
BSc - Sessionsprüfung

7.2.2007

Regelungstechnik II (151-0590-00)Prof. Dr. L. Guzzella

Musterlösung

Dauer der Prüfung: 120 Minuten

Anzahl der Aufgaben: 8 (**unterschiedlich** gewichtet, total 68 Punkte)

Bewertung: Um die Note 6 zu erlangen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Bei jeder Aufgabe ist die Punktezahl angegeben.

Falsche Antworten bei den Multiple-Choice Aufgaben geben Punkteabzug. (Detaillierte Angaben sind bei den entsprechenden Aufgaben zu finden.)

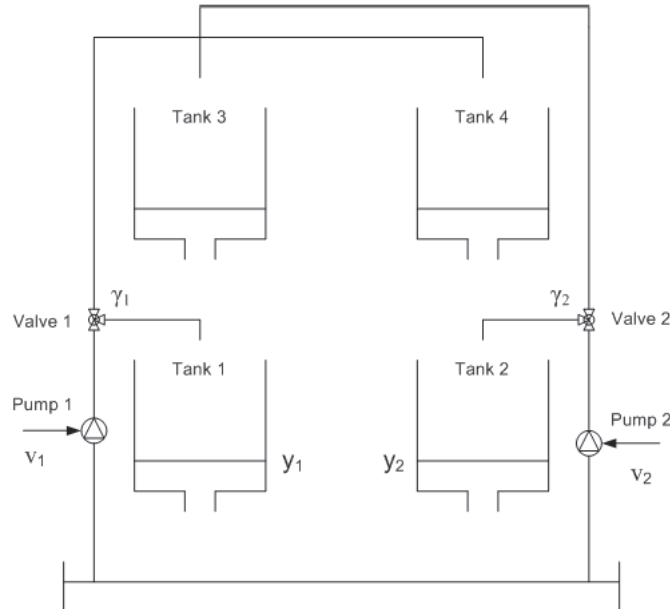
Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Blätter (**40 Seiten**)

Die Assistenten dürfen keine Hilfe geben, und es sind **keine elektronischen Hilfsmittel** erlaubt.

Zur Beachtung: Lösen Sie die Aufgaben ausschliesslich auf den vorbereiteten Blättern.

Aufgabe 1 (MIMO-Systems, RGA)**8 Punkte**

Das Schema eines Vierfach-Behältersystems ist im Bild unten dargestellt.



Bei diesem System sollen mit Hilfe von zwei Pumpen (pump 1 and pump 2) das Wasserniveau der beiden unteren Wasser-Tanks geregelt werden. Die Eingangsgrößen des Systems sind v_1 und v_2 (Steuerspannungen der Pumpen) und die Ausgangsgrößen sind y_1 und y_2 (Spannungsausgänge der Tankniveaumessung). Die zwei Ventile (valve 1 und valve 2) besitzen die Parameter γ_1 und $\gamma_2 \in [0, 1]$. Der Volumenstrom in den ersten Tank wird durch die Multiplikation von Volumenstrom der ersten Pumpe mit dem Ventilparameter γ_1 , und der Volumenstrom in den vierten Tank durch Multiplikation von Volumenstrom der ersten Pumpe mit $(1 - \gamma_1)$ bestimmt. Ähnlich werden auch die Volumenströme in den beiden anderen Tanks bestimmt.

Die Übertragungsmatrix des linearisierten Systems lautet:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{1 + sT_1} & \frac{(1 - \gamma_2)c_1}{(1 + sT_3)(1 + sT_1)} \\ \frac{(1 - \gamma_1)c_2}{(1 + sT_4)(1 + sT_2)} & \frac{\gamma_2 c_2}{1 + sT_2} \end{bmatrix}$$

wobei T_1, T_2, T_3 and T_4 die Zeitkonstanten des Systems sind und die Konstanten c_1 und c_2 die Geometrie und das Strömungsverhalten repräsentieren.

- (2 Punkte) Wie würden Sie, ohne zu rechnen, die Ventilparameter setzen, damit das System entkoppelt ist.
- (3 Punkte) Verifizieren Sie Ihre Antwort in a) mit der Berechnung von RGA des Systems für die Frequenz $\omega = 0$ (stationär!).
- (3 Punkte) Welche Input-Output-Paarung sollte gewählt werden, falls $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$ ist?

Bemerkung: Beachten Sie, dass die Ventilparameter γ_1 und γ_2 nicht für die Steuerung des Systems verwendet werden (Die Pumpenspannungen v_1 and v_2 sind die einzigen Steuergrößen!)

Lösung 1

- a) (2 Punkte) Zwei Antworten sind möglich. Wenn dafür gesorgt wird, dass der Volumenstrom des Wassers direkt in die zwei unteren Tanks fließen, dann ist das System vollständig entkoppelt. Dies erreicht man mit $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 1$. In diesem Fall würde v_1 das Niveau y_1 und v_2 das Niveau y_2 steuern. Eine zweite Möglichkeit wäre, $\gamma_1 = 0$ und $\gamma_2 = 0$ zu wählen. In diesem Fall würde v_1 das Niveau y_2 und v_2 das Niveau y_1 steuern.
- b) (3 Punkte) Das RGA (relative gain array) ist durch eine 2×2 -Matrix mit den folgenden Elementen gegeben, die für die Frequenz $\omega = 0$ (resp. $s = 0$) berechnet sind.

$$[RGA]_{11} = [RGA]_{22} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}$$

$$[RGA]_{12} = [RGA]_{21} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_1 \gamma_2 - 1}{\gamma_1 + \gamma_2 - 1}$$

Wenn γ_1 und γ_2 gleich Null gesetzt werden, wird RGA diagonal und somit das Verhalten des Systems "diagonal dominant". Das bestätigt die Bedingung für die Entkopplung des Systems!

- c) (3 Punkte) Für $\gamma_1 + \gamma_2 < 1$ wird $[RGA]_{11}$ negativ, was die Steuerbarkeit des Systems beeinträchtigt. Falls die Ausgangsgrößen y_1 und y_2 vertauscht werden, wird das entsprechende Element der RGA-Matrix zu

$$[RGA]_{11} = \frac{(1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)}{1 - \gamma_1 - \gamma_2}$$

In diesem Fall wird $[RGA]_{11}$ positiv und die notwendige Eingang-Ausgang-Paarung ist v_1 für y_2 und v_2 für y_1 .

Aufgabe 2 (Systemanalyse eines MIMO-Systems)**10 Punkte**

Gegeben sei das folgende dynamische System dritter Ordnung:

$$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) - 4u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + u_1(t)$$

$$\dot{x}_3(t) = x_3(t) + u_2(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t) + x_3(t) + u_1(t)$$

$$y_2(t) = x_2(t).$$

- a) (2 Punkte) Bestimmen Sie das Zustandsraummodell dieses Systems und beurteilen Sie, ob das System stabil ist.
- b) (3 Punkte) Ist das System vollständig steuerbar und vollständig beobachtbar? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $P(s)$ des gegebenen Systems.
- d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Pole des Systems mit Hilfe der Minoren der Übertragungsmatrix des Systems $P(s)$. Erklären Sie auch, wie die Pole ohne weitere Rechnung angegeben werden könnten.
- e) (1 Punkt) Bei der Berechnung der Nullstellen des Systems stellen Sie fest, dass eine Nullstelle des Systems mit einem unter d) berechneten Pol übereinstimmt. Erklären Sie, warum es in diesem Fall keine Pol-Nullstellen-Kürzung stattgefunden hat.

Lösung 2

- a) (2 Punkt) Das in der Aufgabe gegebene lineare System kann geschrieben werden als

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t),\end{aligned}$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für die Beurteilung der Stabilität des Systems werden die Eigenwerte von A , d.h. die Wurzeln des charakteristischen Polynoms berechnet.

$$\begin{aligned}\det(sI - A) &= \det \begin{pmatrix} s+3 & 0 & 0 \\ -1 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix} = (s+3)(s-2)(s-1) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 &= -3, \quad \lambda_2 = 2 \text{ und } \lambda_3 = 1\end{aligned}$$

Da zwei Eigenwerte positiven Realteil haben, ist das System *nicht stabil*.

- b) (3 Punkte) Das System ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix $\mathcal{R}$ vollen Rang hat, Im vorliegenden Fall ergibt sich für die Steuerbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{R} = [B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 12 & 0 & -36 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Offensichtlich hat $\mathcal{R}$ vollen Rang, $\text{Rang}(\mathcal{R}) = 3$.

Das System ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{O}$ vollen Rang hat,

$$\text{Vollständig beobachtbar} \Leftrightarrow \text{Rang}(\mathcal{O} = [C^T, A^T \cdot C^T, \dots, (A^T)^{n-1} \cdot C^T]^T) = n.$$

Im vorliegenden Fall lautet die Beobachtbarkeitsmatrix,

$$\mathcal{O} = [C^T, A^T C^T, (A^T)^2 C^T]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Offensichtlich hat $\mathcal{O}$ ebenfalls vollen Rang, $\text{Rang}(\mathcal{O}) = 3$.

- c) (3 Punkte) Die Übertragungsmatrix $P(s)$ eines MIMO-Systems wird analog zur Übertragungsfunktion eines SISO-Systems berechnet,

$$P(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D.$$

Für das gegebene System ergibt sich,

$$\begin{aligned} P(s) &= C \cdot \begin{bmatrix} s+3 & 0 & 0 \\ -1 & s-2 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot B + D \\ &= C \cdot \left(\frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & 0 & 0 \\ (s-1) & (s-1)(s-2) & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)(s+3) \end{bmatrix}^T \right) \cdot B + D \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+3)} \cdot C \cdot \begin{bmatrix} (s-1)(s-2) & 0 & 0 \\ (s-1) & (s-1)(s-2) & 0 \\ 0 & 0 & (s-2)(s+3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4(s-1)(s-2) & 0 \\ (s-1)^2 & 0 \\ 0 & (s-2)(s+3) \end{bmatrix} + D \\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} -4(s-1)(s-2) & (s-2)(s+3) \\ (s-1)^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s-1}{s+3} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{s-1}{(s-2)(s+3)} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- d) (1 Punkt) Die Pole des Systems sind die Nullstellen des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nennerpolynome der Minoren der Übertragungsmatrix.

$$\frac{s-1}{s+3}, \quad \frac{1}{s-1}, \quad \frac{s-1}{(s-2)(s+3)}, \quad 0, \quad \frac{1}{(s-2)(s+3)}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache der Nennerpolynome ist das Polynom

$$p(s) = (s-1)(s-2)(s+3)$$

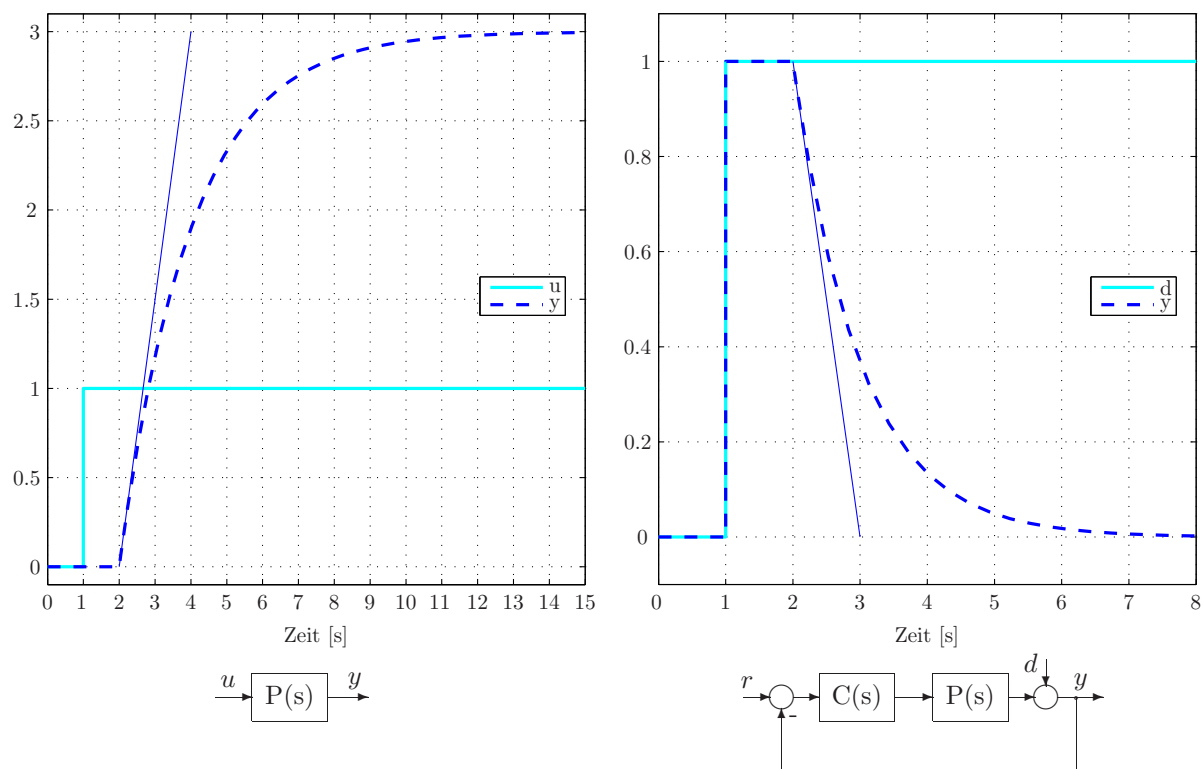
Deshalb sind die Pole des Systems 1, 2 und -3.

Da das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist und deshalb keine Pol/Nullstellen-Kürzung geben kann, entsprechen die Pole des Systems den Eigenwerten, die unter a) berechnet wurden.

- e) (1 Punkt) In einem MIMO-System existiert zu jedem Pol und jeder Nullstelle eine zugehörige Richtung. Eine Pol/Nullstellen-Kürzung kann es nur dann geben, wenn sowohl die Richtung als auch die Frequenz der Pole und Nullstellen übereinstimmen würden. Deshalb ist es grundsätzlich möglich, dass ein System Pole und Nullstellen haben kann, die gleich sind aber wegen unterschiedlichen Richtungen sich nicht aufheben.

Aufgabe 3 (Reglerauslegung)**8 Punkte**

Die folgende Abbildung zeigt links die Einheits-Sprungantwort einer Regelstrecke (plant) $P(s)$ und rechts die Systemantwort eines Regelsystems mit der gleichen Strecke $P(s)$ und dem Regler $C(s)$ auf einen Einheitssprung der Störgrösse d .



- (2 Punkte) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion der Regelstrecke $P(s)$ (numerische Werte).
- (3 Punkte) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion von der Störung d zum Ausgangssignal y als auch vom Referenzsignal r zum Ausgangssignal y . (jeweils mit numerischen Werten).
- (3 Punkte) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion des Reglers $C(s)$. Um was für einen Regler handelt es sich?

Lösung 3

- (2 Punkte) Die Sprungantwort der Strecke zeigt ein Tiefpassverhalten und eine Totzeit. Die Totzeit δ , die Zeitkonstante T und der statische Übertragungsfaktor k können direkt anhand der Sprungantwort bestimmt werden: $\delta = 1$ s, $T = 2$ s und $k = 3$. Die Übertragungsfunktion wird somit:

$$P(s) = \frac{3}{2 \cdot s + 1} \cdot e^{-s}$$

- (3 Punkte) Bei einem Einheitssprung der Störgrösse d folgt das Ausgangssignal zuerst exakt dem Störsignal. Dies lässt auf ein statisches Einheits-Element schliessen. Nach einer

Zeit von 1 s klingt das Signal y gemäss einem System 1. Ordnung ab. Dies lässt wiederum auf ein Tiefpasselement mit einer Totzeit schliessen. Anhand der Abbildung kann man die Zeitkonstante $T = 1$ s und die Totzeit $\delta = 1$ s bestimmen. Die Übertragungsfunktion wird somit

$$S(s) = 1 - \frac{1}{s+1} \cdot e^{-s}$$

Diese Übertragungsfunktion ist gerade die Sensitivität $S(s)$. Zur Bestimmung der Übertragungsfunktion von r nach y , also die komplementäre Sensitivität $T(s)$, verwendet man den fundamentalen Zusammenhang

$$T(s) + S(s) = 1 \quad \forall s$$

$T(s)$ wird somit:

$$T(s) = 1 + S(s) = \frac{1}{s+1} \cdot e^{-s}$$

- c) (3 Punkte) Der Regler lässt sich zum Beispiel anhand der Definition von $S(s)$ bestimmen.

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s) \cdot P(s)}$$

Der Regler wird dann

$$C(s) = \frac{1 - S(s)}{S(s) \cdot P(s)}$$

Setzt man die numerischen Werte ein und vereinfacht, erhält man

$$C(s) = \frac{2 \cdot s + 1}{3 \cdot (s + 1 - e^{-s})}.$$

Die Struktur des Reglers und die im Regler auftretende Totzeit, lässt auf ein Smith Prädiktor schliessen.

Aufgabe 4 (Closed-Form Cross-Over Specification)**10 Punkte**

Für eine Regelstrecke (plant) $P(s)$ wurde ein PID-Regler $C(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s\right)$ mit Spezifikationen am Durchtrittspunkt (Closed-Form Cross-Over Specification) ausgelegt. Die nachfolgende Tabelle enthält numerische Werte von Betrag und Phase von der Regelstrecke (plant) $P(s)$ als auch vom offenen Regelkreis (loop gain) $L(s)$.

- (3 Punkte) Bestimmen Sie die Spezifikationen für die Durchtrittsfrequenz ω_c , die Phasenreserve φ und den Eintrittswinkel ψ , die verwendet wurden (Zahlenwerte oder Ausdrücke).
- (2 Punkte) Bestimmen Sie folgende zur Auslegung benötigten Größen (numerische Werte oder Ausdrücke): den Betrag r_P , dessen Ableitung nach der Frequenz r'_P , den Phasenwinkel φ_P , und dessen Ableitung φ'_P der Regelstrecke jeweils bei der Frequenz ω_c .
- (4 Punkte) Nun soll ein neuer PID-Regler mit den Spezifikationen $\omega_c = 1.65$ rad/s und $\varphi = \psi = 44^\circ$ ausgelegt werden. Bestimmen Sie die Reglerparameter k_p , T_i und T_d (numerische Werte oder Ausdrücke).
- (1 Punkt) Welche Aussage kann über die Stabilität der beiden geschlossenen Regelkreise gemacht werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

Tipps:

- Ableitung mit der Finite Differenzen Methode (finite differences):

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=x_i} \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

- $\text{Arg} \left\{ \frac{dL(j\omega)}{d\omega} \right\} = \text{Arg} \{ r_L(\omega) \cdot e^{i\varphi_L(\omega)} \} = \text{ArcTan} \left(\frac{r'_L(\omega) \sin(\varphi_L(\omega)) + r_L(\omega) \varphi'_L(\omega) \cos(\varphi_L(\omega))}{r'_L(\omega) \cos(\varphi_L(\omega)) - r_L(\omega) \varphi'_L(\omega) \sin(\varphi_L(\omega))} \right)$

ω [rad/s]	$ P(j\omega) $	$\angle P(j\omega)$ [°]	$\angle P(j\omega)$ [rad]	$ L(j\omega) $	$\angle L(j\omega)$ [°]	$\angle L(j\omega)$ [rad]
0.95	2.07	-97.82	-1.707	2.74	-124.69	-2.176
1	1.96	-101.31	-1.768	2.52	-124.67	-2.176
1.05	1.86	-104.65	-1.827	2.34	-124.54	-2.174
1.1	1.77	-107.86	-1.883	2.18	-124.32	-2.17
1.15	1.68	-110.93	-1.936	2.04	-124.05	-2.165
1.2	1.59	-113.88	-1.988	1.91	-123.72	-2.159
1.25	1.51	-116.72	-2.037	1.8	-123.37	-2.153
1.3	1.44	-119.44	-2.085	1.7	-123	-2.147
1.35	1.37	-122.05	-2.13	1.62	-122.63	-2.14
1.4	1.3	-124.57	-2.174	1.54	-122.26	-2.134
1.45	1.24	-126.99	-2.216	1.47	-121.91	-2.128
1.5	1.18	-129.32	-2.257	1.41	-121.58	-2.122
1.55	1.12	-131.57	-2.296	1.35	-121.28	-2.117
1.6	1.07	-133.73	-2.334	1.3	-121	-2.112
1.65	1.00	-136.00	-2.371	1.25	-120.76	-2.108
1.7	0.97	-137.85	-2.406	1.2	-120.55	-2.104
1.75	0.93	-139.8	-2.44	1.16	-120.38	-2.101
1.8	0.89	-141.69	-2.473	1.13	-120.24	-2.099
1.85	0.85	-143.52	-2.505	1.09	-120.13	-2.097
1.9	0.81	-145.29	-2.536	1.06	-120.06	-2.095
1.95	0.78	-147.01	-2.566	1.03	-120.01	-2.095
2	0.74	-148.67	-2.595	1	-120	-2.094
2.05	0.71	-150.29	-2.623	0.97	-120.01	-2.095

Lösung 4

- a) (3 Punkte) Zuerst wird die Durchtrittsfrequenz ω_c bestimmt. Bei dieser Frequenz ist der Betrag von $L(j\omega)$ eins, die Durchtrittsfrequenz ist also $\omega_c = 2 \text{ rad/s}$. Die Phasenreserve ist

$$\varphi = \angle L(j\omega_c) + 180^\circ = -120^\circ + 180^\circ = 60^\circ$$

Der Eintrittswinkel ψ ist definiert als

$$\psi = \text{Arg} \left\{ \frac{dL(j\omega)}{d\omega} \right\} \Big|_{\omega=\omega_c}$$

zur Berechnung benutzt man die in den Tipps angegebene Umformung. Die dafür benötigten Ableitungen berechnet man mit Hilfe der Finite Differenzen Methode. $\varphi'_L(\omega_c)$ wird somit

$$\varphi'_L(\omega_c) \approx \frac{-2.095 \text{ rad} + 2.095 \text{ rad}}{2.05 \text{ rad/s} - 1.95 \text{ rad/s}} = 0$$

Somit wird

$$\psi = \text{ArcTan} \left(\frac{r'_L(\omega) \sin(\varphi_L(\omega))}{r'_L(\omega) \cos(\varphi_L(\omega))} \right) = \text{ArcTan} \left(\frac{\sin(\varphi_L(\omega_c))}{\cos(\varphi_L(\omega_c))} \right) = 180^\circ + \varphi_L(\omega_c) = 60^\circ.$$

Bemerkung: $r'_L(\omega_c)$ lässt sich kürzen und muss somit nicht berechnet werden.

- b) (2 Punkte) Die Größen r_p und φ_p können direkt aus der Tabelle herausgelesen werden $r_p = 0.74$ und $\varphi_p = -2.595 \text{ rad}$. r'_p und φ'_p werden mit der Finite Differenzen Methode bestimmt:

$$r'_P \approx \frac{0.71 - 0.78}{2.05 \text{ rad/s} - 1.95 \text{ rad/s}} = -0.7 \text{ s/rad}$$

$$\varphi'_P \approx \frac{-2.623 \text{ rad} + 2.566 \text{ rad}}{2.05 \text{ rad/s} - 1.95 \text{ rad/s}} = -0.57 \text{ s}$$

- c) (4 Punkte) Anhand der Tabelle bestimmt man die benötigten Größen $r_P = 1$, $\varphi_P = -136^\circ$ und die Ableitungen

$$r'_P \approx \frac{0.97 - 1.07}{1.7 \text{ rad/s} - 1.6 \text{ rad/s}} = -1 \text{ s/rad}$$

$$\varphi'_P \approx \frac{-2.406 \text{ rad} + 2.334 \text{ rad}}{1.7 \text{ rad/s} - 1.6 \text{ rad/s}} = -0.72 \text{ s}$$

Nun können die Reglerparameter berechnet werden:

$$k_p = -\frac{1}{r_P} \cos(\varphi - \varphi_P) \approx -1 \cos(180^\circ) = 1$$

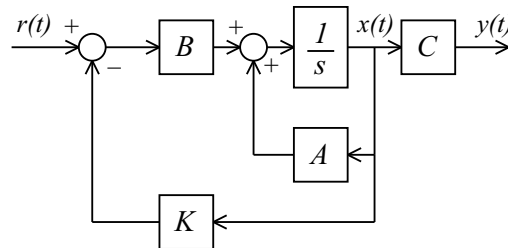
$$\begin{aligned} T_d &= \frac{1}{2} \left[\tan(\psi - \varphi_P) \left(\frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(\varphi - \varphi_P) \right) + \tan(\varphi - \varphi_P) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right] \\ &\approx \frac{1}{2} \left[\tan(0) \left(\frac{r'_P}{r_P} - \varphi'_P \tan(180^\circ) \right) + \tan(180^\circ) \left(\frac{1}{\omega_c} - \frac{r'_P}{r_P} \right) - \varphi'_P \right] \\ &= -\frac{1}{2} \varphi'_P \approx 0.36 \text{ s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_i &= [T_d \omega_c^2 - \tan(\varphi - \varphi_P) \omega_c]^{-1} \\ &\approx [0.36 \cdot 1.65^2 - \tan(180^\circ) \cdot 1.65]^{-1} = [0.36 \cdot 1.65^2]^{-1} \text{ s} \approx 1.02 \text{ s} \end{aligned}$$

- d)** (1 Punkt) Da nur ein Punkt spezifiziert wird kann bei dieser Auslegungsmethode nie Stabilität garantiert werden. Diese muss immer nach dem Reglerdesign zusätzlich kontrolliert werden. Man kann somit keine Aussage über die Stabilität machen.

Aufgabe 5 (LQR)**7 Punkte**

Eine Firma braucht einen LQ-Regulator (LQR)



für ein System mit den Systemgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + u(t) \\ y(t) &= x_1(t).\end{aligned}$$

Sie haben gestern die Lösung dieses Problems erarbeitet und fahren jetzt im Tram zur Firma. Unglücklicherweise haben Sie Ihr Laptop Zuhause vergessen. Sie erinnern sich nur, dass das geschlossene Regelsystem (siehe Struktur oben!) einen Pol bei -1 besitzt und dass abhängig von R der zweite Pol bei $-1, -2$, oder $-1/3$ ist.

Um das erarbeitete Resultat zu rekonstruieren, gehen Sie die folgende Rechnungsschritte durch:

- a) (4 Punkte) Berechnen Sie die Verstärkungsmatrix $K = (K_1, K_2)$ in Funktion von R für die folgende Gewichtung des Zustandsvektors:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) (3 Punkte) Benutzen Sie das Resultat $K = (K_1, K_2)$ von a), um die verschiedenen Werte von R zu bestimmen, die dem ersten Pol (-1) und den drei anderen vermuteten Polen ($-1, -2$, or $-1/3$) entsprechen.

Alternativ: Falls das Resultat von a) nicht vorliegt, bestimmen Sie den Zusammenhang von K_1 und K_2 mit den Polen des Regelsystems.

Lösung 5

- a) (4 Punkte) Für

$$\Phi = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

lautet die Matrix-Riccati-Gleichung:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{R} \cdot \begin{pmatrix} s_2^2 & s_2 s_3 \\ s_2 s_3 & s_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -s_1 + s_2 \\ 0 & -s_2 + s_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -s_1 + s_2 & -s_2 + s_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2s_1 - 2s_2 + \frac{s_2^2}{R} & s_2 - s_3 + \frac{s_2 s_3}{R} \\ s_2 - s_3 + \frac{s_2 s_3}{R} & -1 + \frac{s_3^2}{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Mit der Gleichung an der Position (2,2) erhalten wir direkt s_3

$$-1 + \frac{s_3^2}{R} = 0 \Rightarrow s_3 = \pm\sqrt{R}$$

Weil Φ positiv-definit sein muss, ist die einzige Lösung $s_3 = \sqrt{R}$.

Die Gleichung an der Position (2,1) (resp. (1,2)) liefert s_2 mit Hilfe von s_3

$$s_2 - s_3 + \frac{s_2 s_3}{R} = 0 \Rightarrow s_2 + \frac{s_2 s_3}{R} = s_3 \Rightarrow s_2 = \frac{s_3}{1 + \frac{s_3}{R}} \Rightarrow s_2 = \frac{R}{1 + \sqrt{R}}$$

Der Wert von s_1 wird für die Berechnung von K nicht benötigt, da

$$K = R^{-1} B^T \Phi = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s_2}{R} & \frac{s_3}{R} \end{pmatrix}$$

Mit s_2 und s_3 erhalten wir die Verstärkungsmatrix des LQR K in Abhängigkeit von R

$$K = \begin{pmatrix} \frac{R}{1+\sqrt{R}} & \sqrt{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\sqrt{R}} & \frac{1}{\sqrt{R}} \end{pmatrix}$$

b) (3 Punkte) Die Pole des Systems sind die Eigenwerte von $A - BK$

$$\begin{aligned} A - BK &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 - K_1 & -K_2 \end{pmatrix} \\ \det(\lambda I - A + BK) &= \det \begin{pmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -1 + K_1 & \lambda + K_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= -1 \quad \lambda_2 = -K_2 \end{aligned}$$

Mit $K_2 = \frac{1}{\sqrt{R}}$ erhalten wir für die Pole:

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{R}}$$

Die Werte von R , die den drei vermuteten Polen $(-1, -2, \text{ or } -1/3)$ entsprechen sind somit:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{R}} &= -1 \Rightarrow R = 1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{R}} &= -2 \Rightarrow R = 1/4 \\ \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{R}} &= -1/3 \Rightarrow R = 9 \end{aligned}$$

Alternativ: Falls das Resultat von a) nicht vorliegt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \quad \lambda_2 = -K_2 \\ \Rightarrow -K_2 &= -1 \Rightarrow K_2 = 1 \\ \Rightarrow -K_2 &= -2 \Rightarrow K_2 = 2 \\ \Rightarrow -K_2 &= -1/3 \Rightarrow K_2 = 1/3 \end{aligned}$$

Der Wert von K_1 beeinflusst die Pole des geschlossenen Systems nicht!

Aufgabe 6 (LQG/LTR)**10 Punkte**

Sie haben ein System wie folgt modelliert:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ y(t) &= 0.5x(t)\end{aligned}$$

Nun möchten Sie gemäss folgenden Schritten einen Regler für das System auslegen:

- a) (2 Punkte) Entwerfen eines LQ-Reglers K mit Zustandsrückführung für $r = 1$ (Hinweis: In MATLAB[®] würden Sie schreiben `K=lqr(A,b,c'*c,r);`).
- b) (2 Punkte) Entwerfen eines LTR-Beobachters L für $q = 1/32$ (Hinweis: in MATLAB[®] würden Sie schreiben `L=lqr(A',c',b*b',q);`).
- c) (4 Punkte) Nach einigen Untersuchungen stellen Sie fest, dass das ausgelegte Regelsystem einen stationären Regelfehler aufweist. Entwerfen Sie nun einen neuen LQ-Regler K für $r = 1$, mit **integral action** (mit integrierendem Verhalten), dessen Verstärkung $\gamma = 1$ ist. (Hinweis: Erweitern Sie das ursprüngliche System zu einem System zweiter Ordnung $\{\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}\}$ und berechnen Sie anschliessend den neuen Regler. In MATLAB[®] würden Sie schreiben `K=lqr(A_tilde,b_tilde,c_tilde'*c_tilde,r*eye(2));`).
- d) (2 Punkte) Zeichnen Sie ein detailliertes Signalflussbild des gesamten Regelsystems in b) und c) inklusive Regelstrecke, Beobachter und Regler (verwenden Sie dabei die zur Verfügung stehenden Zahlenwerte!)

Lösung 6

- a) (2 Punkte) Die Zustandsrückführmatrix des LQG-Reglers wird bestimmt durch

$$K = r^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi,$$

wobei Φ die positiv-definite Lösung der folgenden Matrix-Riccati-Gleichung ist:

$$\Phi \cdot B \cdot r^{-1} \cdot B^T \cdot \Phi - \Phi \cdot A - A^T \cdot \Phi - C^T \cdot C = 0.$$

Für die System-Matrizen $A = -1$, $B = 1$, $C = 1/2$ erhalten wir:

$$\Phi \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \Phi - \Phi \cdot (-1) - (-1) \cdot \Phi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \Phi^2 + 2 \cdot \Phi - \frac{1}{4} = 0,$$

$$(\Phi + 1)^2 - 1 - \frac{1}{4} = 0,$$

$$(\Phi + 1)^2 = \frac{5}{4},$$

$$\Phi = -1 \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-2 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die einzige positiv-definite Lösung der Riccati-Gleichung ist $\Phi = \frac{-2+\sqrt{5}}{2} \approx 0.118034$. Daraus erhalten wir die Zustandsrückführung

$$K = 1 \cdot 1 \cdot \frac{-2 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{5}}{2}.$$

- b) (2 Punkte) Die Verstärkungsmatrix der des LTR-Beobachters wird bestimmt durch

$$L = (q^{-1} \cdot C \cdot \Phi)^T,$$

wobei Φ die positiv-definite Lösung der folgenden Matrix-Riccati-Gleichung ist:

$$\Phi \cdot C^T \cdot q^{-1} \cdot C \cdot \Phi - \Phi \cdot A^T - A \cdot \Phi - B \cdot B^T = 0.$$

Für die System-Matrizen $A = -1$, $B = 1$, $C = 1/2$ erhalten wir:

$$\Phi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Phi - \Phi \cdot (-1) - (-1) \cdot \Phi - 1 \cdot 1 = 8 \cdot \Phi^2 + 2 \cdot \Phi - 1 = 0,$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0,$$

$$\left(\Phi + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$\Phi = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{8}.$$

Die einzige positiv-definite Lösung ist $\Phi = \frac{-1+3}{8} = \frac{1}{4}$. Daraus erhalten wir die Verstärkung des Beobachters

$$L = \left(\frac{32}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = 4.$$

- c) (4 Punkte) Die System-Matrizen $\{\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}\}$ des mit einem Integrator (Verstärkung $\gamma = 1$) erweiterten Systems lauten

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{c} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für

$$\Phi = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

lautet die Matrix-Riccati-Gleichung

$$\begin{pmatrix} s_1^2 & s_1 s_2 \\ s_1 s_2 & s_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -s_1 - \frac{s_2}{2} & 0 \\ -s_2 - \frac{s_3}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -s_1 + s_2 & -s_2 - \frac{s_3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + 2s_1 + s_2 + s_1^2 & s_2 + \frac{s_3}{2} + s_1 s_2 \\ s_2 + \frac{s_3}{2} + s_1 s_2 & -1 + s_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Gleichung an der Position (2,2) erhalten wir direkt s_2

$$-1 + s_2^2 = 0 \Rightarrow s_2 = \pm 1$$

Die Gleichung an der Position (1,1) liefert s_1 mit Hilfe von s_2

$$-\frac{1}{4} + 2s_1 + s_2 + s_1^2 = 0 \Rightarrow (s_1 + 1)^2 - 1 - \frac{1}{4} + s_2 = 0$$

$$\Rightarrow (s_1 + 1)^2 = -s_2 + \frac{5}{4} \Rightarrow s_1 = -1 \pm \sqrt{-s_2 + \frac{5}{4}}$$

Da Φ positiv sein muss, muss s_1 positiv sein:

$$s_1 = -1 \pm \sqrt{-s_2 + \frac{5}{4}} \Rightarrow s_2 = -1$$

$$\Rightarrow s_1 = -1 + \sqrt{-(-1) + \frac{5}{4}} = \frac{-2 + \sqrt{9}}{2} = \frac{-2 + 3}{2}$$

Da s_1 positiv sein muss, ist $s_1 = \frac{1}{2}$. Der Wert für s_3 erhalten wir schliesslich durch die Gleichung an der Position (1,2) oder (2,1):

$$s_2 + \frac{s_3}{2} + s_1 s_2 = 0 \Rightarrow s_3 = 2 \cdot (-s_2 - s_1 s_2) = 2 \cdot (1 + \frac{1}{2}) = 3$$

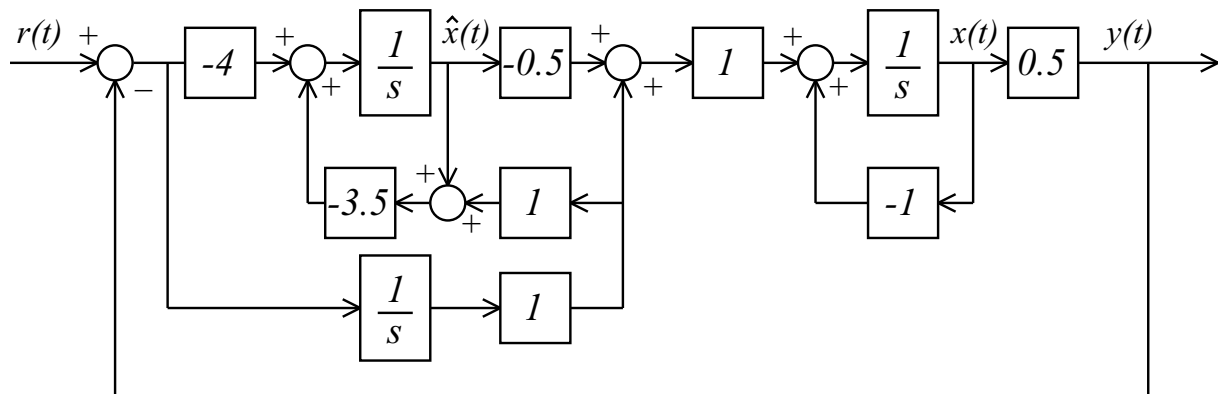
Mit den berechneten Werten lautet die Lösung für die Matrix Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Überprüfung: Φ ist positiv-definit! Die Verstärkungsmatrix K des LQR ist somit:

$$K = R^{-1} B t^T \Phi = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

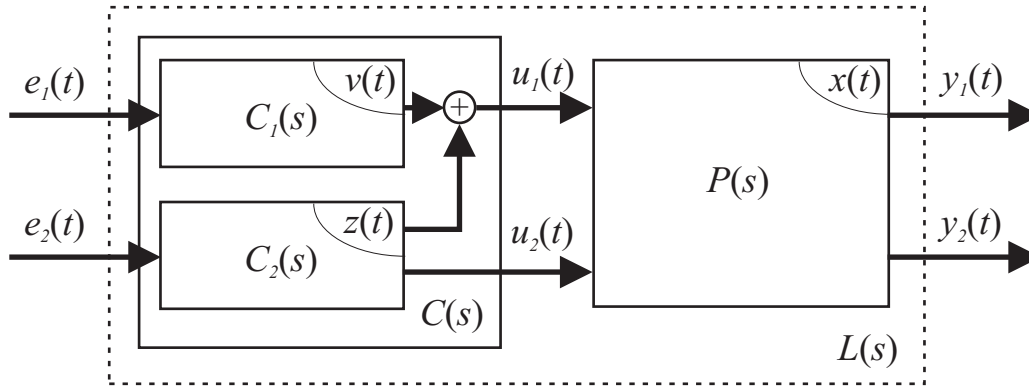
- d) (2 Punkte) Das Signalflussbild des LQG/LTR-Regelsystems mit den gerundeten Zahlenwerte ist unten dargestellt.



Aufgabe 7 (MIMO-Systeme, Singularwerte)**7 Punkte**

Bei dieser Aufgabe sind beide Teilaufgaben unabhängig voneinander lösbar.

- a) (4 Punkte) Gegeben sei folgende Serieschaltung eines MIMO-Reglers $C(s)$ und einer Regelstrecke $P(s)$.



Der MIMO-Regler setzt sich aus zwei ausgangsseitig gekoppelten Subsystemen $C_1(s)$ und $C_2(s)$ zusammen. $C_1(s)$ ist gegeben durch die Systemmatrizen F_1, G_1, H_1, K_1 und hat den Zustandsvektor $v(t)$. $C_2(s)$ hat den Zustandsvektor $z(t)$ und die Matrizen F_2, G_2, H_2, K_2 . Die Regelstrecke wird durch die Matrizen A, B, C, D beschrieben und hat den Zustandsvektor $x(t)$.

Bestimmen Sie die Matrizen A_L, B_L, C_L und D_L der folgenden Zustandsraumdarstellung der Kreisverstärkung $L(s)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = A_L \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + B_L \cdot e(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C_L \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + D_L \cdot e(t) \quad (2)$$

Verwenden Sie für die gegebenen Matrizen H_2, K_2, B und D folgende Definitionen:

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_{2a} \\ H_{2b} \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} K_{2a} \\ K_{2b} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_a & B_b \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_a & D_b \end{pmatrix} \quad (3)$$

- b) (3 Punkte) Gegeben sei folgende Übertragungsfunktion:

$$P(s) = \begin{pmatrix} \frac{2}{s+1} & -\frac{2}{s+1} \\ 0 & -\frac{2}{s+1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Bestimmen Sie die Singularwerte der Übertragungsfunktion $P(s)$ bei der Frequenz $\omega = 1$ rad/s.

Lösung 7

- a) (4 Punkte) Die Eingänge $u_1(t)$ und $u_2(t)$ der Regelstrecke $P(s)$ können geschrieben werden als:

$$u_1(t) = H_1 \cdot v(t) + K_1 \cdot e_1(t) + H_{2a} \cdot z(t) + K_{2a} \cdot e_2(t) \quad (5)$$

$$u_2(t) = H_{2b} \cdot z(t) + K_{2b} \cdot e_2(t) \quad (6)$$

Für die Regelstrecke $P(s)$ gilt:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + \begin{pmatrix} B_a & B_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + \begin{pmatrix} D_a & D_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Setzt man $u_1(t)$ und $u_2(t)$ ein, erhält man für die Zustandsraumdarstellung der Kreisverstärkung $L(s)$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_a \cdot H_1 & B_a \cdot H_{2a} + B_b \cdot H_{2b} \\ 0 & F_1 & 0 \\ 0 & 0 & F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_a \cdot K_1 & B_a \cdot K_{2a} + B_b \cdot K_{2b} \\ G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \cdot e(t) \quad (9)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} C & D_a \cdot H_1 & D_a \cdot H_{2a} + D_b \cdot H_{2b} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \\ z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_a \cdot K_1 & D_a \cdot K_{2a} + D_b \cdot K_{2b} \end{pmatrix} \cdot e(t) \quad (10)$$

- b) (3 Punkte) Die Übertragungsfunktions $P(s)$ hat an der Stelle $\omega = 1$ rad/s folgenden Wert:

$$P(j) = \begin{pmatrix} 1-j & j-1 \\ 0 & j-1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Die Singularwerte einer Matrix P berechnen sich zu $\sigma_i\{P\} = \sqrt{\lambda_i\{\bar{P}^T P\}}$.

Berechnen der Hessematrix $H = \bar{P}^T P$:

$$H = \bar{P}^T(j)P(j) = \begin{pmatrix} 1+j & 0 \\ -1-j & -1-j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-j & j-1 \\ 0 & j-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Berechnen der Eigenwerte von H :

$$\det(H - \lambda I) = 0 \quad (13)$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \quad (14)$$

Für die Eigenwerte erhält man folgende Lösung:

$$\lambda_1 = 3 - \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = 3 + \sqrt{5}$$

Und schliesslich für die Singularwerte:

$$\sigma_1\{P(j)\} = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{3 - \sqrt{5}} \text{ und } \sigma_2\{P(j)\} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

Aufgabe 8 (MULTIPLE-CHOICE — LQR und LQG/LTR)**8 Punkte**

Entscheiden Sie bei den folgenden Aussagen, ob sie richtig oder falsch sind. Markieren Sie das entsprechende Kästchen mit einem Kreuz (☒).

Die Antworten sind **nicht** zu begründen. Alle Fragen sind gleich gewichtet (1 Punkt). Falsch beantwortete Fragen geben entsprechend Punkteabzug (−1 Punkt). Nicht beantwortete Fragen geben 0 Punkte. Das Punkteminimum für die gesamte Aufgabe beträgt 0 Punkte.

- a) Hat eine Matrix Diagonalform, sind die Singularwerte gerade der Betrag der Diagonalelemente.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- b) Ist die RGA-Matrix eine Einheitsmatrix, dann hängt der erste Ausgang y_1 nur vom ersten Eingang u_1 ab, der zweite Ausgang y_2 vom zweiten Eingang u_2 usw.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- c) Ein MIMO-System hat so viele Singularwerte, wie die Ordnung des Systems ist.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- d) Eine Totzeit von 1 Sekunde erzeugt bei einer Frequenz von 2 rad/s einen Phasenabfall von 0.5 rad.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- e) Die Nullstellen eines MIMO-Systems sind die Nullstellen der Einträge von $P(s)$.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- f) Je grösser $\max_{\omega} |T(j\omega)|$, desto robuster ist das Regelsystem. (T: komplementäre Sensitivität)
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- g) Die Matrix $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist positiv definit.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.
- h) Das LTR-Verfahren (mit $q > 0$) garantiert eine kanalweise Phasenreserve des Regelsystems von mindestens $\pm 60^\circ$.
- ☐ Richtig.
☐ Falsch.

Lösung 8

- a) *Richtig.*
- b) *Richtig.*
- c) *Falsch.*
- d) *Falsch.*
- e) *Falsch.*
- f) *Falsch.*
- g) *Falsch.*
- h) *Falsch.*