

Berechnungsmethoden der Energie- und Verfahrenstechnik, FS 2010 Übung 1

Ausgabe: 24. Februar 2010 – Abgabe: bis Montag abend, 1. März 2010

Aufgabe 1: Einfluss der Maschinengenauigkeit bei der numerischen Differentiation

Die Ableitung $f'(x_0)$ der differenzierbaren Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 kann durch den Differenzenquotienten

$$\frac{\delta f}{\delta x}(x_0, \Delta x) := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

angenähert werden, der von x_0 und von der Schrittweite Δx abhängt. Bei Rechnungen mit exakter Arithmetik kann die Genauigkeit der Annäherung durch Verringerung der Schrittweite Δx beliebig verbessert werden. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn der Differenzenquotient numerisch auf Rechnern mit endlicher Genauigkeit ausgewertet wird. Die folgende Aufgabe soll den angesprochenen Sachverhalt verdeutlichen.

Es werden die Differenzenquotienten $\frac{\delta f_j}{\delta x}(0, \Delta x)$, $j = 1, 2$, für die Funktionen

$$f_1(x) = \sin(\sqrt{2} \cdot x), \quad \text{und} \quad f_2(x) = \exp(\sqrt{2} \cdot x) \quad (2)$$

an der Stelle $x = 0$ ausgewertet und mit den exakten Ableitungen $f'_j(0)$ verglichen.

- a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript, welches die Differenzenquotienten $\frac{\delta f_j}{\delta x}(0, \Delta x)$, $j = 1, 2$ für $\Delta x = 1/2^k$, $k = 1, \dots, 30$ berechnet.
- b) Tragen Sie die Fehler

$$\epsilon_j(\Delta x) = \left| \frac{\delta f_j}{\delta x}(0, \Delta x) - f'_j(0) \right|, \quad j = 1, 2 \quad (3)$$

als Funktionen der Schrittweite Δx in einem doppeltlogarithmischen Diagramm auf. Stellen Sie im gleichen Diagramm auch die Funktion

$$\chi(\Delta x) = \frac{\text{eps}}{\Delta x} \quad (4)$$

dar, wobei eps die in Matlab vordefinierte Konstante ist, welche die Maschinengenauigkeit der verwendeten Maschine darstellt.

- c) Erklären Sie das Verhalten der beiden Kurven $\epsilon_j(\Delta x)$, $j = 1, 2$. Warum fällt $\epsilon_1(\Delta x)$ für abnehmende Δx monoton ab? Warum nimmt ϵ_2 wieder zu, wenn Δx kleiner als ca. 10^{-7} wird? Warum nehmen $\epsilon_2(\Delta x)$ und $\chi(\Delta x)$ für $\Delta x < 10^{-7}$ ähnliche Werte an?

Bitte wenden.

Aufgabe 2: Diskrete Fourier Transformation

Sei N eine gerade Zahl mit $N = 2K$ und $K \in \mathbb{N}$. Sei $\Delta x := 2\pi/N$ und seien $x_j := j\Delta x$, $j = 1, 2, \dots, N$, die Knoten eines äquidistanten Gitters auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Seien $\underline{F}_k$, $k = -K+1, \dots, K$, die diskreten Fourier Harmonischen definiert in Anhang A3.2 des Skriptes:

$$\underline{F}_k := [e^{ikx_1} \ e^{ikx_2} \ \dots \ e^{ikx_N}]^T \in \mathbb{C}^N. \quad (5)$$

Es wird die diskrete Fourier-Transformation einer periodischen Funktion $f(x)$ betrachtet, mit $f(x+2k\pi) = f(x)$ für $k \in \mathbb{N}$. Dafür sind nur die diskreten Werte $f_j := f(x_j)$, $j = 1, \dots, N$, an den Gitterknoten x_j relevant, die in dem Vektor $\underline{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N]^T \in \mathbb{C}^N$ zusammengefasst werden.

Die Fourier Koeffizienten $\hat{f}_k$, $k = -K+1, \dots, K$, werden wie folgt definiert (siehe Gleichung (A.25) im Anhang des Skriptes):

$$\hat{f}_k := (\underline{f}, \underline{F}_k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j \cdot \overline{e^{ikx_j}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j \cdot e^{-ikx_j}, \quad (6)$$

wobei der Überstrich die komplexe Konjugation bezeichnet. Die Fourier Koeffizienten werden in dem Vektor $\underline{\hat{f}} := [\hat{f}_{-K+1} \ \hat{f}_{-K+2} \ \dots \ \hat{f}_K]^T \in \mathbb{C}^N$ zusammengefasst.

Die folgenden Aufgaben sind in Form eines Matlab-Skriptes zu implementieren, mit $N = 20$ und $f(x) = 3 + 4\cos(2x - 3)$.

- Definieren Sie die Matrix $\underline{\underline{F}}$, für die gilt $\underline{\hat{f}} = \underline{\underline{F}} \underline{f}$. Speichern Sie $\underline{f}$ in einem Matlab Vektor und verwenden sie die Matrix $\underline{\underline{F}}$, um die Fourier Koeffizienten $\underline{\hat{f}}$ zu berechnen.
- Es sollten die Koeffizienten g_k , $k = -K+1, \dots, K$, berechnet werden, für die gilt

$$\underline{f} = \sum_{k=-K+1}^K g_k \underline{F}_k. \quad (7)$$

Definieren Sie die Matrix $\underline{\underline{G}}$ so, dass das lineare Gleichungssystem (7) in der Form

$$\underline{\underline{G}} \underline{g} = \underline{f}, \quad (8)$$

mit $\underline{g} = [g_{-K+1} \ g_{-K+2} \ \dots \ g_K]^T$ geschrieben werden kann und berechnen Sie $\underline{g}$.

- Stellen Sie $|\hat{f}_k|$, $Re(\hat{f}_k)$, $Im(\hat{f}_k)$, $|g_k|$, $Re(g_k)$, $Im(g_k)$ als Funktionen von k für $-K < k \leq K$ in einem x - y -Diagramm dar.
- Wie sieht das Produkt $\underline{\underline{F}} \underline{\underline{G}}$ aus? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den beiden Matrizen.