1.25, c) 1.5, d) 3, e) 2.25, f) 0.75.

Aufgabe 2 (Auslegung eines PID-Reglers) 10 Punkte

Für eine Strecke mit der Übertragungsfunktion

$$P(s) = \frac{8}{(s+2)^2}$$

soll ein PID-Regler,

$$C(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i\, s} + T_d\, s\right)$$

ausgelegt werden. Das resultierende Regelsystem (*closed-loop system*) soll die folgenden Spezifikationen erfüllen:

- Die Durchtrittsfrequenz der Kreisverstärkung (*crossover frequency*) soll bei $\omega_c = 2\,\mathrm{rad/s}$ liegen.
- Für den Betrag der Sensitivität bei der Durchtrittsfrequenz soll gelten: $|S(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Die Kreisverstärkung (*loop gain*) soll im Nyquist-Diagramm den Einheitskreis parallel zur imaginären Achse betreten.
- Es soll kein stationärer Regelfehler auftreten.

a) Skizzieren Sie qualitativ den spezifizierten Verlauf des offenen Regelkreises (*loop gain*) im Nyquist-Diagramm.
Tipp: Wo liegt $L(j\omega_c)$?

b) Bestimmen Sie die Parameter k_p, T_i, und T_d des Reglers.
Tipp: $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Lösung 2

a) Die Parameter des PID-Reglers werden gemäss den Formeln für die *analytischen Crossover-Spezifikationen* bestimmt. Aus den in der Aufgabenstellung gegebenen Übertragungsfunktionen $P(s)$ und $C(s)$ und den geforderten Eigenschaften des Regelsystems ergibt sich der in Abbildung 1 dargestellte, qualitative Verlauf von $L(j\omega)$ im Nyquist-Diagramm.

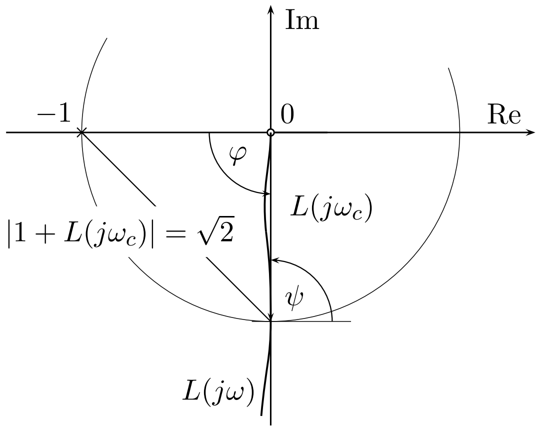


Abbildung 1: Skizze von $L(j\omega)$ und der Spezifikationen im Nyqusit-Diagramm

Die Werte für die Spezifikationsparameter lauten:

$$\omega_c = 2\,\text{rad/s}$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$
$$\psi = \frac{\pi}{2}\,\text{rad.}$$

Bemerkungen

- Aus der Bedingung für den Betrag der Sensitivität bei der Durchtrittsfrequenz,

  $$|S(j\omega_c)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{13}$$

  folgt:

  $$|1 + L(j\omega_c)| = \sqrt{2}. \tag{14}$$

  Damit kann durch geometrische Überlegungen (vergleiche Abbildung 1) die Phasenreserve φ bestimmt werden.

  $$\varphi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}\,\text{rad} \tag{15}$$

- Da die Kreisverstärkung den Einheitskreis parallel zur imaginären Achse betreten soll, beträgt der spezifizierte Steigungswinkel ψ,

  $$\psi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}\,\text{rad.} \tag{16}$$

- Die Forderung nach einem verschwindenden stationären Nachlauffehler ist automatisch erfüllt, da ein PID-Regler integrierendes Verhalten aufweist.
- Phase bei $\omega = 0$: Aufgrund einer Phasendrehung durch den I-Anteil des Reglers, resultiert bei der Frequenz $\omega = 0\,\text{rad/s}$ eine Phase von

  $$\angle L(j\omega)|_{\omega=0} = -\frac{\pi}{2}. \tag{17}$$

- Phase bei $\omega \to \infty$: Da es sich bei $P(s)$ um ein stabiles und minimalphasiges System handelt, läuft der Frequenzgang $P(j\omega)$ mit einer Phase von $-2 \cdot \frac{\pi}{2} = -\pi$ in den Ursprung. Der PID-Regler dreht den Frequenzgang um $\frac{\pi}{2}$ zurück, womit für $L(j\omega)$ der folgende Grenzwert resultiert:

  $$\lim_{\omega\to\infty} \angle L(j\omega) = -\frac{\pi}{2}. \tag{18}$$

b) Die für die Berechnung benötigten charakteristischen Grössen der Strecke lassen sich aus der gegebenen Übertragungsfunktion $P(s)$ herleiten:

$$|P(j\omega)| = 8\left(\frac{1}{|j\omega + 2|}\right)^2 = \frac{8}{4 + \omega^2}. \tag{19}$$

Bei der Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 2\,\text{rad/s}$ gilt:

$$r_P = |P(j\omega_c)| = \frac{8}{4 + 4} = 1. \tag{20}$$

Die Ableitung des Betrags nach der Frequenz ω folgt aus (19) zu

$$\frac{\partial}{\partial\omega}|P(j\omega)| = \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{8}{4+\omega^2}\right) = -\frac{16\,\omega}{(4+\omega^2)^2}. \tag{21}$$

Ausgewertet an der Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 2\,\mathrm{rad/s}$ erhält man:

$$r_P' = \left.\frac{\partial|P(j\omega)|}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_c} = -\frac{16\cdot 2}{(4+4)^2} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{s/rad}. \tag{22}$$

Für die Phase der Strecke gilt:

$$\arg\{P(j\omega)\} = 2\cdot\arg\left\{\frac{1}{j\omega+2}\right\} = 2\left[\arg\{1\} - \arg\{j\omega+2\}\right] = -2\,\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right). \tag{23}$$

Bei der Durchtrittsfrequenz hat die Strecke demnach die Phase

$$\varphi_P = \arg\{P(j\omega_c)\} = -2\,\arctan\left(\frac{2}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}. \tag{24}$$

Die Ableitung der Phase nach ω folgt aus (23) zu[3]

$$\frac{\partial\arg\{P(j\omega)\}}{\partial\omega} = -2\,\frac{\partial}{\partial\omega}\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) = -2\,\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}\,\frac{1}{2} = -\frac{4}{4+\omega^2}. \tag{25}$$

Ausgewertet an der Durchtrittsfrequenz $\omega_c = 2\,\mathrm{rad/s}$ erhält man:

$$\varphi_P' = \left.\frac{\partial\arg\{P(j\omega)\}}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_c} = -\frac{4}{4+4} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{s}. \tag{26}$$

Mit den Formeln für die analytischen Crossover-Spezifikationen können nun die drei Parameter des Reglers, k_p, T_i und T_d, berechnet werden.

$$\begin{aligned}
k_p &= -\frac{1}{r_P}\,\cos(\varphi-\varphi_P) = -1\cdot\cos(\pi) = 1\\
T_d &= \frac{1}{2}\left[\tan(\psi-\varphi_P)\left(\frac{r_P'}{r_P} - \varphi_P'\tan(\varphi-\varphi_P)\right) + \tan(\varphi-\varphi_P)\left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r_P'}{r_P}\right) - \varphi_P'\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\tan(\pi)\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\tan(\pi)\right) + \tan(\pi)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[0\cdot\Big(\dots\Big) + 0\cdot\Big(\dots\Big) + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4} = 0.25\,\mathrm{s}\\
T_i &= \left[T_d\,\omega_c^2 - \tan(\varphi-\varphi_P)\,\omega_c\right]^{-1} = \left[\frac{1}{4}\cdot 4 - 0\cdot 2\right]^{-1} = 1\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

Bemerkungen

Punkteverteilung: a) 2, b) 8.

[3] $\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Aufgabe 3 (Smith Prädiktor) 10 Punkte

Für die Regelung eines mit einer Totzeit behafteten Systems bieten sich prädiktive Methoden an. In Abbildung 2 ist das Simulink-Modell eines solchen Regelsystems dargestellt. Das abgebildete Regelsystem besteht aus einem prädiktiven Regler mit der Übertragungsfunktion $C(s)$ und einer totzeitbehafteten Strecke mit der Übertragungsfunktion $P(s)$.

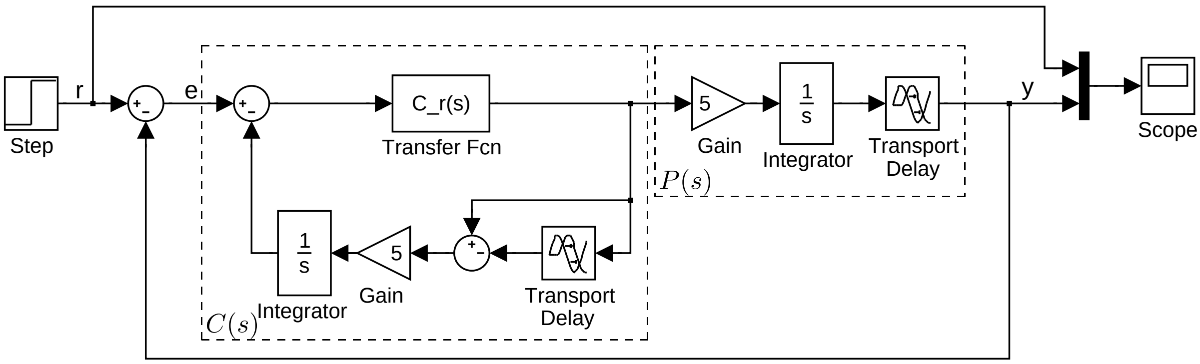


Abbildung 2: Simulink-Modell des Regelsystems

Dieses Regelsystem wurde in Simulink simuliert. Der zugehörige Plot des Scope-Blocks ist in Abbildung 3 dargestellt.

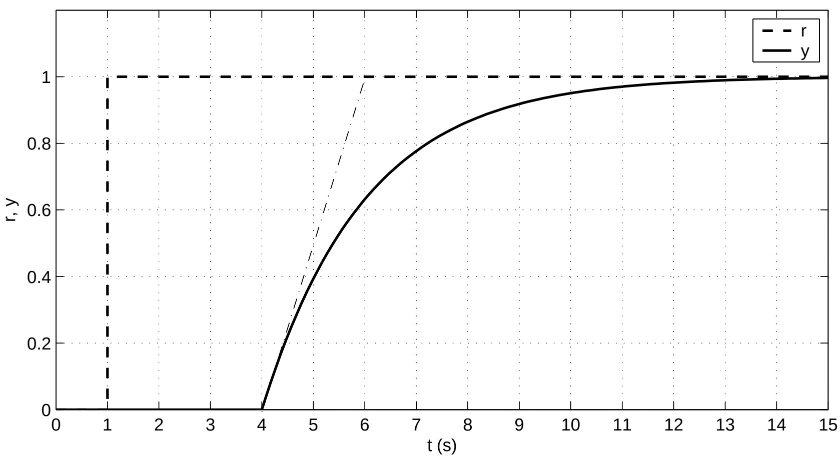


Abbildung 3: Plot des Scope-Blocks

a) Bestimmen Sie anhand der Daten aus Abbildung 3 die komplementäre Sensitivität $T(s)$ des Regelsystems (numerische Werte).

b) Leiten Sie aus der Übertragungsfunktion der komplementären Sensitivität $T(s)$ und der Übertragungsfunktion der Strecke $P(s)$ die Übertragungsfunktion $C(s)$ des Reglers her (numerische Werte).

c) Bestimmen Sie den Eintrag $C_r(s)$ des Transfer Fcn Blocks aus Abbildung 2 (numerische Werte).

Lösung 3

a) Der Anstieg der Systemantwort $y(t)$ bei $t = 4\,\mathrm{s}$ erfolgt entsprechend der Dynamik eines PT1-Elements. Aus den Daten der Abbildung 3 lässt sich die statische Verstärkung zu $k = 1$ und die Zeitkonstante des PT1-Elements zu $\tau = 2\,\mathrm{s}$ bestimmen. Weiter ist ersichtlich, dass die Sprungantwort $y(t)$ gegenüber dem Einganssprung $r(t)$ eine Totzeit-Verschiebung von $T = 3\,\mathrm{s}$ aufweist. Die Übertragungsfunktion der komplementären Sensitivität lautet demnach:

$$T(s) = \frac{k}{\tau\, s + 1}\, e^{-T\, s} = \frac{1}{2\, s + 1}\, e^{-3\, s}. \tag{27}$$

b) Der allgemeine Ausdruck für die komplementäre Sensitivität,

$$T(s) = \frac{P(s)\, C(s)}{1 + P(s)\, C(s)} \tag{28}$$

lässt sich nach der Übertragungsfunktion $C(s)$ des Reglers auflösen.

$$T(s) + T(s)\, P(s)\, C(s) - P(s)\, C(s) = 0 \tag{29}$$

$$T(s) = [1 - T(s)]\, P(s)\, C(s) \tag{30}$$

$$\Rightarrow\;\; C(s) = \frac{T(s)}{P(s)\,[1 - T(s)]} \tag{31}$$

Die Übertragungsfunktion $P(s)$ der Strecke lässt sich aus dem Simulink-Modell der Abbildung 2 und der Sprungantwort der Abbildung 3 bestimmen. $P(s)$ besteht demnach aus der Übertragungsfunktion $5 \cdot \frac{1}{s}$ in Serie mit einer Totzeit. Da in diesem System die Totzeit der Strecke gleich der Totzeit des Regelsystems ist, resultiert:

$$P(s) = \frac{5}{s}\, e^{-3\, s}. \tag{32}$$

Setzt man nun in (31) die Ausdrücke (27) und (32) ein, so erhält man

$$C(s) = \frac{\dfrac{1}{2\, s + 1}\, e^{-3\, s}}{\dfrac{5}{s}\, e^{-3\, s} \left(1 - \dfrac{1}{2\, s + 1}\, e^{-3\, s}\right)} = \frac{s}{5\,(2\, s + 1 - e^{-3\, s})}. \tag{33}$$

c) Aus dem Simulink-Modell der Abbildung 2 lässt sich die Übertragungsfunktion $C(s)$ des Reglers in Funktion seiner Subsysteme herleiten.

$$u = C_r(s)\, \tilde{e} \tag{34}$$

$$\tilde{e} = e - \frac{5}{s}\left(1 - e^{-3\, s}\right) u \tag{35}$$

$$\Rightarrow \quad u = C_r(s)\, e - C_r(s) \frac{5}{s}\left(1 - e^{-3\, s}\right) u \tag{36}$$

$$\Rightarrow \quad u\left[1 + C_r(s)\, \frac{5}{s}\left(1 - e^{-3\, s}\right)\right] = C_r(s)\, e \tag{37}$$

$$\Rightarrow \quad C(s) = \frac{u}{e} = \frac{C_r(s)}{1 + C_r(s)\, \dfrac{5}{s}\,(1 - e^{-3\, s})} \tag{38}$$

Setzt man (38) mit (33) gleich, so erhält man nach einigen Umformungen die Übertragungsfunktion $C_r(s)$.

$$\frac{C_r(s)}{1 + C_r(s)\,\frac{5}{s}\,(1 - e^{-3\,s})} = \frac{s}{5\,(2\,s + 1 - e^{-3\,s})} \tag{39}$$

$$5\,C_r(s)\left[2\,s + 1 - e^{-3\,s}\right] = s + 5\,C_r(s)\left[1 - e^{-3\,s}\right] \tag{40}$$

$$10\,s\,C_r(s) = s \tag{41}$$

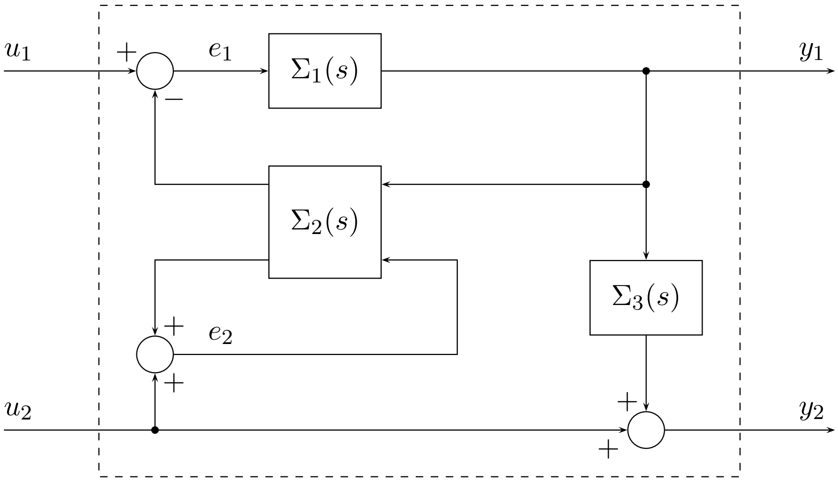
$$\Rightarrow\; C_r(s) = \frac{1}{10} = 0.1. \tag{42}$$

Bemerkungen

Punkteverteilung: a) 2.5, b) 3.5, c) 4.

Aufgabe 4 (MIMO-System) 8 Punkte

Gegeben sei das folgende MIMO-System:



bestehend aus den SISO-Subsystemen $\Sigma_1(s)$ und $\Sigma_3(s)$ und dem MIMO-Subsystem

$$\Sigma_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_{2b}(s) \\ \Sigma_{2c}(s) & \Sigma_{2d}(s) \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Übertragungsmatrix $\Sigma(s)$ des gegebenen Systems von $u = [u_1, u_2]^T$ nach $y = [y_1, y_2]^T$.
Bemerkung: zur Vereinfachung der Schreibweise müssen Sie das Argument "(s)" jeweils nicht explizit anschreiben.

b) Wie lautet die RGA-Matrix des gegebenen Systems, falls $\Sigma_{2b}(s) = 0$?

Lösung 4

a) Aus dem in der Aufgabenstellung gegebenen Signalflussbild ergeben sich direkt die folgenden Beziehungen:

$$y_1 = \Sigma_1\, e_1 \tag{43}$$
$$y_2 = \Sigma_3\, y_1 + u_2 \tag{44}$$
$$e_1 = u_1 - \Sigma_{2b}\, e_2 \tag{45}$$
$$e_2 = \Sigma_{2c}\, y_1 + \Sigma_{2d}\, e_2 + u_2. \tag{46}$$

Die implizite Gleichung (46) kann umgeformt werden in

$$e_2 = \frac{\Sigma_{2c}}{1 - \Sigma_{2d}}\, y_1 + \frac{1}{1 - \Sigma_{2d}}\, u_2. \tag{47}$$

Setzt man diese Beziehung nun in (45) und diese wiederum in (43) ein, so resultiert:

$$y_1 = \Sigma_1\, u_1 - \frac{\Sigma_1\, \Sigma_{2b}\, \Sigma_{2c}}{1 - \Sigma_{2d}}\, y_1 - \frac{\Sigma_1\, \Sigma_{2b}}{1 - \Sigma_{2d}}\, u_2. \tag{48}$$

Aufgelöst nach y_1 erhält man

$$y_1 = \frac{\Sigma_1\,(1-\Sigma_{2d})}{1-\Sigma_{2d}+\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\,\Sigma_{2c}}\,u_1 - \frac{\Sigma_1\,\Sigma_{2b}}{1-\Sigma_{2d}+\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\,\Sigma_{2c}}\,u_2. \tag{49}$$

Die Kombination von (44) und (49) ergibt die Input/Output-Beziehung für y_2 zu

$$y_2 = \frac{\Sigma_3\,\Sigma_1\,(1-\Sigma_{2d})}{1-\Sigma_{2d}+\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\,\Sigma_{2c}}\,u_1 + \frac{-\Sigma_3\,\Sigma_1\,\Sigma_{2b}+1-\Sigma_{2d}+\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\,\Sigma_{2c}}{1-\Sigma_{2d}+\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\,\Sigma_{2c}}\,u_2. \tag{50}$$

Für die Übertragungsmatrix von $u=[u_1,u_2]^T$ nach $y=[y_1,y_2]^T$ erhält man schliesslich

$$\Sigma = \frac{1}{1-\Sigma_{2d}+\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\,\Sigma_{2c}}\cdot\begin{bmatrix}\Sigma_1\,(1-\Sigma_{2d}) & -\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\\ \Sigma_1\,\Sigma_3\,(1-\Sigma_{2d}) & 1-\Sigma_{2d}+\Sigma_1\,\Sigma_{2b}\,(\Sigma_{2c}-\Sigma_3)\end{bmatrix}. \tag{51}$$

b) Setzt man $\Sigma_{2b}=0$, so degeneriert die Übertragungsmatrix Σ zu

$$\Sigma = \frac{1}{1-\Sigma_{2d}}\cdot\begin{bmatrix}\Sigma_1\,(1-\Sigma_{2d}) & 0\\ \Sigma_1\,\Sigma_3\,(1-\Sigma_{2d}) & 1-\Sigma_{2d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0\\ \Sigma_1\,\Sigma_3 & 1\end{bmatrix}. \tag{52}$$

Für $\Sigma_{2b}=0$ ist die Übertragungsmatrix Σ eine Dreiecksmatrix. Die RGA-Matrix einer Dreiecksmatrix ist immer die Identitätsmatrix; daher:

$$\mathrm{RGA} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{53}$$

Bemerkungen

Punkteverteilung: a) 5, b) 3.

Aufgabe 5 (LQR-Problem) 10 Punkte

Für eine Regelstrecke 2. Ordnung, welche durch das folgende Zustandsraummodell gegeben ist,

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = 2\,x_1(t) + 3\,x_2(t) + u(t)$$

wurde ein LQ-Regulator entworfen. Das zu minimierende Gütekriterium wurde wie folgt angesetzt:

$$\begin{aligned} J(x(t), u(t)) &= \int_0^\infty \left[x^T(t)\,Q\,x(t) + u^T(t)\,R\,u(t)\right] dt \\ &= \int_0^\infty \left[24\,x_1^2(t) + 6\,x_1(t)\,x_2(t) + 8\,x_2^2(t) + \rho\,u^2(t)\right] dt. \end{aligned}$$

Die resultierende optimale Zustandsrückführung (*optimal state-feedback*) ist gegeben durch:

$$u(t) = -6\,x_1(t) - 8\,x_2(t).$$

a) Bestimmen Sie die Gewichtungsmatrix $Q = Q^T$ des Regulatorproblems (numerische Werte).

b) Bestimmen Sie den Gewichtungsfaktor ρ des Gütekriteriums, welcher für den Reglerentwurf verwendet wurde (numerischer Wert).

c) Zeigen Sie, dass das resultierende Regelsystem asymptotisch stabil ist.

Lösung 5

a) Setzt man die Gewichtungsmatrix $Q = Q^T$ in allgemeiner Form an, so lässt sich die Zustands-Gewichtung schreiben als

$$\begin{aligned} x^T(t)\,Q\,x(t) &= x^T(t) \begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix} x(t) && (54) \\ &= q_1\,x_1^2(t) + 2\,q_3\,x_1(t)\,x_2(t) + q_2\,x_2^2(t). && (55) \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich im Gütekrterium ergibt dann:

$$q_1\,x_1^2(t) + 2\,q_3\,x_1(t)\,x_2(t) + q_2\,x_2^2(t) \stackrel{!}{=} 24\,x_1^2(t) + 6\,q_3\,x_1(t)\,x_2(t) + 8\,x_2^2(t) \quad (56)$$

$$\Rightarrow \quad q_1 = 24,\; q_2 = 8,\; q_3 = 3 \quad (57)$$

$$\Rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

b) Beim LQ-Regulator lautet das optimale Regelgesetz

$$u(t) = -K\,x(t) \quad (59)$$

mit

$$K = R^{-1}\,B^T\,\Phi \quad (60)$$

wobei $\Phi = \Phi^T$ die einzige positiv-definite und stabilisierende Lösung der folgenden Matrix Riccati Gleichung ist:

$$\Phi\, B\, R^{-1}\, B^T\, \Phi - \Phi\, A - A^T\, \Phi - Q = 0. \tag{61}$$

Im vorliegenden Fall ist die Gewichtung des Stellsignals skalar und es gilt

$$R = \rho. \tag{62}$$

Zudem ist die Matrix der Zustandsrückführung bekannt und gegeben durch

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Die Systemmatrizen A und B des gegebenen dynamischen Systems lauten

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{64}$$

Das Vorgehen zur Bestimmung von ρ ist nun wie folgt:

- alle aus der Aufgabenstellung bekannten Terme in die Matrix Riccati Gleichung (61) einsetzen;
- den resultierenden Ausdruck nach ρ auflösen.

Die Beziehung (60) lässt sich unter Berücksichtigung von (62) und (63) umformen in

$$B^T\, \Phi = \rho\, K = \rho\, \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Für den Term $\Phi\, B$ aus der Riccati Gleichung gilt aufgrund von (65) und der Symmetrie von Φ,

$$\Phi\, B = (B^T\, \Phi^T)^T = (B^T\, \Phi)^T = \rho\, \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}. \tag{66}$$

Für die Lösung

$$\Phi = \Phi^T = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_3 \\ \phi_3 & \phi_2 \end{bmatrix} \tag{67}$$

der Riccati Gleichung lässt sich aus (65) die folgende Information ableiten:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_3 \\ \phi_3 & \phi_2 \end{bmatrix} = \rho\, \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & 6\,\rho \\ 6\,\rho & 8\,\rho \end{bmatrix} \tag{69}$$

Setzt man nun (69), (66) und (65) in die Riccati Gleichung (61) ein, so erhält man

$$\rho \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \rho^{-1} \cdot \rho \cdot \begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_1 & 6\,\rho \\ 6\,\rho & 8\,\rho \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 & 6\,\rho \\ 6\,\rho & 8\,\rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{70}$$

Wertet man (70) für die Komponente $(1, 1)$ aus, so resultiert eine Gleichung für ρ, aus der sich der Wert für ρ bestimmen lässt.

$$36\,\rho - 12\,\rho - 12\,\rho - 24 = 0 \tag{71}$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{24}{12} = 2. \tag{72}$$

c) Das resultierende Regelsystem ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte λ_i von $[A - B\,K]$ negativen Realteil haben.

$$\det([\lambda\, I - (A - B\,K)]) = \det(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 4 & \lambda + 5 \end{bmatrix}) = \lambda^2 + 5\,\lambda + 4 \overset{!}{=} 0 \tag{73}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = -1,\ -4 \tag{74}$$

Das resultierende Regelsystem ist somit asymptotisch stabil.

Bemerkungen

Punkteverteilung: a) 1.5, b) 6.5, c) 2.

Aufgabe 6 (MULTIPLE-CHOICE) 7.5 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht zu begründen**. Alle Fragen sind gleich gewichtet (**1.5 Punkte**). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (**−1.5 Punkte**). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

a) Für jedes SISO-Regelsystem mit einer Phasenreserve von $\varphi = 60°$ gilt:

$$\max_{\omega}\{|S(j\omega)|\} \leq 1.$$

☐ Richtig.
☐ Falsch.

b) In einem SISO-Regelsystem sei $\mu = \min_{\omega}\{|1 + L(j\omega)|\} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dieses System hat eine Verstärkungsreserve von mindestens

$$\frac{3}{3+\sqrt{3}} < \gamma < \frac{3}{3-\sqrt{3}}.$$

☐ Richtig.
☐ Falsch.

c) Wenn ein Regler $C(s)$ die Bedingung für nominelle Regelgüte (*nominal performance condition*) erfüllt, so erfüllt er automatisch auch die Bedingung für robuste Regelgüte (*robust performance condition*).

☐ Richtig.
☐ Falsch.

d) Jedes SISO-Regelsystem erfüllt bei der Durchtrittsfrequenz $\omega_c = \{\omega \,|\, |L(j\omega)| = 0\,\mathrm{dB}\}$ die folgende Relation:

$$|S(j\omega_c)| = |T(j\omega_c)| = \frac{1}{2}.$$

☐ Richtig.
☐ Falsch.

e) Für ein SISO-System mit der Übertragungsfunktion $P(s)$ ist der Amplitudengang $|P(j\omega)|$ für alle $\omega \in [0, \infty)$ gleich dem Singularwertverlauf $\sigma\{P(j\omega)\}$.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

Lösung 6

a) *Falsch.* Die alleinige Kenntnis der Pasenreserve erlaubt keine Aussage über den minimalen Abstand der Nyquistkurve vom kritischen Punkt $(-1, 0j)$.

b) *Richtig.* Die Grösse

$$\mu = \min_{\omega}\{|1 + L(j\omega)|\} = \frac{1}{S_{max}} \quad \text{mit} \quad S_{max} = \max_{\omega}\{|S(j\omega)|\} \tag{75}$$

beschreibt den minimalen Abstand der Nyquistkurve vom kritischen Punkt $(-1, j\omega)$. Bestimmt man S_{max} aus dem gegebenen Wert für μ und wertet die Beziehung

$$\frac{S_{max}}{S_{max}+1} < \gamma < \frac{S_{max}}{S_{max}-1} \tag{76}$$

aus, so erhält man die angegebene Verstärkungsreserve.

c) *Falsch.* Die robuste Regelgüte garantiert nominelle Regelgüte; jedoch im allgemeinen (wenn Modellunsicherheiten vorhanden sind) nicht umgekehrt.

d) *Falsch.* Bei der Durchtrittsfrequenz gilt

$$|T(j\omega_c)| = \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + L(j\omega_c)|} = |S(j\omega_c)| \tag{77}$$

hingegen ist im allgemeinen $|1 + L(j\omega_c)| \neq 2$.

e) *Richtig.* Die Aussage folgt direkt aus der Definition der Singularwerte. Für $P(j\omega) \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ gilt:

$$\sigma\{P(j\omega)\} = +\sqrt{\text{eig}\{\bar{P}(j\omega)^T\, P(j\omega)\}} = +\sqrt{|P(j\omega)|^2} = |P(j\omega)|. \tag{78}$$

Aufgabe 7 (MULTIPLE-CHOICE) 7.5 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht zu begründen**. Alle Fragen sind gleich gewichtet (**1.5 Punkte**). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (**−1.5 Punkte**). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

a) Der folgende MATLAB®-Code liefert als Resultat `K = 4`.

```
%------------------------------
  A = 3;
  B = 2;
  syspole= -5;
  K = place(A,B,syspole);
  K
%------------------------------
```

☐ Richtig.
☐ Falsch.

b) Der folgende MATLAB®-Code liefert als Resultat `K = -1`.

```
%------------------------------
  A = 4;
  b = 2;
  Q = 5;
  r = 1;
  K = lqr(A,b,Q,r);
  K
%------------------------------
```

☐ Richtig.
☐ Falsch.

c) Ein mit einem LQ-Regulator geregeltes SISO-System weist eine Phasenreserve von mindestens 60° und eine Verstärkungsreserve von mindestens $0.5 < \gamma < \infty$ auf.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

d) Für das dynamische System $\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$ soll ein LQR-Problem mit dem Gütekriterium $J = \int_0^\infty [x^T(t)\,Q\,x(t) + u^T(t)(\rho \cdot I)\,u(t)]\,dt$ gelöst werden. Ein Regulator resultierend aus einem Entwurf mit $\rho \ll 1$ unterdrückt Anfangsauslenkungen $x(0)$ schneller als ein Regulator resultierend aus einem Entwurf mit $\rho \gg 1$.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

e) Wenn in einem Zustandsregler $u(t) = -K\,x(t)$ anstelle des wahren Zustandsvektors $x(t)$ der Zustandsvektor $\hat{x}(t)$ eines linearen Zustandsbeobachters eingesetzt wird, so ist das resultierende Regelsystem genau dann asymptotisch stabil, wenn sowohl die Strecke mit Zustandsregelung für sich allein, als auch der Beobachter für sich allein asymptotisch stabil sind.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

Lösung 7

a) *Richtig.* Der Code berechnet einen Zustandsregler nach der Methode des "Eigenvalue Placements:"

$$\det(s\,I - [A - B\,K]) = \det(s\,I - [3 - 2\,K]) = s - 3 + 2\,K \stackrel{!}{=} 0 \tag{79}$$

$$\Rightarrow\ K = \frac{3-s}{2} = 4 \quad \text{für die Polvorgabe bei} \quad s = -5. \tag{80}$$

b) *Falsch.* Im vorliegenden "skalaren Fall" lässt sich die (positive) Lösung der Riccati Gleichung berechnen als

$$\Phi = \frac{r}{b^2}\left[A + \sqrt{A^2 + \frac{b^2}{r}\,Q}\right] = 2.5. \tag{81}$$

Für die Rückführmatrix K folgt dann:

$$K = \frac{b}{r}\,\Phi = 5. \tag{82}$$

c) *Richtig.* Die Aussage folgt direkt aus der Beziehung $\mu_{LQR} = \min_{\omega}\{|1 + L_{LQR}(j\omega)|\} = 1$.

d) *Richtig.* Mit $\rho \ll 1$ wird die Stellenergie wenig bestraft ("cheap control"), womit schnellere Transienten (aber auch grössere Stellsignale) resultieren.

e) *Richtig.* Dies ist die Aussage des Separations-Theorems (*separation principle*).