Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

IMRT Measurement and Control Laboratory
Prof. Dr. H. P. Geering
Prof. Dr. L. Guzzella

BSc - Sessionsprüfung 6.9.2007

Regelungstechnik II (151-0590-00)

Prof. Dr. L. Guzzella

Musterlösung

Dauer der Prüfung: **120 Minuten**

Anzahl der Aufgaben: **8** (**unterschiedlich** gewichtet, total 64 Punkte)

Bewertung: Um die Note 6 zu erlangen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben.

Falsche Antworten bei den Multiple-Choice Aufgaben geben Punkteabzug. (Detaillierte Angaben sind bei den entsprechenden Aufgaben zu finden.)

Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Blätter (**40 Seiten**)

Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben, und es sind **keine elektronischen Hilfsmittel** erlaubt.

Zur Beachtung: Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern.

Aufgabe 1 (Auslegung PID-Regler und MATLAB®/SIMULINK®) 10 Punkte

Bem: Bei dieser Aufgabe sind die Teilaufgaben **a)** und **b)** unabhängig voneinander lösbar.

Die folgende Abbildung zeigt in der linken Spalte das Bode Diagramm der Strecke $P(s)$. Für diese Strecke wurde aufgrund von vorgegebenen Spezifikationen im Durchtrittsbereich (closed-form cross-over specifications) ein Regler $C(s)$ ausgelegt. Die rechte Spalte der Abbildung zeigt das Bode Diagramm der resultierenden Kreisverstärkung (loop gain) L des Regelsystems.[1]

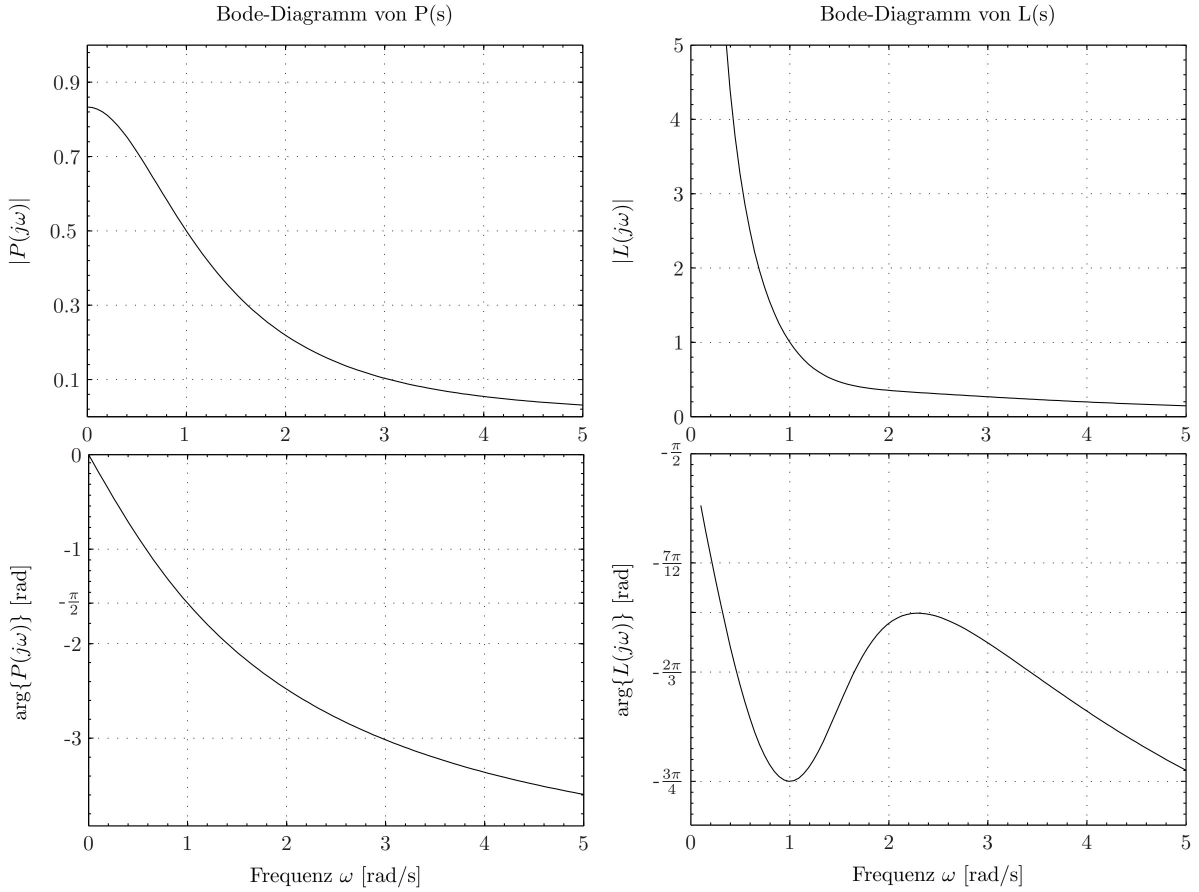


Abbildung 1: Bode-Diagramme mit linear skalierter Frequenzachse.

a) i) Was hat der Regler $C(s)$ für eine Struktur: P, PI, PD oder PID? Begründen Sie Ihre Antwort!

ii) Bestimmen Sie die Reglerparameter des Reglers $C(s)$. Tipp: Machen Sie zuerst eine Abschätzung der Grössen ω_c, φ, φ_P, φ'_P, r_P, r'_P und ψ anhand der Diagramme in Abbildung 1.

b) Gegeben sei ein Regelsystem (unabhängig von Teilaufgabe **a)**) mit einem PID-Regler $C(s)$ und der Regelstrecke (plant) $P(s)$. Um einen "guten" Roll-off zu erzielen, wird der PID-Regler mit einem Tiefpass erster Ordnung mit einer Eckfrequenz von 10 rad/s erweitert. Der erweiterte Regler soll nun mit MATLAB®/SIMULINK® bezüglich eines Einheitssprungs der Sollgrösse numerisch optimiert werden. Zu diesem Zweck wurde folgendes SIMULINK®-Modell mit dem Namen `optiSys.mdl` erzeugt:

[1]Beachten Sie, dass die Frequenzachsen im Bodediagramm *linear* skaliert sind.

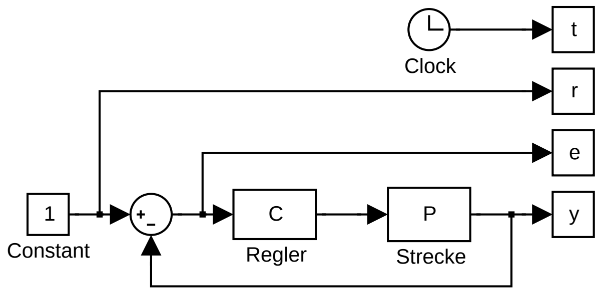


Abbildung 2: SIMULINK®-*Modell "`optiSys.mdl`" des Regelsystems. Die Signale t, r, e und y stehen nach dem Simulationsende im* MATLAB®-*Workspace als gleichnamige Arrays der Länge N zur Verfügung.*

Das Gütekriterium J, welches minimiert werden soll, soll den maximalen Überschwinger (overshoot) von der Ausgangsgrösse y sowie die Summe der Quadrate der Regelfehler e im Verhältnis 2:1 gewichten. Andere Kriterien werden **nicht** ins Gütekriterium miteinbezogen.

Vervollständigen Sie die zwei folgenden MATLAB®-Skripte so, dass der Regler bezüglich des Gütekriteriums J und einer Simulationsdauer von 15 s (numerisch) optimiert wird. Wählen Sie 1 als Startwert für alle Reglerparameter. Als Optimierungsroutine soll dabei `fminsearch` verwendet werden. Sie müssen nur die angegebenen Linien ergänzen. Verwenden Sie exakte MATLAB®-Syntax!

```
%start mfile 1------------------------------------------------------------------

global    C Cr                          % Variablen global verfuegbar machen.

pC0     = ............................  % Vektor mit Startwerten fuer Regler-
                                        % parameter. Alle Startwerte sind 1.
Cr      = tf(.........................)% Tiefpass mit Eckfrequenz 10 rad/s fuer
                                        % Roll-off.
Cp_opt  = fminsearch(@opti,pC0);        % Optimierung mit fminsearch.
%stop mfile 1-------------------------------------------------------------------

%start mfile 2------------------------------------------------------------------

function J = opti(pC)

global    C Cr                          % Variablen global verfuegbar machen.

Cn      = tf(.................................................................)
                                        % PID-Regler (ohne Roll-off) aufstellen.

C       = ............................  % Gesamter Regler mit Roll-off

          ............................  % Simulinkmodell fuer 15s simulieren.

J       = ............................  % Guetekriterium: Maximaler Overshoot von
                                        % y und Summe der Regelfehlerquadrate im
                                        % Verhaeltnis 2:1.
%stop mfile 2-------------------------------------------------------------------
```

Lösung 1

a) i) Es handelt sich um einen PID-Regler.

- Anstieg der Verstärkung von L(s) für tiefe Frequenzen → I-Teil
- Anhebung der Phase von L(s) → D-Teil

ii) Die für die Berechnung benötigten charakteristischen Grössen der Strecke lassen sich grafisch aus dem gegebenen Bode-Diagramm für $P(s)$ bestimmen (vergleiche Abbildung 3):

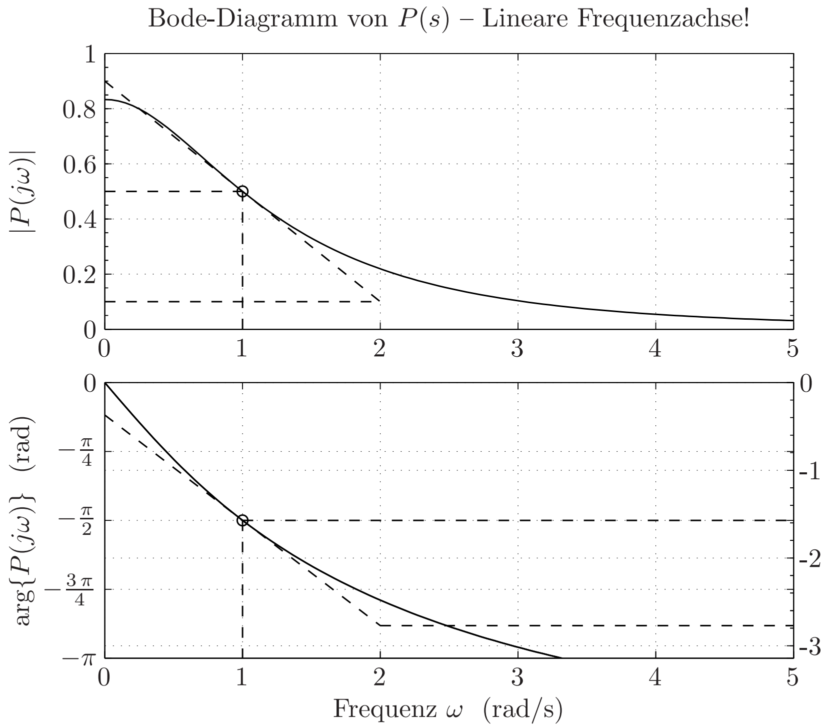


Abbildung 3: Bestimmung der charakteristischen Grössen der Strecke aus dem Bode-Diagramm

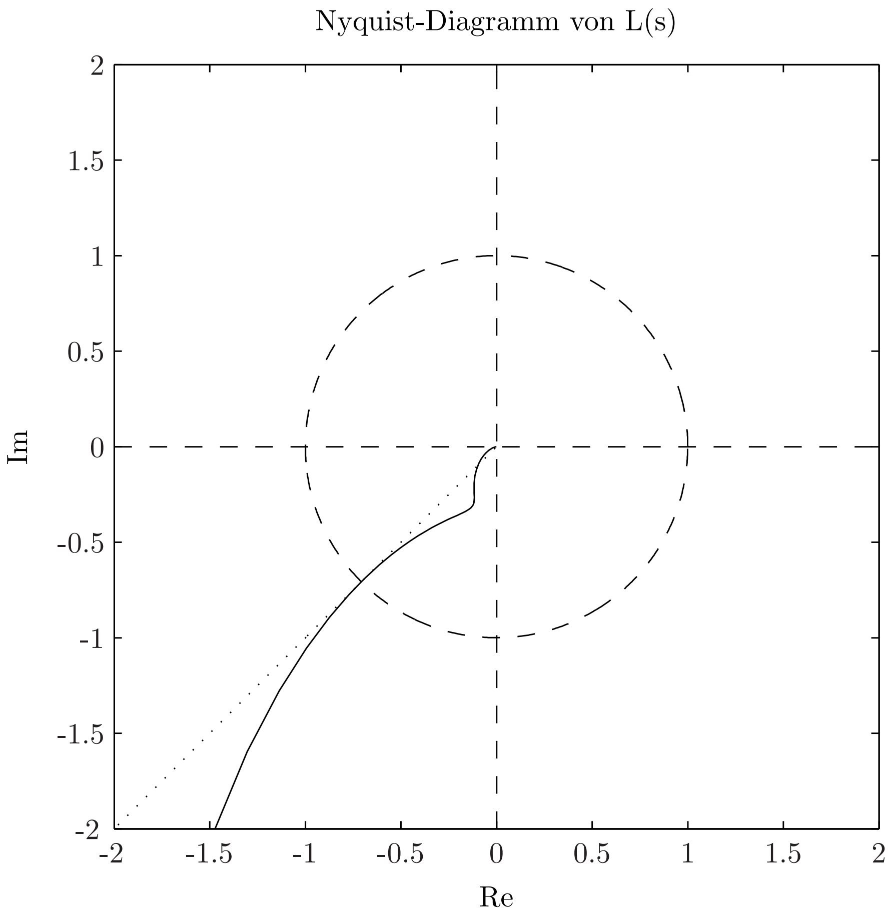
$$r_P = |P(j\omega_c)| \approx \frac{1}{2}$$

$$r'_P = \left.\frac{\partial |P(j\omega)|}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_c} \approx -\frac{0.4}{1} = -\frac{2}{5}\,\text{s/rad}$$

$$\varphi_P = \arg\{P(j\omega_c)\} \approx -\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$$

$$\varphi'_P = \left.\frac{\partial \arg\{P(j\omega)\}}{\partial \omega}\right|_{\omega=\omega_c} \approx -\frac{1.2}{1} = -\frac{6}{5}\,\text{s.}$$

Die spezifizierten Grössen Durchtrittsfrequenz ω_c, Phasenreserve φ und Eintrittswinkel ψ lassen sich ebenfalls grafisch aus dem Bode-Diagramm der Kreisverstärkung bestimmen. Die Durchtrittsfrequenz ist gemäss Amplitudengang $\omega_c = 1$ rad/s und die Phasenreserve gemäss Phasengang $\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad. Da die Phase im Durchtrittsbereich eine Steigung von 0 hat (horizontale Tangente), muss die Nyquistkurve konzentrisch zum Ursprung eintreten, d.h. $\psi = \frac{\pi}{4}$ rad.



Mit den Formeln für die analytischen Crossover-Spezifikationen können nun die drei Parameter des Reglers, k_p, T_i und T_d, berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
k_p &= -\frac{1}{r_P}\cos(\varphi-\varphi_P) \approx -2\cos(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \\
T_d &= \frac{1}{2}\left[\tan(\psi-\varphi_P)\left(\frac{r_P'}{r_P}-\varphi_P'\tan(\varphi-\varphi_P)\right)+\tan(\varphi-\varphi_P)\left(\frac{1}{\omega_c}-\frac{r_P'}{r_P}\right)-\varphi_P'\right] \\
&\approx \frac{1}{2}\left[\tan(\frac{3\pi}{4})\ \left(-\frac{4}{5}+\frac{6}{5}\ \tan(\frac{3\pi}{4})\right)+\tan(\frac{3\pi}{4})\,\frac{9}{5}+\frac{6}{5}\right] = \frac{7}{10}, \mathrm{s} = 0.7\,\mathrm{s} \\
T_i &= \left[T_d\,\omega_c^2 - \tan(\varphi-\varphi_P)\,\omega_c\right]^{-1} \approx \left[\frac{7}{10}-\tan(\frac{3\pi}{4})\right]^{-1} = \frac{10}{17}\,\mathrm{s} \approx 0.588\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

b) Der Code lautet zum Beispiel:

```
%-------------------------------
  % mfile 1
  global C Cr
  pC0 = [1,1,1];
  Cr = tf(10,[1,10]);
  Cp_opt = fminsearch(@opti,pC0)
%-------------------------------
  % mfile 2
  function J = opti(pC)
  global C Cr
  Cn = tf([pC(1)*pC(2)*pC(3),pC(1)*pC(2),pC(1)],[pC(2) 0]);
  C = Cn*Cr;
  sim('optiSys',15);
  J = e'*e+2*max(y-1);
%-------------------------------
```

Bemerkungen

Punkteverteilung: a) i) 2, a) ii) 5, b) i) 3

Aufgabe 2 (Systemanalyse eines MIMO-Systems) 10 Punkte

Gegeben sei das folgende dynamische System dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) - x_3(t) - u_1(t) - 2u_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) + 3x_2(t) - 2u_1(t)\\ \dot{x}_3(t) &= x_1(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x_3(t) - u_1(t)\\ y_2(t) &= x_1(t) - 3x_3(t)\,.\end{aligned}$$

a) Beurteilen Sie die Stabilität des gegebenen Systems.

b) Die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ und die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ des Systems lauten wie folgt:

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -4 & -3 & -6\\ -2 & 0 & -4 & 4 & -8 & 20\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Ist das System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $P(s)$ des gegebenen Systems.

d) Schreiben Sie die Matlab-Befehle für die Berechnung der Punkte **a** bis **c** (Stabilität, Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Übertragungsfunktion).

Lösung 2

Das in der Aufgabe gegebene lineare System kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\,,\end{aligned}$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2\\ -2 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Für die Beurteilung der Stabilität des Systems werden die Eigenwerte von A, d.h. die Wurzeln des charakteristischen Polynoms berechnet.

$$\det(sI - A) = \det\left(\begin{bmatrix} s-2 & 0 & 1\\ 2 & s-3 & 0\\ -1 & 0 & s \end{bmatrix}\right) = (s-2)(s-3)s + (s-3) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \text{ (doppelt)}\,, \ \lambda_3 = 3$$

Da alle Eigenwerte positiven Realteil haben, ist das System *nicht stabil.*

b) Das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ vollen Rang hat, Im vorliegenden Fall ergibt sich für die Steuerbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{R} = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 & -4 & -3 & -6 \\ -2 & 0 & -4 & 4 & -8 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich hat $\mathcal{R}$ vollen Rang, $\text{Rang}(\mathcal{R}) = 3$. Das System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ vollen Rang hat,

$$\text{Vollständig beobachtbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang}\big(\mathcal{O} = [C^T, A^T \cdot C^T, \ldots, (A^T)^{n-1} \cdot C^T]^T\big) = n\,.$$

Im vorliegenden Fall lautet die Beobachtbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{O} = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Offensichtlich hat $\mathcal{O}$ nicht vollen Rang, $\text{Rang}(\mathcal{O}) = 2 < 3$.

c) Die Übertragungsmatrix $P(s)$ eines MIMO-Systems wird analog zur Übertragungsfunktion eines SISO-Systems berechnet,

$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D\,.$$

Für das gegebene System ergibt sich,

$$\begin{aligned}
P(s) &= C \cdot \begin{bmatrix} s-2 & 0 & 1 \\ 2 & s-3 & 0 \\ -1 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot B + D \\
&= C \cdot \left(\frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} (s-3)s & -2s & (s-3) \\ 0 & s(s-2)+1 & 0 \\ (s-3) & 2 & (s-2)(s-3) \end{bmatrix}^T \right) \cdot B + D \\
&= \frac{1}{(s-1)^2(s-3)} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} (s-3)s & 0 & (s-3) \\ -2s & s(s-2)+1 & 2 \\ (s-3) & 0 & (s-2)(s-3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + D \\
&= \frac{1}{(s-1)^2(s-3)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -(s-3)s & -2(s-3)s \\ 2s - 2s(s-2) - 2 & 4s \\ -(s-3) & -2(s-3) \end{bmatrix} + D \\
&= \frac{1}{(s-1)^2(s-3)} \cdot \begin{bmatrix} -(s-3) & -2(s-3) \\ -(s-3)s + 3(s-3) & -2(s-3)s + 6(s-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{-s^2+2s-2}{s^2-2s+1} & \dfrac{-2}{s^2-2s+1} \\[2ex] \dfrac{-s+3}{s^2-2s+1} & \dfrac{-2s+6}{s^2-2s+1} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

d) Die nachfolgende Tabelle zeigt die Zuordnung der Befehle.

Teilaufgabe	**a)**	**b)**	**c)**
Matlab-Befehle	`eig`	`ctrb`, `obsv`, `rank`	`ss`, `tf`

Aufgabe 3 (LQR) **7 Punkte**

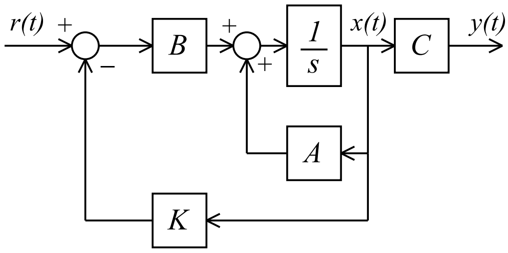


Abbildung 4: LQR Struktur

Betrachten Sie die Systemgleichungen

$$\dot{x}_1(t) = -x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)\,.$$

Eine Firma braucht einen LQ-Regulator (LQR) für dieses System. Sie erhalten den Auftrag erst im Tram, wenn Sie zu dieser Firma fahren. Unglücklicherweise sind die Batterien Ihres Laptops leer.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte des Systems. Ist das System asymptotisch stabil?

b) Berechnen Sie die die Zustandsrückführmatrix K des LQRs für die folgenden Gewichtungsmatrizen:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\; R = 1.$$

c) Wenn Sie ankommen, implementieren den Regler und testen Sie ihn an der Regelstrecke. Sie stellen aber bei der Ausgangsgrösse einen stationären Nachlauffehler fest. Modifizieren Sie die Struktur des Regelsystems in der Abbildung 4 so, dass der Nachlauffehler kompensiert wird.

d) Was ist der Hauptnachteil bei der Kompensation des stationären Nachlauffehlers des Reglers?

Lösung 3

a) Die Eigenwerte des Systems sind:

$$det(sI - A) = s\;(s-1) = 0 \qquad\qquad s_1 = 0, s_2 = 1$$

Das System ist instabil!

b) Die Zustandsrückführmatrix K des LQRs für die folgenden Gewichtungsmatrizen:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R = 1.$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$$

Die Riccati-Geleichung lautet:

$$\begin{pmatrix} s_{12}^2 & s_{12}s_{22} \\ s_{12}s_{22} & s_{22}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -s_{11}+s_{12} \\ 0 & -s_{12}+s_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s_{11}+s_{12} & -s_{12}+s_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+s_{12}^2 & s_{11}-s_{12}+s_{12}s_{22} \\ s_{11}-s_{12}+s_{12}s_{22} & -1+2s_{12}-2s_{22}+s_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung an der Stelle (1,1) liefert direkt s_{12}

$$-1+s_{12}^2 = 0 \Rightarrow s_{12} = \pm 1$$

Die Gleichung an der Stelle (2,2) liefert s_{22} mit Hilfe von s_{12}

$$(s_{22}-1)^2 - 2 + 2\ s_{12} = 0 \Rightarrow s_{22} = 1 \pm \sqrt{2 - 2\ s_{12}}$$

Die Gleichung an der Stelle (1,2) resp. (2,1) liefert dann s_{11}

$$s_{11} = s_{12} - s_{12}\ s_{22}$$

Durch die erhaltenen Lösungen für s_{11}, s_{12} und s_{22} sind folgende Kandidaten für Φ möglich:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aber die einzig positiv-definite Lösung für Φ lautet:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Verstärkungsmatrix K für des LQ-Regulators

$$K = R^{-1}\ B^T\ \Phi = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) Die modifizierte Struktur für die Kompensation des stationären Nachlauffehlers ist in der Abbildung 5 dargestellt.

d) Der Hauptnachteil der vorgeschlagenen Struktur ist, dass der Integrator in der Rückführung die Robustheit des Systems in Bezug auf Stabilität reduziert.

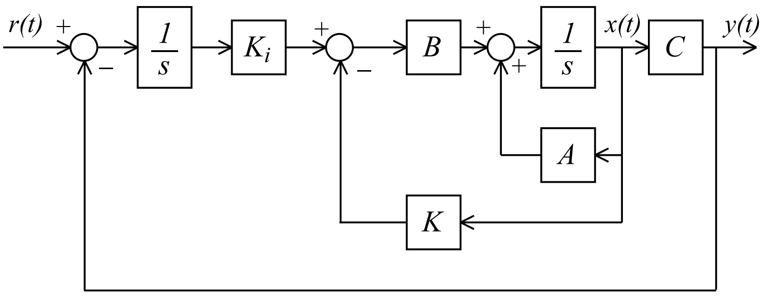


Abbildung 5: LQR-I Struktur

Aufgabe 4 (LQR) 6 Punkte

Ein Ingenieur hat für das System 2. Ordnung

$$\dot{x}_1(t) = 3x_2(t) \qquad \dot{x}_2(t) = 3x_1(t) - 2x_2(t) + u(t)$$

das LQ-Regulatorproblem mit dem Gütekriterium der Form

$$J = \int_0^\infty \left[x^T(t)Qx(t) + u^2(t)\right] dt$$

gelöst und den optimalen Regler

$$u(t) = -7x_1(t) - 5x_2(t)$$

erhalten.

a) Für welche Gewichtungsmatrix Q hat er das LQ-Regulatorproblem gelöst?

b) Welche Pole resultieren für dieses Regelsystem?

Lösung 4

Systemmatrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

a) Gewichtungsmatrizen des Gütekriteriums gesucht.

$$R = 1, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} .$$

Die optimale Steuergrösse:

$$\begin{aligned} u(t) &= -G \cdot x(t) = -R^{-1}B^T\Phi \cdot x(t) = -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ &= -\Phi_2 \cdot x_1(t) - \Phi_3 \cdot x_2(t) \\ &= -7x_1(t) - 5x_2(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \Phi_2 = 7$ und $\Phi_3 = 5$.

Algebraische Matrix-Riccati-Gleichung:

$$-A^T\Phi - \Phi A + \Phi B R^{-1} B^T \Phi - Q = 0$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Phi_1 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}$$

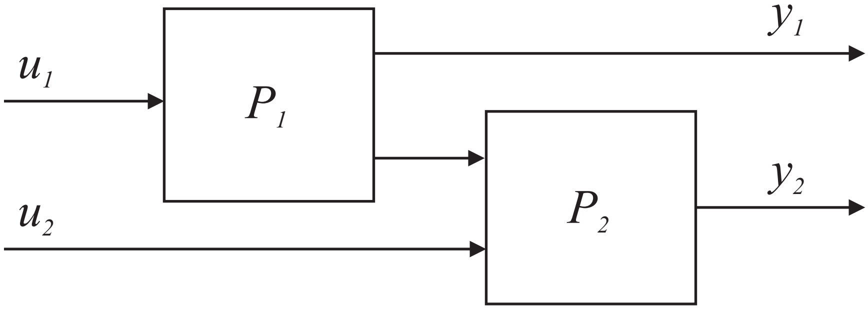
$\Rightarrow \quad q_1 = 7$ und $q_2 = 3$.

b) Die Poles sind

$$\det\left[sI \quad -(A - BK)\right] = \det \begin{bmatrix} s & -3 \\ 4 & s+7 \end{bmatrix} = s^2 + 7s + 12 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \quad s_1 = -3 \text{ und } s_2 = -4.$$

Aufgabe 5 (MIMO-Systeme, Singularwerte) **7 Punkte**

Gegeben sei das folgende lineare, gekoppelte MIMO-System, bestehend aus den beiden Subsystemen P_1 und P_2, mit den beiden Eingängen u_1 und u_2 und den Ausgängen y_1 und y_2.



Das Subsystem P_1 sei gegeben durch die Zustandsraumdarstellung:
$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$, $D_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Und das Subsystem P_2 habe folgende Übertragungsfunktion:
$P_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{7}{s+1} & \frac{-1}{s+1} \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfuktion $P(s)$ des gesammten Systems.

b) Die Übertragungsfunktions $P(s)$ hat an der Stelle $\omega = 1$ rad/s folgenden Wert: $P(j) = \begin{pmatrix} \frac{1-j}{2} & 0 \\ -\frac{j}{2} & \frac{j-1}{2} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Singularwerte von $P(s)$ bei dieser Frequenz.

Lösung 5

a) Zuerst wird die Übertragungsfunktion des Subsystems $P_1(s)$ berechnet:

$$P_1(s) = C_1 \cdot (sI - A_1)^{-1} \cdot B_1 + D_1 \tag{1}$$

$$P_1(s) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot B_1 + D_1 \tag{2}$$

$$P_1(s) = C_1 \cdot \frac{1}{det(sI - A_1)} \cdot \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \cdot B_1 + D_1 \tag{3}$$

$$P_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix} \cdot B_1 + D_1 \tag{4}$$

$$P_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \cdot \begin{pmatrix} s+1 & 2s+3 \\ \frac{2s+2}{7} & \frac{3s+4}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$P_1(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \cdot \begin{pmatrix} s+2 \\ \frac{s+2}{7} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$P_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{7s+7} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Die gesammte Übertragungsfunktion setzt sich dann folgendermassen zusammen:

$$P(s) = \begin{pmatrix} P_1^{1,1}(s) & 0 \\ P_1^{2,1}(s) \cdot P_2^{1,1}(s) & P_2^{1,2}(s) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Eingesetzt erhält man:

$$P(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{-1}{s+1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

b) Die Singularwerte einer Matrix P berechnen sich zu $\sigma_i\{P\} = \sqrt{\lambda_i\{\bar{P}^T P\}}$. Berechnen der Hessematrix $H = \bar{P}^T P$:

$$H = \bar{P}^T(j)P(j) = \begin{pmatrix} \frac{1+j}{2} & \frac{j}{2} \\ 0 & \frac{-j-1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-j}{2} & 0 \\ -\frac{j}{2} & \frac{j-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1+j}{4} \\ \frac{j-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Berechnen der Eigenwerte von H:

$$det(H - \lambda I) = 0 \tag{11}$$

$$det(\begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & -\frac{1+j}{4} \\ \frac{j-1}{4} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix}) = \lambda^2 - \frac{5}{4}\lambda + \frac{1}{4} = 0 \tag{12}$$

Für die Eigenwerte erhält man folgende Lösung:

$\lambda_1 = \frac{1}{4}$ und $\lambda_2 = 1$

Und schliesslich für die Singularwerte:

$\sigma_1\{P(j)\} = \sqrt{\lambda_1} = \frac{1}{2}$ und $\sigma_2\{P(j)\} = \sqrt{\lambda_2} = 1$

Aufgabe 6 (LQG/LTR) 8 Punkte

Für das System erster Ordnung mit dem Zustandsraummodell

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$$
$$y(t) = 2 \cdot x(t)$$

soll ein Regler gemäss folgenden Schritten ausgelegt werden:

a) LQG-Schritt: Entwerfen Sie einen LQ-Regulator mit der Zustandsrückführmatrix K für $r = 1/6$.
(Hinweis: In MATLAB® würden Sie schreiben `K=lqr(A,b,c'*c,r);`)

b) LTR-Schritt: Entwerfen Sie einen Beobachter mit der Beobachterverstärkungsmatrix L mit $q = 1/2$.
(Hinweis: In MATLAB® würden Sie schreiben `L=lqr(A',c',b*b',q);`)

c) Skizzieren Sie qualitativ die Nyquist-Kurve der Kreisverstärkung des LQ-Regulators aus **a**) und die Nyquist-Kurve der Kreisverstärkung des gesamten Regelsystems mit dem LQ-Reglator aus **a**) und LTR-Beobachter aus **b**).

d) Zeichnen Sie ein detailliertes Signalflussbild des gesamten Regelsystems inklusive Regelstrecke (Falls vorhanden, verwenden Sie Zahlenwerte!).

Bemerkung: Obwohl die Auslegung eines LQG/LTR-Reglers für ein System erster Ordnung wenig Sinn macht, wurde in dieser Aufgabe einfachheitshalber für die Prüfungssituation ein solches System als Strecke gewählt.

Lösung 6

a) *LQG-Schritt:*

Die Systemmatrizen lauten: $A = -1,\ B = 1,\ C = 2.$
Die Zustandsrückführung des LQ-Regulators ist gegeben durch

$$K = r^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi,$$

wobei Φ die positive Lösung der folgenden Riccati-Gleichung ist:

$$\Phi \cdot B \cdot r^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - C^T \cdot C = 0.$$

Für die gegebenen Zahlenwerte erhalten wir dann:

$$\Phi \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \Phi - \Phi \cdot (-1) - (-1) \cdot \Phi - 2 \cdot 2 = 6 \cdot \Phi^2 + 2 \cdot \Phi - 4 = 0,$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{2}{3} = 0$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\Phi = \frac{-1 \pm 5}{6}.$$

Die einzig positive Lösung der Riccati-Gleichung ist $\Phi = \frac{-1+5}{6} = 2/3$. Die Zustandsrückführung ist dann

$$K = 6 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = 4.$$

b) *LTR-Schritt:*

Die Systemmatrizen lauten: $A = -1,\ B = 1,\ C = 2.$
Die Beobachterverstärkungsmatrix ist gegeben durch

$$L = \left(q^{-1} \cdot C \cdot \Phi\right)^T,$$

wobei Φ die positive Lösung der folgenden Riccati-Gleichung ist:

$$\Phi \cdot C^T \cdot q^{-1} \cdot C \cdot \Phi - \Phi \cdot A^T - A \cdot \Phi - B \cdot B^T = 0,$$

Für die gegebenen Zahlenwerte erhalten wir dann:

$$\Phi \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \Phi - \Phi \cdot (-1) - (-1) \cdot \Phi - 1 \cdot 1 = 8 \cdot \Phi^2 + 2 \cdot \Phi - 1 = 0,$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$\Phi = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{8}.$$

Die einzig positive Lösung der Riccati-Gleichung ist $\Phi = \frac{-1+3}{8} = \frac{1}{4}$ und die Beobachterverstärkung lautet:

$$L = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

c) Der Nyquist-Verlauf der Kreisverstärkung des LQ-Regulators in **a**) und der Nyquist-Verlauf der Kreisverstärkung des gesamten Regelsystems mit dem LQG-Regler in **b**):

Bemerkung: Aus lerntechnischen Gründen ist nachfolgend die Lösung ausführlich angegeben. In der Prüfung wird eine approximative Lösung ausreichen.

Die Übertragungsfunktion der Kreisverstärkung des Regulators gemäss **a**) ist gegeben durch

$$L(s) = K \cdot (s - A)^{-1} \cdot B = \frac{K \cdot 1}{s+1} = \frac{4}{s+1}$$

$$L(j\omega) = \frac{4}{j\omega + 1} = \frac{4}{j\omega + 1} \cdot \frac{-j\omega + 1}{-j\omega + 1} = \frac{4 \cdot (1 + j\omega)}{1 + \omega^2} = \frac{4}{1 + \omega^2} + j \cdot \frac{4 \cdot \omega}{1 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Im L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow -\infty] = 0\\
&\text{Im L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow -1] = -2\\
&\text{Im L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow 0] = 0\\
&\text{Im L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow 1] = 2\\
&\text{Im L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow \infty] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Re L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow -\infty] = 0\\
&\text{Re L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow -1] = 2\\
&\text{Re L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow 0] = 4\\
&\text{Re L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow 1] = 2\\
&\text{Re L(j}\omega\text{)} = [\omega \longrightarrow \infty] = 0
\end{aligned}$$

Skizze siehe Abbildung 6.

Die Übertragungsfunktion der Strecke ist:

$$P(s) = \frac{2}{s+1}.$$

Die Übertragungsfunktion des Reglers ist

$$C(s) = -K \cdot (s - A + B \cdot K + L \cdot C)^{-1} \cdot (-L) = 4 \cdot (s+7)^{-1} = \frac{4}{s+7}.$$

Die Übertragungsfunktion der Kreisverstärkung des gesamten Regelsystems gemäss **b)** ist dann:

$$L(s) = C(s) \cdot P(s) = \frac{8}{(s+7)(s+1)}$$

$$L(j\omega) = \frac{8}{(j\omega+7)(j\omega+1)} = 8 \cdot \frac{(-j\omega+7)(-j\omega+1)}{(\omega^2+7^2)(\omega^2+1)} =$$

$$= 8 \cdot \frac{7-\omega^2}{(\omega^2+7^2)(\omega^2+1)} + j \cdot 8 \cdot \frac{-8 \cdot \omega}{(\omega^2+7^2)(\omega^2+1)}$$

$\text{Im L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow -\infty] = 0$
$\text{Im L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow -1] = \frac{-8 \cdot 8}{2 \cdot (1+49)} = \frac{-64}{100} = -0.64$
$\text{Im L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow 0] = 0$
$\text{Im L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow 1] = \frac{8 \cdot 8}{2 \cdot (1+49)} = \frac{64}{100} = 0.64$
$\text{Im L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow \infty] = 0$

$\text{Re L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow -\infty] = 0$
$\text{Re L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow -1] = 8 \cdot \frac{6}{50 \cdot 2} = 0.48$
$\text{Re L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow 0] = 8/7$
$\text{Re L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow 1] = 8 \cdot \frac{6}{50 \cdot 2} = 0.48$
$\text{Re L(j}\omega) = [\omega \longrightarrow \infty] = 0$

$L(j\omega)$ schneidet die Imanginär-Achse für $\omega = \pm\sqrt{7}$ bei

$$\text{Im L}(\pm \text{j}\sqrt{7}) = \pm \text{j}\frac{-64 \cdot \sqrt{7}}{(7+7^2)(7+1)} = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}$$

Skizze siehe Abbildung 7.

d) Das detaillierte Signalflussbild des gesamten Regelsystems inklusive Regelstrecke ist in der Abbildung 8 dargestellt.

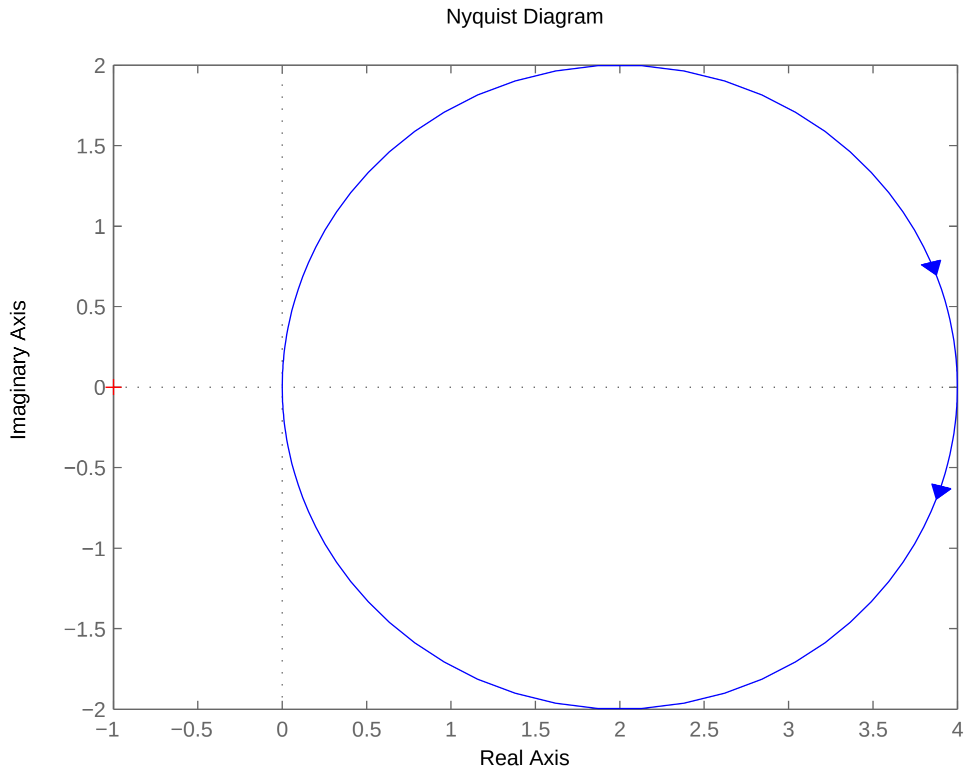


Abbildung 6: Nyquist-Kurve der Kreisverstärkung des LQ-Regulators

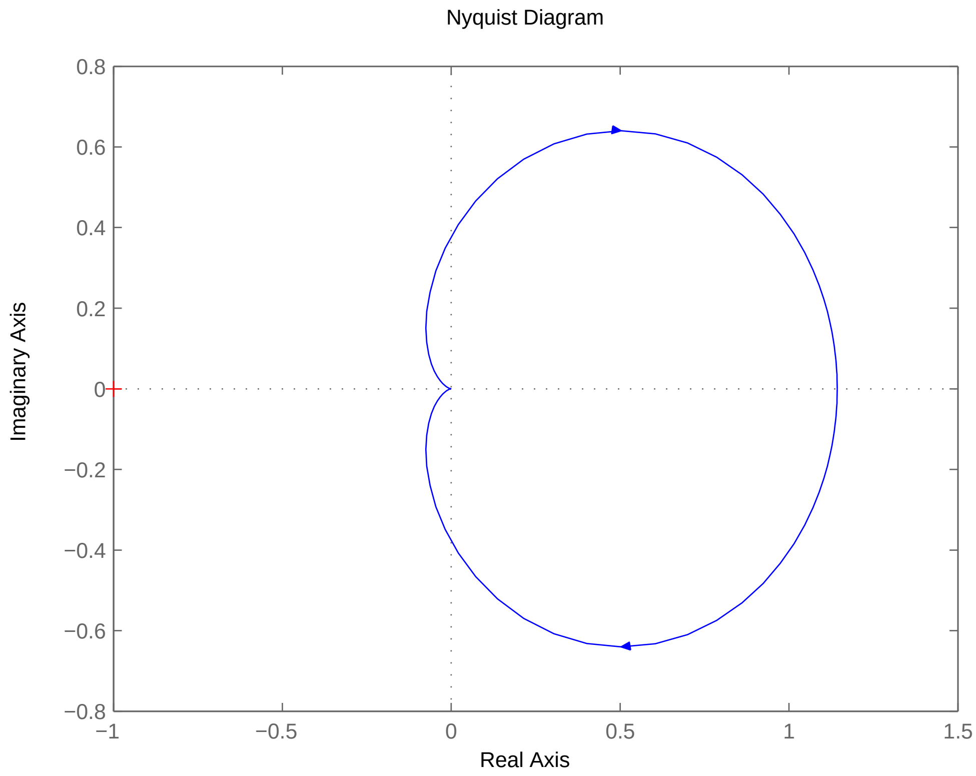


Abbildung 7: Nyquist-Kurve der Kreisverstärkung des gesamten Regelsystems

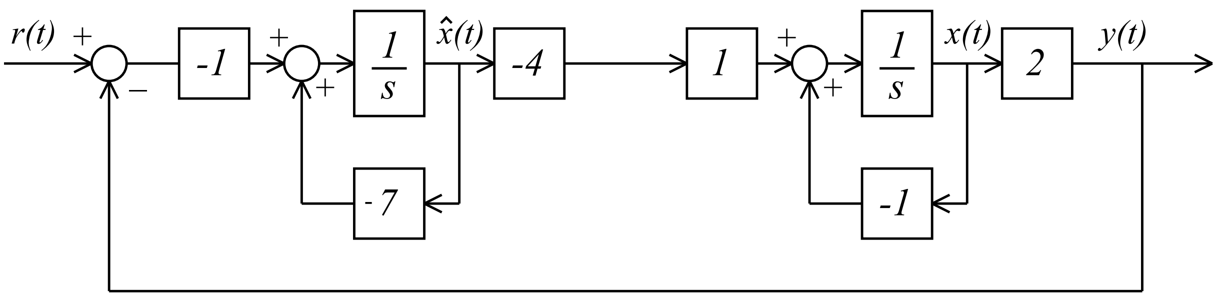


Abbildung 8: Signalflussbild des gesamten LQG/LTR-Regelsystems)

Aufgabe 7 (MULTIPLE-CHOICE — Diverse) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (−1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

a) Wenn die Regelstrecke (plant) selbst nicht integrierend ist, dann weisen Smith Prädiktoren (Smith predictor) immer einen stationären Regelfehler auf, da der Regler aufgrund seiner internen Streckenmodell-Rückführung nie einen "offenen Integrator" (=Pol im Ursprung) haben kann.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

b) Wegen dem fundamentalen Zusammenhang

$$T(s) + S(s) = 1$$

reicht es, nur die Singularwertverläufe von S(s) zu betrachten, um die robuste Regelgüte (robust performance) des Regelsystems zu beurteilen.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

c) Die Reglerauslegung mit den Aström und Hägglund Regeln hat, wie die Auslegung nach Ziegler Nichols, den Vorteil, dass nicht unbedingt ein Modell der Strecke benötigt wird, sondern die Parameter aufgrund von Versuchen am realen System ermittelt werden können.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

d) Bei MIMO Systemen kann es vorkommen, dass sich Pole (poles) und Nullstellen (zeros) nicht kürzen, obwohl sie in der komplexen Ebene exakt an der gleichen Stelle liegen.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

e) Wenn die RGA Matrix eines MIMO Systems gleich der Einheitsmatrix ist, heisst das, dass jeder Systemausgang (output) jeweils nur von genau einem Systemeingang (input) beeinflusst wird.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

f) Wenn bei einem linearen System alle Zustände perfekt messbar sind, dann ist ein LQ-Regulator, der bestmögliche lineare Regler.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

g) Die Beurteilung der Robustheit eines MIMO Systems aufgrund von Singularwertverläufen ist eine "worst-case"-Betrachtung und daher meistens konservativ.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

h) Bei einem Regelsystem welches ausschliesslich mit einem LQ-Regulator geregelt wird, ist eine Anti Reset Windup Massnahme nie notwendig.

- ☐ Richtig.
- ☐ Falsch.

Lösung 7

a) *Falsch.* Die allgemeine Übertragungsfunktion eines Smith Prädiktors kann geschrieben werden als

$$C(s) = \frac{C_r(s)}{1 + C_r(s)P(s)(1 - e^{-s \cdot T})}$$

Es gilt also

$$\lim_{s \to 0} C(s) = C_r(0)$$

Wenn der interne Regler C_r einen Pol im Ursprung hat, weist das Regelsystem keinen stationären Regelfehler auf.

b) *Falsch.* Zur Beurteilung der robusten Regelgüte muss der Ausdruck

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}} \{|S(j\omega)W_1(j\omega)| + |T(j\omega)W_2(j\omega)|\} \leq 1.$$

betrachtet werden. Der Singularwertverlauf von $S(s)$ enthält keine Phaseninformation, deshalb kann $T(s)$ nicht berechnet werden.

c) *Richtig.* Für die Reglerauslegung mit den Aström Hägglund Regeln wird nur die kritische Frequenz, kritische Verstärkung und der statische Übertragungsfaktor benötigt, diese Grössen können experimentell bestimmt werden.

d) *Richtig.* Beispiel: das System

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Hat je einen Pol und eine Nullstelle bei $s = -1$ und $s = -2$.

e) *Falsch.* Sowohl diagonale als auch dreieckige MIMO Strukturen haben eine RGA Matrix gleich der Einheitsmatrix. Ein Ausgang kann deswegen durchaus durch mehrere Eingangsgrössen beeinflusst werden.

f) *Falsch.* Ein LQ-Regulator ist nur optimal bezüglich des gewählten Gütekriteriums.

g) *Richtig.* Singularwertverläufe beinhalten keine Phaseninformationen und liefern deshalb nur eine obere und untere Grenze für die Verstärkung eines Systems.

h) *Richtig.* Ein LQ-Regulator ist eine reine Zustandsrückführung und beinhaltet deshalb nie einen offenen Integrator. Deshalb ist auch eine Anti-Reset-Windup Massnahme nicht nötig.

Aufgabe 8 (MULTIPLE-CHOICE — LQR und LQG/LTR) 8 Punkte

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (−1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

a) Ein Regler muss in jedem Fall integrierendes Verhalten haben, damit man keinen stationären Nachlauffehler hat.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

b) Der grösste Singularwert der Matrix $M = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ beträgt $\sigma_{max}\{M\} = \sqrt{5}$.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

c) Der Phasenverlauf von einem Totzeitelement hängt linear von der Frequenz ab.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

d) Je grösser $\max_{\omega} |T(j\omega)|$ eines Regelsystems ist, desto grösser ist die Phasenreserve φ.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

e) Wird die Durchtrittsfrequenz eines Reglers erhöht, erhält man eine höhere Phasenreserve φ.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

f) Ein MIMO-System, dass Nullstellen mit positivem Realteil hat, ist nicht minimalphasig.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

g) Der Nachteil eines schnellen Zustandsbeobachters ist, dass er Rauschen des Eingangssignals und des Ausgangsignals verstärkt.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

h) Das LTR-Verfahren ist notwendig, damit ein LQR-Regler auch dann stabil ist, wenn die Zustandsgrössen durch einen stabilen Beobachter geschätzt werden.

☐ Richtig.
☐ Falsch.

Lösung 8

a) *Falsch.* Falls die Strecke bereits integrierendes Verhalten hat, wird kein integrierendes Verhalten des Reglers benötigt um einen stationären Nachlauffehler zu vermeiden.

b) *Falsch.* Die Singularwerte der Matrix M berechnen sich zu $\sigma_{1,2}\{M\} = \sqrt{\lambda_{1,2}\{\bar{M}^T M\}}$. Man erhält: $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$, $\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$. Der grösste Singularwert beträgt damit $\sigma_{max}\{M\} = 5$.

c) *Richtig.* Der Zusammenhang zwischen Phasengang und Totzeit lautet: $\varphi(\omega) = T \cdot \omega$.

d) *Falsch.* Das garantierte Intervall für die Phasenreserve φ ist umso grösser, je kleiner $\max\limits_{\omega} |T(j\omega)|$ ist,

$$\varphi > 2 \arcsin \left(\frac{1}{2 \max\limits_{\omega} |T(j\omega)|} \right) .$$

e) *Falsch.* Normalerweise ist es genau umgekehrt.

f) *Richtig.* Es gilt die selbe Definition für nicht minimalphasige System wie im SISO Fall.

g) *Richtig.*

h) *Falsch.* Gemäss dem Separationstheorem, werden die Pole des geschlossenen Regelkreises durch hinzufügen eines Beobachers nicht verschoben. Es kommen lediglich die des Beobachters hinzu. Das Regelsystem bleibt also auch ohne LTR-Verfahren stabil. Das LTR-Verfahren dient zur Erhöhung der Robustheit des Regelsystems.