# Lineare Modelle

abharadwaj HS22

## Vektorraum

1.) $0 \in V$ (neutrales Element)

2.) $v + w \in U$ $(v, w \in V)$

3.) $\lambda \cdot v \in V$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

## Dimension

$\dim \mathbb{R}_n = n$ $\quad \dim M_{n \times n} = n^2$

$\dim \mathbb{P}_n[x] = n+1$ (alle Polynome bis Grad n)

## Basis und Erzeugendensysteme

1.) linear unabhängig? $\det \neq 0$ von EV Matrix

2.) Anz Elemente = dim (falls nein: nur EZS)

Basis ⇒ kleinstmögliches EZS

falls EV einer Matrix eine Basis bilden

⟶ Eigenbasis und diagonalisierbar

## Stationäre Lösungen

homogen: $y' = 0 = A \cdot y$

$\det(A) \neq 0 \rightarrow$ nur $y = 0$ (triviale Lsg.)

$\det(A) = 0 \rightarrow y = 0$; alle EV zu $\lambda = 0$ $(\infty)$

inhomogen: $y' = 0 = A \cdot y + g \rightarrow g$ konstant!

$\det(A) \neq 0 \rightarrow y_\infty = -A^{-1} \cdot g$

$\det(A) = 0 \rightarrow \text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|-g)$: $\infty$ viele Lsg.

$\searrow \text{Rang}(A) < \text{Rang}(A|-g)$: keine Lsg.

## Diagonalisierbarkeit

1.) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_n$

2.) A ist symmetrisch $\quad A = A^T$

3.) A ist hermetisch $\quad A = \bar{A}^T$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \longrightarrow T = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = T \cdot D \cdot T^{-1} \qquad T^{-1} \cdot A \cdot T = D}$$

$T^{-1}$ für 2x2: $\dfrac{1}{\underbrace{ad-bc}_{\det A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

## Matrixexponential

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix} \qquad e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{e^A = T \cdot e^D \cdot T^{-1} \qquad e^{tA} = T \cdot e^{tD} \cdot T^{-1}}$$

Falls $AB = BA$: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

Inverse: $(e^A)^{-1} = e^{-A}$

$\det(e^A) \neq 0$, $e^A$ ist invertierbar

$\det(e^{-A}) = (\det(e^A))^{-1}$

$\det(e^A) = e^{\lambda_1} \cdot e^{\lambda_2} \cdot e^{\lambda_3} = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$

EW von $e^A$ immer positiv bei reelen EW

## Spezialfall $e^A$ bei 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

$BC = CB \rightarrow e^A = e^{B+C} = e^B e^C$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^d \end{pmatrix}}_{e^B} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e^C} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^a & b \cdot e^a \\ 0 & e^d \end{pmatrix}}_{e^A}$$

## Jordan – Normalform (A nicht diagonalisierbar)

$$\boxed{A = P \cdot J \cdot P^{-1} \qquad e^{tA} = P \cdot e^{tJ} \cdot P^{-1}}$$

$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$ (2x2 $J_i$ mit $\lambda = \lambda_i$)

$$e^{tJ_i} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Bsp. } J = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{matrix}}^{J_i} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\lambda_j}_{J_j} \end{pmatrix}$$

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

Pro Jordanblock nur 1 EW!

Einträge über $\lambda_i \rightarrow 1$

Auch mehrere J-Blöcke pro EW möglich.

Bsp. $\lambda_1 = 3$; $\lambda_{2,3} = 4$

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{matrix}} \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix}$$

## Entkopplung

A muss diagonalisierbar sein!

inhomogener Fall: $y'(t) = A\cdot y(t) + g(t)$

Transformation zu: $x' = D\cdot x + h$

$$\boxed{h = T^{-1}\cdot g \qquad x = T^{-1}\cdot y \qquad y = Tx}$$

$x_i' = \lambda_i \cdot x_i + h_i$ → Variation der Konstanten

Wenn alle $x_i$ bestimmt sind: $y = Tx$

## Mehrdimensionale Variation der Konstanten

inhomogener Fall: $y'(t) = A\cdot y(t) + g(t)$

$$\boxed{y(t) = \underbrace{e^{tA}}_{\text{homogen}}\cdot \underbrace{C}_{=y(0)} + \underbrace{\int_0^t e^{(t-u)A}\cdot g(u)\,du}_{\text{inhomogener Teil}}}$$

1.) $e^{tA}$ berechnen → im Integral $(t-u)$ statt $t$

2.) $b(u)$ ist $b(t)$ mit $u$ statt $t$

3.) $e^{(t-u)A}\cdot b(u)$ : Matrixvektorprodukt

4.) Jede Zeile einzeln integriern

### Zusatz: hermetische Matrix

→ diagonalisierbar: $A = \bar{A}^T$

Bsp. $\begin{pmatrix} i & 2+i & i \\ 2-i & 9i & 1-i \\ -i & 1+i & 2 \end{pmatrix}$

# DGL – Systeme

1.) Fixpunkte finden: $x_n' = 0$

oft $x_n = 0$ auch Fixpunkte!

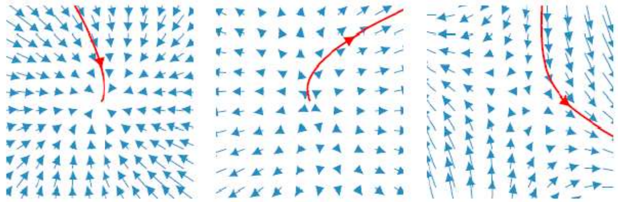
2.) Jacobimatrix $DF = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{pmatrix}$

3.) Fixpunkte einsetzen → det und Spur aufstellen

$\det = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \qquad \text{Spur} = \lambda_1 + \lambda_2$

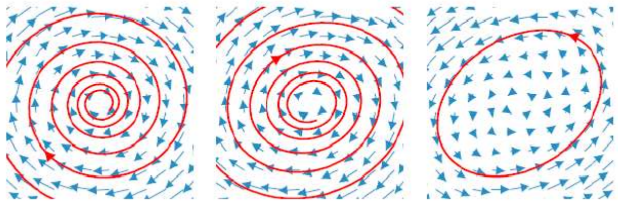
| | | |
|---|---|---|
| $\det < 0$: | Sattelpunkt | |
| $\det > 0$: | Spur $< 0$ : stabil | |
| | Spur $> 0$ : instabil | |

Für reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ der Matrix $A$ unterscheiden wir die drei Fälle:



$\lambda_1, \lambda_2 < 0$: "stabil" — $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ "instabil" — $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ "Sattelpunkt"

Für komplexe EW $\lambda_1, \lambda_2$ mit $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ haben wir auch drei Fälle.



negativer Realteil: "stabil" — positiver Realteil: "instabil" — rein imaginär: "Zentrum"

## Linearisierung

$y(t) = y_\infty + h(t)$

$h'(t) = DF(y_\infty)\cdot h(t)$

$h(t) = e^{DF(y_\infty)t}\cdot h_0$

$$\boxed{y(t) = y_\infty + e^{DF(y_\infty)t}(y_0 - y_\infty) \qquad y_0 = y(0)}$$

# SIR-Modelle

$S' = -cSI$ susceptible

$I' = cSI - wI$ infected

$R' = wI$ recovered

$N_0 = S + I + R$ → $N' = 0 = S' + I' + R'$

Stabilität der Fixpunkte → $\boxed{F'(y_\infty) < 0: \text{stabil} \quad F'(y_\infty) > 0: \text{instabil}}$

$S(t_{max}) = w/c$ (dort ist $I$ maximal)

Oft ist 0 ein Fixpunkt und zwei aus Mitternachtsf.

# Fourier - Reihen

## Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$ a, b meistens $-1;1$

falls $f \cdot g$ ungerade $\rightarrow \langle f, g\rangle = 0$

$\langle f, g\rangle = 0 \rightarrow$ orthogonal

## Norm

$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle} \rightarrow$ „Länge" von $f$

$$\boxed{\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2\, dx\right)^{1/2}}$$

$f$ normieren: $\tilde{f} = \dfrac{f}{\|f\|}$

## Orthonormalbasis

Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$$\langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$ → normal / → orthogonal

$$P(f) = C_1 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + \dots + C_n \cdot v_n$$

$$C_n = \langle v_n, f\rangle$$

→ $C_n$ sind Faktoren der Linearkombination um $f$ im VR aufzuspannen

## Reele Fourierreihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(nx \frac{2\pi}{T}\right) + b_n \sin\left(nx \frac{2\pi}{T}\right)$$

## Fourierkoeffizienten

$$\boxed{\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, dx \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(nx \frac{2\pi}{T}\right) dx \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(nx \frac{2\pi}{T}\right) dx \end{aligned}}$$

$f(x)$ ungerade $\quad f(-x) = -f(x)$

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(nx \cdot \frac{2\pi}{T}\right) dx$$

$f(x)$ gerade $\quad f(-x) = f(x)$

$b_n = 0$

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(nx \cdot \frac{2\pi}{T}\right) dx$$

## Komplexe Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{2\pi i n x / T}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cdot e^{-2\pi i n x / T}}$$

## Reel → Komplex

$$c_n = \begin{cases} (a_n - i b_n)/2 & n > 0 \\ a_0 / 2 & n = 0 \\ (a_{-n} + i b_{-n})/2 & n < 0 \end{cases}$$

## Komplex → Reel

$a_n = c_n + c_{-n}$

$a_0 = 2 \cdot c_0$

$b_n = i(c_n - c_{-n})$

## Trigonometrische Identitäten $\quad n \in \mathbb{Z}$

$\sin(n\pi) = 0 \qquad \cos(n\pi) = (-1)^n$

$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$

$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

$(1 - (-1)^n) = 2$ ($n$ ungerade) $= 0$ ($n$ gerade)

nur $n$ gerade: $2n \qquad$ nur $n$ ungerade: $2n+1$

$-(-1)^n = (-1)^{n+1}$

$\cos(n\frac{\pi}{2}) = 0$ $n$ ungerade $\quad \sin(n\frac{\pi}{2})$ $n$ gerade

$\cos(n\frac{\pi}{2}) = (-1)^{n/2}$ $n$ gerade $\quad \sin(n\frac{\pi}{2}) = (-1)^{(n-1)/2}$ $n$ ung.

$\sinh(0) = 0$; $\cosh(0) = 1$

## Eulersche Identitäten

$\sinh(x) = 1/2\,(e^x - e^{-x})$

$\cosh(x) = 1/2\,(e^x + e^{-x})$

$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$; $e^{ix} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$

$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$; $e^{-inx} = \cos(nx) - i \cdot \sin(nx)$

# Partielle DGLs

**Gradient** func → vec

$$\mathrm{grad}(u) = \nabla(u) = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx_1} \\ \frac{du}{dx_n} \end{pmatrix}$$

**Divergenz** vec → func

$$F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \to \mathrm{div}(F) = \nabla F = \frac{dP}{dx_1} + \frac{dQ}{dx_2}$$

**Laplace-Operator $\Delta$** func → func

$$\Delta(u) = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(u)) = \sum^{n} \frac{d^2 u}{d^2 x_n}$$

Bsp. $\Delta(u(x,t)) = u_{xx} + u_{tt}$

**Ansätze für ODEs**

$$T' = w^2 T \to T = C \cdot e^{w^2 t}$$

$$T' = -w^2 T \to T = C \cdot e^{-w^2 t}$$

$$T'' = w^2 T \to T = A \cdot e^{wt} + B \cdot e^{-wt}$$

$$T'' = -w^2 T \to T = A\cos(wt) + B\sin(wt)$$

Spezialfall mit $T(r)$ in Polarkoord.:

$$r^2 T'' + r T' + n^2 T = 0 \to T = r^n$$

# PDE Rezept

**Rezept.** *(Lösen einer PDE mithilfe der Fouriermethode)*

1. *Separationsansatz: Teile $u(x,t)$ auf in ein Produkt zweier Funktionen $X(x)$ und $T(t)$, also*

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

   *und setze dies in die PDE ein.*

2. *Stelle die PDE nun so um, dass du auf einer Seite alles mit $X(x)$ und seinen Ableitungen hast und auf der anderen Seite $T(t)$.*

3. *Setze dann beide Seiten gleich einer Konstanten $-w^2$ falls zweite Ableitungen vorkommen, und sonst einfach gleich der Konstante $c$.*

4. *Du erhältst nun zwei ODE welche du lösen kannst. Im Allgemeinen helfen folgende zwei Lösungsansätze:*

$$g'(t) = ag(t) \implies g(t) = Ce^{at}$$
$$f''(x) = -w^2 f(x) \implies f(x) = A\sin(wx) + B\cos(wx)$$

5. *Mache Gebrauch von deiner Randbedingung. Falls beispielsweise $u(0,t) = 0$ ein Randbedingung ist, dann untersuche nur $X(0) = 0$ und finde so $w$ beziehungsweise $c$. Die Konstante $w$ sollte von $n \in \mathbb{N}$ abhängig gemacht werden.*

6. *Die Basislösung ist dann $u(x,t) = X(x)T(t)$. Schaue nun, ob du Konstanten zusammenführen kannst. Vor allem Konstanten der Form $A \cdot C$ können zu einer Konstanten fusioniert werden. Die allgemeine Lösung ist*

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$$

   *wobei die Koeffizienten $A \to A_n$ nun von $n$ abhängig gemacht werden.*

7. *Berechne die Fourierreihe der Anfangsbedingung. Falls du in der Basislösung $u(x,t)$ nur Sinus-Funktionen stehen hast, dann erweitere zuerst die Anfangsbedingung zu einer ungeraden Funktion. Falls nur Cosinus-Funktionen vorkommen, erweiterst du die Anfangsbedingung zu einer geraden Funktion.*

8. *Stelle nun die allgemeine Lösung mit der Anfangsbedingung (meist $t = 0$) gleich der Fourierreihe der Anfangsbedingung und berechne so die Konstanten $A_n$, $B_n$ (=Fourierkoeffizienten):*

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} X(x)T(0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \ldots = \text{Fourierreihe von Anfangsbedingung}$$