Standardintegrale, Ableitungen, Trigo

Integrale   + C !

		Konstante C	nicht vergessen!
$\int f(x)\,dx$	$F(x)+C$	$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int \ln(x)\,dx$	$x\cdot\ln(x)-x$
$\int e^x\,dx$	e^x	$\int \cos(x)\,dx$	$\sin(x)$
$\int \sin(x)\,dx$	$-\cos(x)$	$\int \tan(x)\,dx$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx$	$\tan(x)$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arccos(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin(x)$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert\right)$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan(x)$	$\int 1\,dx$	x
$\int 0\,dx$	c	$\int \frac{1}{x\cdot\ln(a)}\,dx$	$\log_a(x)$
$\int a^x\cdot\ln(a)\,dx$	a^x	$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}$	$e^{f(x)}$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$	$\int a^{kx}\,dx$	$\frac{1}{k\cdot\ln(a)}\,a^{kx}$
$\int e^{kx}\,dx$	$\frac{1}{k}e^{kx}$	$\int \frac{1}{ax+b}\,dx$	$\frac{1}{a}\cdot\ln(\lvert ax+b\rvert)$
$\int (ax+b)^s\,dx$	$\frac{1}{a(s+1)}\cdot(ax+b)^{s+1}$	$\int \cos^2(x)\,dx$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)$
$\int \sin(x)\cos(x)\,dx$	$-\frac{\cos^2(x)}{2}=\frac{\sin^2(x)}{2}$	$\int \tan(x)\,dx$	$\tan(x)-x$
$\int \sin^2(x)\,dx$	$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$	$\int \cos^3(x)\,dx$	$\sin(x)-\frac{1}{3}\sin^3(x)$
$\int \sin^3(x)\,dx$	$\frac{\cos^3(x)}{3}-\cos(x)$	$\int \cos(x)\sin^2(x)\,dx$	$\frac{\sin^3(x)}{3}$
$\int \cos^2(x)\sin(x)\,dx$	$-\frac{\cos^3(x)}{3}$	$\int x\cdot\cos(x)\,dx$	$x\sin(x)+\cos(x)$
$\int x\cdot\sin(x)\,dx$	$\sin(x)-x\cdot\cos(x)$	$\int \cos(ax+b)\,dx$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\int \sin(ax+b)\,dx$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$	$\int \frac{1}{x^2}\,dx$	$-\frac{1}{x}$
$\int e^{\sqrt{x}}\,dx$	$2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}$		

Ableitungsregeln

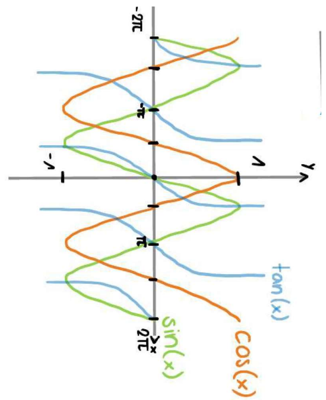
- $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$
- $(a\cdot f(x))' = a\cdot f'(x)$
- $(a+f(x))' = f'(x)$
- $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- $(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$
- $(x^x)' = ((e^{\ln(x)})^x)' = (e^{x\ln(x)})' = (\ln(x)+1)x^x$
- $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

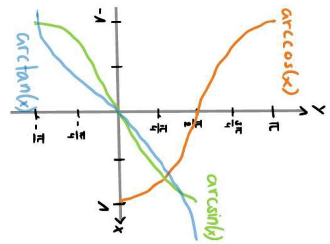
Nullstelle bei $x_0 = \frac{1}{e}$

Standardableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
Konstante	0	x^n	$n\cdot x^{n-1}$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x\cdot\ln(a)$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\cdot\ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	x^x	$(\ln(x)+1)\,x^x$
$\frac{1}{x}=x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Grad	Rad	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$
$120°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$135°$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$150°$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$180°$	π	0	-1	0
$210°$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$240°$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\pm\infty$
$300°$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$360°$	2π	0	1	0





Zahlenbereich

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ $\quad \mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \{\dots, -\frac{3}{2}, -1, 0, 1, \frac{1}{2}, \dots\}$

$\mathbb{R} = \{-\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 0, 1, e, \pi, \dots\}$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}$ + komplexe Zahlen (i)

Mengen

- $A \subset B$: A Teilmenge von B
- $A \cap B$: „und"-Schnittmenge
- $A \cup B$: „oder"-Vereinigungsmenge
- $A \setminus B$: A ohne B

Intervalle

$[a,b] = \{a \leq x \leq b\}$ $\quad]a,b[= (a,b) = \{a < x < b\}$

Ungleichungen

Falls Multiplikation / Division durch negative Zahl → Vorzeichen ändern.

$< \;\to\; >$

$> \;\to\; <$

$\leq \;\to\; \geq$

$\geq \;\to\; \leq$

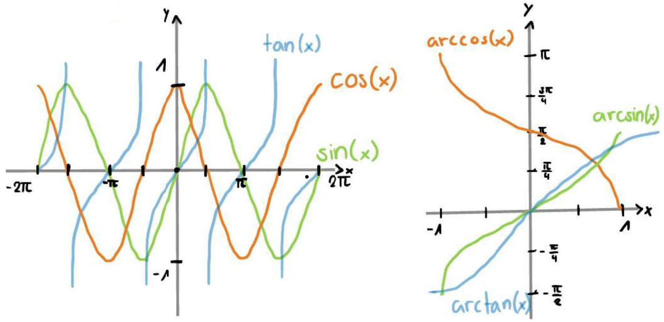
Potenzgesetze

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^m b^m = (ab)^m$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- $0^a = 0$
- $a^0 = 1$

Logarithmengesetze

- $b = a^x \longrightarrow x = \log_a(b)$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $a^{\log_a(b)} = b$
- $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(<0)$ ↓ nicht definiert
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$
- $\ln(e^a) = a \cdot \ln(e) = a$
- $e^{\ln(a)} = a$
- $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$

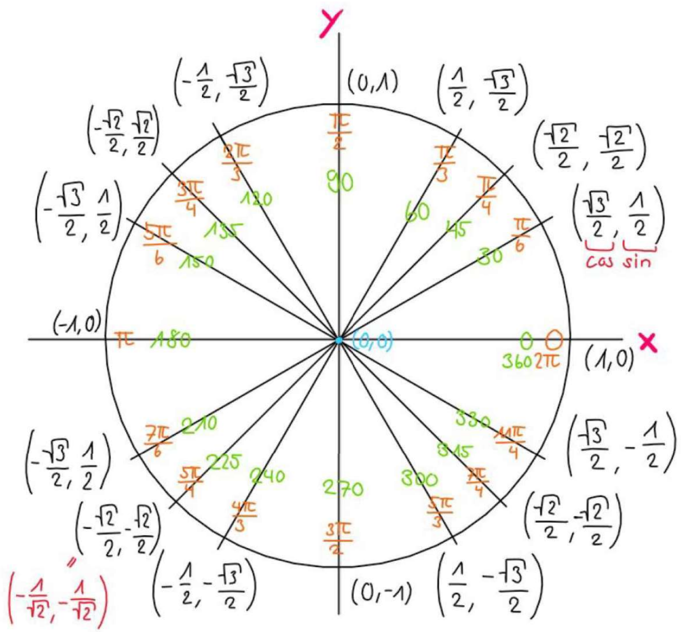
Graphe



Grad	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Einheitskreis

$x^2 + y^2 = 1$ $\quad [0, 2\pi] \to \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$



Kreisberechnung

- $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r$
- $x^2 + y^2 = r$
- Fläche: $A = r^2 \cdot \pi$
- Umfang $= 2 \cdot \pi \cdot r$

Quadranten

2	1
3	4

Mitternachtsformel

$ax^2 + bx + c = 0$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Binom

$(x^5 - 1) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ analog x^4, x^6 etc.

Summen

- $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
- $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

sin, cos, tan – Rechenregeln

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(n \cdot \pi) = 0 \quad n \in \mathbb{Z}$
- $\cos(n \cdot \pi) = (-1)^n$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$!
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
- $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$
- $\sin^3(x) = (3\sin(x) - \sin(3x))/4$
- $\sin^4(x) = (\sin(4x) - 4\sin(2x) + 3)/8$
- $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$
- $\cos^3(x) = (\cos(3x) + 3\cos(x))/4$
- $\cos^4(x) = (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)/8$
- $\tan(x) = \sin(x) / \cos(x)$
- $\cot(x) = \cos(x) / \sin(x)$

Integralrechnung

Definition

F heisst Stammfunktion von f, falls $F' = f$

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Substitution

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Bsp.
1.) $\int \cos(x^2) \cdot 2x\,dx$ 2.) $u(x) = x^2$ 3.) $u'(x) = 2x = \frac{du}{dx} \rightarrow dx = \frac{du}{2x}$
4.) $\int \cos(u) \cdot 2x \cdot \frac{du}{2x}$ 5.) $\int \cos(u)\,du$ 6.) $-\sin(u) + C$ 7.) $-\sin(x^2) + C$

Partielle Integration

$$\int u'(x) \cdot v(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

Bsp. $\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C$

Bsp. $\int \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x)\,dx$

$= -\cos(x)\sin(x) + \int 1 - \sin^2(x)\,dx = -\cos(x)\sin(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$

$= \frac{x - \cos(x)\sin(x)}{2} + C$

$$\int f(x) \cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + C$$

Partialbruchzerlegung

$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \rightarrow g(x)$ faktorisieren mit Nullstellen

einfache Nullstellen: $\frac{A}{x+x_1} + \frac{B}{x+x_2} \rightarrow$ auf Nenner bringen

doppelte Nullstelle: $\frac{A}{x+x_1} + \frac{B}{(x+x_1)^2} + \frac{C}{x+x_2}$

$\rightarrow \frac{A(x+x_2) + B(x+x_1)}{(x+x_1)(x+x_2)} \rightarrow$ Zähler $= f(x)$ setzen

$\rightarrow$ Koeffizientenvergleich, A und B auflösen

$\rightarrow \int \frac{A}{x+x_1} + \frac{B}{x+x_2}\,dx = A \cdot \ln(|x+x_1|) + B \cdot \ln(|x+x_2|) + C$

Das bestimmte Integral

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cdot \Delta x_i$ in den Grenzen a und b.

Rechenregeln

- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
- $\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
- für $b < a$: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \quad (a < b < c)$
- stetige ungerade: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- stetig gerade: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$
- Mittelwert: $\frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(x)\,dx$

Bsp. $\int_{-1}^{1} 2 \cdot |x|\,dx = \int_{-1}^{0} 2 \cdot (-x)\,dx + \int_0^1 2x\,dx = -x^2\big|_{-1}^{0} + x^2\big|_0^1 = 2$

Hauptsatz der Differential-/Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$$

Uneigentliche Integrale 2. Art

$$\int f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int f(x)\,dx$$

- falls Grenzwert existiert + endlich $\rightarrow$ uneigentliches Integral
- falls Grenzwert $\pm\infty \rightarrow$ divergent, existiert nicht
- Falls es eine Zahl c gibt, für die $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$ und $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ existiert, existiert auch das uneigentliche Integral.
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_c^{\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$

Bsp. $\int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} -x \cdot e^{-x} - e^{-x} \Big| = \lim_{b\to\infty} \left(\overbrace{-be^{-x}}^{?} \overbrace{-e^{-b}}^{0} \overbrace{-(0-1)}^{1}\right)$

$\rightarrow \lim_{b\to\infty} -be^{-b} = \lim_{b\to\infty} -\frac{b}{e^b} \overset{\text{l'hopital}}{=} -\lim_{b\to\infty} \frac{0}{e^b}$

$\rightarrow \int_0^{\infty} x e^{-x}\,dx = 1$

Funktionen, Ableitungsfunktion

Umkehrabbildung f^{-1}

- Zuordnung muss eindeutig sein (für jedes y nur 1 x)
- f und f^{-1} spiegelsymmetrisch zur $x=y$ Achse
- f nach x auflösen / umformen

Symetrie

$f(-x) = f(x) \rightarrow$ spiegelsym. $\rightarrow$ gerade $\quad \cos, x^2, x^{4000}$

$f(-x) = -f(x) \rightarrow$ punktsym. $\rightarrow$ ungerade $\quad \sin, \tan, x^3$

gerade f · gerade f = gerade
ungerade f · ungerade f = gerade
gerade f · ungerade f = ungerade

Komposition

- $g(f(x)) = (\overset{\text{äussere}}{g} \circ \overset{\text{innere}}{f})(x)$
- $g \circ f \neq f \circ g$

oft $(\underbrace{f \circ f \circ f \circ f \ldots}_{2000\,x})(x) = ?$

↳ mit Fixpunkte arbeiten

Fixpunkte

x_0 heisst Schnittpunkt falls $f(x_0) = x_0$

Schnittpunkt von f mit $x = y$

x_0 auch für f^{-1} ein Fixpunkt

Stetigkeit

„keine Sprünge", „zeichnen ohne Stift ablegen"

stetig: in jedem x_0 gilt: $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

Betragsfunktionen: Bei den Übergängen oft nicht stetig

Anwendung der Ableitungsfunktion

- Monotonie

$f'(x) > 0$ für alle $x \in I$ → f ist streng monoton wachsend auf I
$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ → f ist monoton wachsend auf I
$f'(x) = 0$ für alle $x \in I$ → f ist konstant auf I
$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ → f ist monoton fallend auf I
$f'(x) < 0$ für alle $x \in I$ → f ist streng monoton fallend auf I

- Krümmungsverhalten

$f''(x) < 0$ → nach rechts gekrümmt ↷
$f''(x) > 0$ → nach links gekrümmt ↶

- Extremalstellen

$f'(x) = 0$ $\quad$ $f''(x) > 0$ → lokales Minimum
$\quad\quad\quad\quad$ $f''(x) < 0$ → lokales Maximum

$f'(x) \neq 0$ und $f''(x) = 0$ und f'' wechselt Vorzeichen → Wendepunkt
$f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ und f'' wechselt Vorzeichen → Sattelpunkt

- Konvergenzkriterien $\quad f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ ein Fixpunkt

anziehend
$|f'(\tilde{x})| < 1$ → Folge x_n konvergiert gegen $\tilde{x}$ für x_0 nahe $\tilde{x}$
$|f'(\tilde{x})| > 1$ → $\tilde{x}$ kein Grenzwert der Folge x_n
abstossend

- Linearisierung → $\boxed{L(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$

↳ Tangente an die Kurve an der Stelle x_0

- Taylor-Polynom

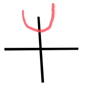
$$T_n = \underbrace{f(x_0)}_{a_0} + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1}}_{a_1}(x-x_0) + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2!}}_{a_2}(x-x_0)^2 + \ldots \underbrace{\frac{f^{n}(x_0)}{n!}}_{a_3}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad [\text{explizit}] \quad 0! = 1, \quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$$

Fehler: $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$
zwischen x und x_0 gibt es eine Stelle z mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Falls $f(x)$ gerade:
a_1, a_3, a_5 usw. $= 0$
Bsp. e^{x^2}



Grenzwerte

Grenzwerte Rechenregeln

$\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim f(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} (\log_a(f(x))) = \log_a(\lim f(x))$

$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)^n) = (\lim f(x))^n$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

$\lim\limits_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\lim f(x)}$

Grenzwerte von Brüchen

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m \cdot x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

- $k = m$: $\lim\limits_{x \to \infty}(\ldots) = \frac{a_k}{b_m}$
- $k > m$: $\lim\limits_{x \to \infty}(\ldots) = \infty$
- $k < m$: $\lim\limits_{x \to \infty}(\ldots) = 0$

L'Hôpital

Bedingung: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ oder $\frac{0}{0}$

$$\to \boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

muss existieren
und endlich sein
mehrmals anwendbar

Umformungen für L'Hôpital

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{oder} \quad \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{1/g(x) - 1/f(x)}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln(f(x))} \to \lim \frac{\ln(f(x))}{1/g(x)}$$

Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax} - 1}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+ax)}{ax} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -1$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^x$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[x]{a} = 1$

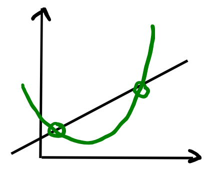
$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[x]{x} = 1$

Zusatz: Sekantengleichung

$y = m \cdot x + b$

$m: \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; $\quad$ b: Punkt x_1 oder x_2 einsetzen
→ nach b auflösen



← Sekante

nützlich um die durchschnittliche Änderung zu bestimmen

Komplexe Zahlen

$i = \sqrt{-1}$
$i^2 = -1$

Grundlagen

- $z = a + bi$ $\quad \bar{z} = a - bi$
- $Re(z) = a$ $\quad Im(z) = b$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\quad i^2 = -1$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- Multiplikation mit i → 90° Rotation ↺

Rechenregeln ($-\pi < \arg(z) < \pi$)

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- $\arg(z_1 \cdot z_1) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
- $z^n = r^n \cdot e^{i\varphi \cdot n}$ $\quad$ • $\bar{z} = r \cdot e^{i(-\varphi)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$ $\quad$ • $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $Re(z) = \frac{1}{2} \cdot (z + \bar{z})$ $\quad$ • $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $i^x \rightarrow \frac{x}{4} = \text{Rest} \rightarrow$ $0 \rightarrow 1$; $1 \rightarrow i$; $2 \rightarrow -1$; $3 \rightarrow -i$

Normalform → Polarform $\varphi = \arg(z)$

1. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 \end{array}$$

2. 1. / 4. Quadrant: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

   2. / 3. Quadrant: $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$

   $x = 0 \rightarrow y > 0 : \frac{\pi}{2}$; $y < 0 : -\frac{\pi}{2}$

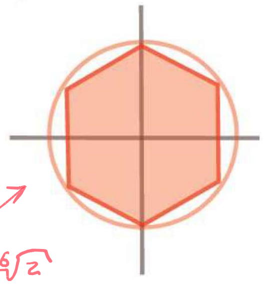
3. $z = r \cdot e^{i\varphi} \rightarrow$ geometrische Probe

Polarform → Normalform $\varphi = \arg(z)$

1. $z = r(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$

Wurzel $\sqrt[x]{z} = z^{\frac{1}{x}}$

1. $\sqrt[x]{r} \cdot e^{(i\varphi) \cdot \frac{1}{x} + \frac{2\pi \cdot k}{x}}$
2. k bis zu $x - 1$
3. x = Anzahl Lösungen
4. Geometrisch: Ecken eines gleichseitigen X-Ecks.



Bsp. $\sqrt[6]{z}$

Fundamentalsatz der Algebra

- Jedes Polynom vom Grad n hat genau n Nullstellen.
- $p(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_k \in \mathbb{C}$
- alle a_k reel → falls z_0 eine Nullstelle, ist $\bar{z}_0$ auch eine
- Nullstellen können oft auch doppelt vorkommen.

Komplexe EW

$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow p_A = \lambda^2 + 4 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$

- $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det(A) = 4$
- Falls alle Koeffizienten von ${}_A(\lambda)$ reell und $\lambda_{komplex}$ ein EW, dann auch $\bar{\lambda}$ ein EW.
- $|\lambda_{komplex}| = \sqrt{Re(\lambda)^2 + Im(\lambda)^2}$

Lineare Algebra

Vektoren

λ, μ reele Zahlen | u, v, w Vektoren in $\mathbb{R}^n$

- $v \pm w = w \pm v$
- $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$
- $u \pm (v \pm w) = (u \pm v) \pm w$
- $(\lambda \cdot \mu) v = \lambda(\mu \cdot v)$
- $\lambda \cdot (u \pm v) = \lambda u + \lambda v$

Betrag: $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_n^2}$ Normierung $\tilde{n} = \frac{1}{|n|} \cdot n$

Einheitsvektoren: $e_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ usw.

Skalarprodukt $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix} = ad + be + cf$

Vektorprodukt $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}bf-ce\\cd-af\\ae-bd\end{pmatrix}$

Matrix

$M_{m \times n}$ m: # Zeilen n: # Spalten

$a_{ij} \rightarrow$ Eintrag der Zeile i, Spalte j

Spezialmatrizen quadratisch $n = m$

Dreiecksmatrix: alle Elemente ober/unterhalb $= 0$ $\begin{pmatrix}a & b & c\\0 & e & f\\0 & 0 & i\end{pmatrix}$
det $= a \cdot e \cdot h$
EW $= a; e; h$

Diagonalmatrix: alle Elemente ausser Diagonale $= 0$

Einheitsmatrix: Diagonalmatrix mit Diagonalelemente $= 1$

A^T: transponierte Matrix (Zeilen, Spalten vertauschen)

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}a & d\\b & e\\c & f\end{pmatrix}$$

Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by+cz\\dx+ey+fz\\gx+hy+iz\end{pmatrix}$$

Zeilen des Vektors = # Spalten des Vektors

Linearität: $A \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha A \cdot v + \beta A \cdot w$

Rechenregeln Matrizen

Addition / Subtraktion: gleich grosse Matrizen

Skalar: Alle Einträge $\cdot \lambda$

Multiplikation $A \cdot B \neq B \cdot A$

nur wenn # Spalten A = # Zeilen B
$\rightarrow A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$

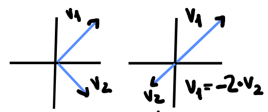
- $A(BC) = (AB)C$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(AB)^T = A^T \cdot B^T$
- $A^p \cdot A^q = A^{p+q}$
- $(A^p)^q = A^{p \cdot q}$
- $A \cdot E_n = E_n \cdot A = A$
- $A^0 = E_n$

Die inverse Matrix A^{-1}

- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ (falls A invertierbar)
- Falls A und B invertierbar so auch $(A \cdot B)$
  $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$
- Entwicklung kann rückwärts durchlaufen werden
- $V_n = A^{-1} \cdot V_{n+1}$
- $V_0 = (A^{-1})^k \cdot V_k$
- nicht jede Matrix ist invertierbar
- A invertierbar falls: $\det(A) \neq 0 \rightarrow$ alle EW $\neq 0$

Lineare Unabhängigkeit

Vektoren heissen l.u, wenn sich kein Vektor als lineare Kombination der anderen Vektoren darstellen lässt.



unabhängig abhängig

Wenn $\{v_1, \dots, v_n\}$ EV einer Matrix mit unterschiedlichen EW → linear unabhängig

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\v_1 & v_2 & v_3\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\rightarrow \det(A) = 0$: linear abhängig
$\rightarrow \det(A) \neq 0$: L. unabhängig

einfache Überprüfung

Matrixmultiplikation Beispiel

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}g & j\\h & k\\i & l\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ag+bh+ci & aj+bk+cl\\dg+eh+fi & dj+ek+fl\end{pmatrix}$$

Wie einzelne Vektoren ausrechnen.

Linearkombination

Der Vektor w ist eine Linearkombination der Vektoren $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$, falls es Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ gibt.

$w = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_n \cdot v_n$

Äquivalente Aussagen

- A ist invertierbar
- $\det(A) \neq 0$
- alle EW von $A \neq 0$
- Spaltenvektoren sind linear unabhängig
- Zeilenvektoren sind linear unabhängig
- Rang(A) = # Zeilen/Spalten
- $Ax = b \rightarrow$ genau 1 Lsg.
- $Ax = 0 \rightarrow$ nur Lsg. $x = 0$
- A^T ist invertierbar

Eigenwerte und Eigenvektoren (A ist quadratisch)

- λ ist EW von A, wenn es ein EV $\neq 0$ dazu gibt und $A \cdot v = \lambda \cdot v$ gilt.
- A^{-1} hat gleiche EV; EW ist aber $\frac{1}{\lambda}$
- v ist EV von A und B, dann auch EV von $A+B$ und $A \cdot B$ (EW aber nicht identisch)
- Linearität → $w = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \rightarrow Aw = A(\alpha v + \beta v)$
  $= \alpha A v + \beta A v$
  $= \alpha \cdot \lambda v + \beta \lambda v$
  $= \lambda w = \lambda(\alpha v + \beta v)$
- λ EW von $A \rightarrow \lambda + 1$ EW von $A + E_n$
- Diagonal-/ Dreiecksmatrix → EW sind Diagonaleinträge

Berechnung EW / EV

1) $\det(A - \lambda E_n) = 0$
2) auflösen nach λ

falls EW unbekannt

3) EV bestimmen mit $A \cdot v = \lambda \cdot v$

oder $\boxed{(A - \lambda E_n) \cdot v = 0}$ (mit Gauss auflösen)

Lineare Gleichungssysteme LGS

- Quadratische LGS: $A \cdot x = c$
- inhomogen, $\det(A) \neq 0$
- Falls A^{-1} existiert: $x = A^{-1} \cdot c$ (eindeutig)
- falls $A \cdot x = 0 = c$ → homogen
  und invertierbar ($\det(A) \neq 0$): $x = 0$ einzige Lösung
- inhomogenes LGS: eine oder ∞ Lösungen
- homogenes LGS: immer triviale Lsg. $x=0$, kann zusätzlich ∞ Lösungen haben.
- Rang: # nicht-Null Zeilen

Determinante

A^{-1} existiert, wenn $\det(A) \neq 0$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$A \cdot x = 0$

homogen: $\det \neq 0$ nur triviale Lösung $x=0$

$\det = 0$ neben $x=0$ noch ∞ Lösungen

inhomogen: $\det \neq 0$ eindeutige Lösung mit $x = A^{-1} \cdot c$

$\det = 0$ keine oder ∞ Lösungen

$A \cdot x = c$ $\quad R(A) < R(A|c)$ $\quad R(A) = R(A|c)$

2x2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = ad - bc$

3x3: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

Rechenregeln Determinante

- Vertauschen von zwei Spalten/Zeilen: $\det(A) = -\det(A^*)$
- Multiplikation einer Spalte/Zeile von λ: $\det(A) = \lambda \cdot \det(A^*)$
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$ (gesamte Matrix)
- Addition des Vielfachen Z/S zu Z/S ändert $\det(A)$ nicht.
- Diagonal-/Dreiecksmatrix: $\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A \pm B) \neq \det(A) \pm \det(B)$
- $\det(A^k) = \det(A)^k$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$
- $\det(A) = \det(A^T)$
- Kriterien für $\det(A) = 0$
  A enthält Z/S aus lauter Nullen
  2 Z(S) sind gleich oder skalares Vielfaches
  Eine Z(S) ist Linearkombination anderer

Gauss-Verfahren

Lösung von $A \cdot x = c \rightarrow (A|c)$ finden durch:

- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu anderer
- Vertauschen zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit Zahl $\neq 0$

Ziel: Matrix in Dreiecksform bringen

Rang: # nicht Nullzeilen

Rang(A) = Rang(A|c) < # Zeilen → ∞ viele Lsg.

Rang(A) = Rang(A|c) = # Zeilen → eindeutige Lsg.

Rang(A) < Rang(A|c) → keine Lsg.

Berechnung det(A) mit Gauss

Falls Rang(A) = # Zeilen: $\det(A) = \pm \alpha \cdot a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{nn}$

→ $\pm$ je nach # Zeilen vertauscht

→ α wegen allfälliger Multiplikation von Zeilen

→ Rang(A) = # Zeilen → $\det(A) \neq 0$

Inverse Matrix mit Gauss

$\det(A) \neq 0 \rightarrow A^{-1}$ existiert

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

↳ Gauss anwenden bis $(E_3 | B^{-1})$

DGL 1. Ordnung

Analogon

$N'(n) = N_{n+1} - N_n \leftrightarrow N_{n+1} = N'(n) + N_n$

Stationäre Lösungen N_∞ (Grenzwert)

$N'(t) = 0$ für $t \to \infty$ (N_∞)

Wendepunkte

$N''(t) = 0$ und ändert Vorzeichen

Allg. Lösung einer homogenen DGL ($q(x) = 0$)

1) $y'(x) = p(x) \cdot y(x) \to P(x) = \int p(x)\,dx$

2) $\boxed{y(x) = C \cdot e^{P(x)}}$

Variation der Konstante (inhomogene, lineare DGL)

Form: $y'(x) = p(x) \cdot y(x) + q(x) \to q(x) \neq 0$

1) Homogene Gleichung lösen $\to y_h = C \cdot e^{P(x)}$

2) C durch $K(x)$ ersetzen und einsetzen

3) $K'(x)e^{P(x)} + \underbrace{P'(x)K(x) \cdot e^{P(x)} = p(x)K(x)e^{P(x)}}_{\text{identisch}} + q(x)$

4) $K'(x)e^{P(x)} = q(x) \to K'(x) = \frac{q(x)}{e^{P(x)}}$

5) $\boxed{K(x) = \int \frac{q(x)}{e^{P(x)}}\,dx}$

6) $\boxed{y(x) = (K(x) + c) \cdot e^{P(x)}}$

Spezialfälle mit konstanten Koeffizienten

- homogen: $y'(x) = ay(x) \to y(x) = c \cdot e^{ax}$
- inhomogen: $y'(x) = ay(x) + b \to y(x) = c \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$

Partikulärlösung einer DGL

$y(x) = \underbrace{y_h(x)}_{\text{homog. ene Lsg.}} + y_p(x) \to$ partikuläre Lsg.

Manchmal kann man nur mit der homogen Lsg. die Partikulärlösung erraten.

Trennung der Variablen (nicht lineare DGL 1. Ordnung)

Form: $y'(x) = h(x) \cdot g(y(x)) = h(x) \cdot g(y)$

1) $y' = h(x)g(y) = \frac{dy}{dx} \to \underbrace{\frac{dy}{g(y)}}_{\neq 0} = h(x)\,dx$

2) $\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int h(x)\,dx = G(y) = H(x) + C}$

3) nach y auflösen, stationäre Lsg. berücksichtigen

4) Probe, mit AWP Konstante bestimmen

Trennung durch Substitution

- $y' = h(ax + by + c) \to z = ax + by + c$ substituieren

  Bsp. $y' = 2x - y \to z = 2x - y$

  $\to z' = 2 - y' = 2 - (2x - y) = 2 - z$

  $\to z = 2 - Ce^{-x} \to y = Ce^{-x} + 2x - 2$

- $y' = h\left(\frac{y}{x}\right) \to z = \frac{y(x)}{x}$ substituieren

Richtungsfeld

Methode um qualitatives Verhalten einer Lösung zu beschreiben, ohne deren Funktion zu kennen.

$\to y' = F(x,y) \to x$ und y einsetzen $\to$ Steigung ablesen

Euler-Verfahren

Zur Konstruktion einer Lösung, da das exakte lösen oft nicht möglich ist.

1.) Gleichung der Tangente: $l(x) = y_0 + F(x_0, y_0)(x - x_0)$

2.) für x nahe x_0 gilt $l(x) \approx f(x)$

3.) $l(x_1) = l(x_0 + h) = y_0 \cdot F(x_0, y_0) \cdot h = y_1 \approx f(x_1)$

4.) wiederholen $y_n = y_{n-1} + F(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h$

$\to$ je kleiner h desto genauer

Lineare DGL-Systeme

DGL lösen mit EW / EV

→ homogenes, lineares DGL-System mit $y' = Ay$ gegeben.

- Fall 1: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reele EW

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_n$; Allg. Lösung:

$$\boxed{y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} \cdot \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 x} \cdot \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} + \dots}$$

b) doppelter EW $\lambda_1 = \lambda_2$ und EV linear unabhängig

$$\boxed{y(x) = e^{\lambda x} \left(C_1 \begin{pmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \end{pmatrix} \right)}$$

c) doppelter EW $\lambda_1 = \lambda_2$ und EV nicht linear abhängig

→ auf die Lösung einer DGL 2. Ordnung führen

- Fall 2: $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + \beta i$

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(C_1 e^{i \beta x} \cdot v_1 + C_2 e^{-i \beta x} \cdot v_2 \right)$$

oder

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(C_1 \cdot \sin(\beta x) + C_2 \cdot \cos(\beta x) \right)$$

DGL-System (teilweise) entkoppelt

$y' = A \cdot y \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ falls ein Koefficient null ist → teilweise entkoppelt.

$a_{12} = a_{21} = 0 \rightarrow y_1' = a_{11} \cdot y$; $y_2' = a_{22} \cdot y_2$

$a_{12} = 0$; $a_{21} \neq 0$ → homogene Gleichung y_1 lösen
und umgekehrt
→ y_1 in 2 Gleichung einsetzen
→ Variation der Konstante

DGL 2. Ordnung

2x2 DGL-System → DGL 2. Ordnung

homogenes 2x2 DGL: $y' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot y$

$$\boxed{y'' - (a+d) y' + \det(A) y = 0}$$

→ $b \neq 0$ y_1 in Formel, damit y_2 bestimmen.
→ $c \neq 0$ y_2 in Formel, damit y_1 bestimmen.
→ $b \neq 0$; $c \neq 0$ entweder y_1 oder y_2 bestimmen und damit das Andere
→ $b = 0$; $c = 0$ und $a = d = \lambda$
$y_1 = C_1 \cdot e^{\lambda x}$; $y_2 = C_2 \cdot e^{\lambda x}$

Homogene DGL 2 Ordnung lösen

1) $ay'' + by' + cy = 0 \rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$
2) nach λ auflösen $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
3) allgemeine Lösung

a) $b^2 - 4ac > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, reel
$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
b) $b^2 - 4ac = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2$, reel
$$y(x) = (C_1 + C_2 \cdot x) e^{\lambda x}$$
c) $b^2 - 4ac < 0$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$
$$y(x) = e^{\alpha x} \left(C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x) \right)$$

→ allg. Lösung konvergiert gegen null für $t \to \infty$ wenn $\lambda < 0$

→ konvergiert gegen v wenn $\lambda = 0$

Partikulärlösung im inhomogenen Fall

Für $y'' + ay' + by = g$ gilt $y = y_h + y_{sp}$

mit y_h für $y'' + ay' + by = 0$

und y_{sp} für $y'' + ay' + by = g$

mit sehr genauem hinschauen lösbar!

Differentialrechnung in 2 Variablen

Ableitung stetig: $f_{xy}=f_{yx}$

Extrema

$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$

↳ (x_0,y_0) ist ein kritischer Punkt.

Extremalstellen unterscheiden

$$\boxed{\begin{array}{l} D(x_0,y_0)=f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}(x_0,y_0)^2 \\ D>0 \rightarrow \text{lokales Extremum } f_{xx}>0: \text{Min} \quad f_{xx}<0: \text{Max} \\ D<0 \rightarrow \text{Sattelpunkt} \\ D=0 \rightarrow \text{Noch keine Entscheidung möglich} \end{array}}$$

Vorgehen

1) $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}/f_{yx}$ bestimmen
2) $f_x=f_y=0$ → auflösen → x_0, y_0
3) D bestimmen und klassifizieren

Tangentialebene (mehrere Variablen)

$$\boxed{L(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

im kritischen Punkt ist Tangentialebene eine horizontale Ebene: $L(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)$

Implizite Differentiation

Eine Kurve kann durch $F(x,y)=0$ gegeben sein.
Man kann sie somit nicht nach x oder y auflösen.
Um die Steigung der Tangente zu bestimmen gilt:

$$\boxed{y'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}}$$

Tangentengleichung: $y(x)=y'(x_0)\cdot x-y_0$

Falls $F_y=0$ → Steigung unendlich gross

Verwenden wenn explizit Tangente gefragt ist!

Gebiets-, Volumen-, Flächenintegrale

Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen

- zwischen f(x) und x-Achse:

→ bestimme Nullstellen, Bereiche für bestimmtes Integral
→ Teilintegrale mit korrekten Vorzeichen aufstellen

- zwischen zwei Graphen: $A=\int_a^b f_o(x)-f_u(x)\,dx$

→ Schnittpunkte bestimmen, Integral aufteilen
→ f_o und f_u für jedes Teilintegral bestimmen

Gebietsintegrale

einfaches Gebiet: $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, a\le x\le b, f_u(x)\le y\le f_o(x)\}$

$$\rightarrow \iint_B f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

polar: $B=\{(\varphi,r), \varphi_1\le\varphi\le\varphi_2, r_1(\varphi)\le r\le r_2(\varphi)\}$

$$\rightarrow \iint_B f(x,y)\,dA=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(\overset{\text{statt } x}{r\cdot\cos(\varphi)}, \overset{\text{statt } y}{r\cdot\sin(\varphi)})\cdot r\,dr\,d\varphi$$

Flächeninhalt

→ kartesisch: $\int_a^b\int_{f_u(x)}^{f_o(x)} 1\,dy\,dx$; polar: $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr\,d\varphi$

Volumenintegral

$B=\{(x,y,z), a\le x\le b, f_u(x)\le y\le f_o(x), h_u(x,y)\le z\le h_o(x,y)\}$

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dV=\int_a^b\int_{f_u}^{f_o}\int_{h_u}^{h_o} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

Volumen: $B=\iiint_B 1\,dV$

Anwendung der Integralrechnung

Mittelwert einer Funktion: $M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Länge L eines Kurvenstücks: $L=\int_a^b\sqrt{f'(x)^2+1}\,dx$

oder 2D: $L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt$

Volumen und Oberfläche eines Rotationskörpers

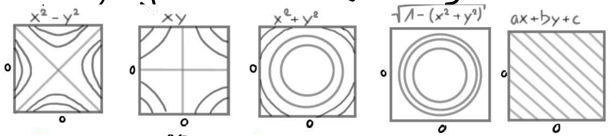
$$V=\int_a^b\pi\cdot f(x)^2\,dx$$

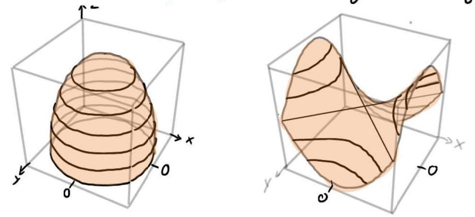
$$O=2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx \quad \text{(Mantelfläche)}$$

Funktionen in mehreren Variablen

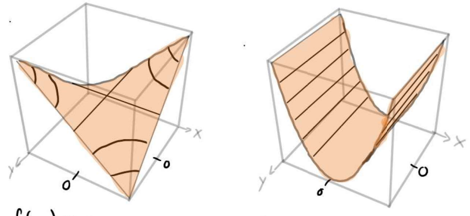
Funktion ordnet jede Zahl im Definitionsbereich D eine Zahl im Zielbereich zu. Der Bereich der Zahlen in Z der getroffen wird, nennt man Wertebereich.

→ Alle Punkte, welche die gleiche z-Koordinate $f(x,y)=c$ liefern, liegen auf einer Kurve (Niveaulinie)





$f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ $\quad f(x,y)=x^2-y^2$



$f(x,y)=xy$ $\quad f(x,y)=x^2$

Vektoranalysis

Kurven

Parametrisierung

- $\gamma : I = [a,b] \to \mathbb{R}^2,\ t \to \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$
- $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} \to$ existiert, stetig und $\neq (0,0) \to$ glatt
- Betrag: $|\gamma(t)| = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$
- Geschwindigkeit: $\gamma'(t) \to$ Ableitung, siehe oben
- Schnelligkeit: $|\gamma'| = \sqrt{\gamma_1'^2 + \gamma_2'^2}$
- Länge L eines Kurvenstücks:
- $L = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, dx$ • $L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$

Kurvenintegral (analog in 3D)

$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)|\, dt}$$

- Kurvenlänge: $\int_\gamma 1\, ds = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$
- Unabhängig von der Richtung der Parametrisierung
- γ kann in Teilkurven aufgeteilt werden: $\int_\gamma f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds$
- Masse: $m = \int_\gamma \rho(x,y)\, ds$
- Massenmittelpunkte:

$$x_m = \frac{1}{m} \int_\gamma x \cdot \rho(x,y)\, ds \ ; \quad y_m = \frac{1}{m} \int_\gamma y \cdot \rho(x,y)\, ds$$

Gradientenfeld

$\Delta f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} \to$ Gradient von f in (x_0, y_0)

- Der Gradient ordnet jedem Punkt einen Vektor zu.
  → senkrecht auf der Niveaulinie zu $f(x_0, y_0)$
- Kritischer Punkt → $f_x = f_y = 0$ → $\Delta f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- → nur wenn f partiell differenzierbar

Vektorfelder

Eine Funktion $K: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} K_1(x,y) \\ K_2(x,y) \end{pmatrix}$ heisst ebenes Vektorfeld.

Koordinatenfunktion stetig → Vektorfeld stetig

Wenn K ein Gradientenfeld ist ($K = \Delta f$) → konservativ
f → Potentialfunktion

Kurvenintegral eines Vektorfeldes → Arbeitsintegral

Arbeit = Kraft · Weg

$$\boxed{\int_\gamma K\, d\gamma = \int_\gamma K \cdot T\, ds = \int_a^b K(\gamma(t)) \overset{\text{Skalarprodukt}}{\cdot} \gamma'(t)\, dt}$$

geschlossene, positiv umlaufene, sich nicht schneidende Kurve → Gebietsintegral (Formel von Green)

Formel von Green: $\boxed{\oint_\gamma K\, d\gamma = \iint_B Q_x - P_y\, dA}$

Falls K konservativ ($Q_x - P_y = 0$) → $\oint_\gamma K\, d\gamma = 0$

Falls $Q_x - P_y = c$ → $c \cdot \iint_B 1\, dA$ → $c \cdot$ Fläche von B

Eigenschaften Kurvenintegral

Kurve umgekehrt durchlaufen

→ Vorzeichen ändert sich $\int_{-\gamma} K\, d\gamma = -\int_\gamma K\, d\gamma$

Konservative Vektorfelder

Hauptsatz für Integrale in Gradientenfeld.

$$\boxed{\int_\gamma (\Delta f)\, d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))} = \int_\gamma K\, d\gamma$$

K konservativ: $\int_\gamma K\, d\gamma$ unabhängig von γ

↓

$K = \Delta f = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ $\quad \oint_\gamma K\, d\gamma = 0 \quad (\gamma(b) = \gamma(a))$

$P_y = Q_x$ → konservativ

Divergenz

ordnet K eine reellwertige Funktion zu.
Auskunft über Quellendichte.

$\mathrm{div}(K) = \Delta \cdot K = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}$ Skalarprodukt

2D (Ebene): $\boxed{\mathrm{div}(K) = P_x + Q_y}$

$\mathrm{div}(K) > 0$: Quellen in B
$\mathrm{div}(K) < 0$: Senken in B
$\mathrm{div}(K) = 0$: Quellenfrei

Ebener Satz von Gauss

$\int_\gamma K\cdot n \, ds$ = Flüssigkeitsmenge, die durch γ (Rand Kurve) ein- oder austritt.

- >0 mehr von innen nach aussen (in Richtung n)
- <0 mehr von aussen nach innen (in Richtung $-n$)
- $=0$ gleich viel in beide Richtungen

$$\int_\gamma K\cdot n \, ds = \int_a^b \begin{pmatrix} -Q \\ P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt \rightarrow \text{Formel von Gauss}$$

$$\boxed{\int_\gamma K\cdot n \, ds = \iint_B \operatorname{div}(K) \, dA}$$

Falls $\operatorname{div}(K)=c$ $\rightarrow$ $= c\cdot$ Fläche!

quellenfrei: $\operatorname{div}(K)=0 \Rightarrow \int_\gamma K\cdot n \, ds = 0$

$n = n(\gamma(t))$ $\rightarrow$ äussere Normaleinheitsvektor

$$n(\gamma(t)) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \cdot \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}$$

Kurven in Ebenen und Raum

$y'(t) = Ay(t)$ mit $A \in M_{2\times 2}$, $y(t) \in \mathbb{R}^2$ ist die Lsg.

$t \rightarrow y(t) = \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ eine Kurve / Abbildung.

3D: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}$; 2D analog

Eine Kurve heisst glatt, wenn alle ihre Ableitungen stetig sind.

Ableitung von Kurven

$\gamma'(t)$: Geschwindigkeit $|\gamma'(t)|$: Schnelligkeit

$\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$: Tangentialeinheitsvektor

Regeln

$(\gamma_1 \pm \gamma_2)' = \gamma_1' \pm \gamma_2'$ $(c\gamma_1)' = c\gamma_1'$

$(f\gamma_1)' = f\gamma_1' + f'\gamma_1$ $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)' = \gamma_1' \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2'$ SKP

$(\gamma_1 \times \gamma_2)' = \gamma_1' \times \gamma_2 + \gamma_1 \times \gamma_2'$ Vektorprod. $(\gamma(f(t)))' = f'(t) \cdot \gamma'(f(t))$

Lösungskurve eines DGL Systems

durch $y' = A\cdot y$ wissen wir, wie sich ein Punkt auf der Lösungskurve bewegt.

Parametrisierung

Durchlaufrichtung beachten!

Gerade von $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(1-t) + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} a+(c-a)t \\ b+(d-b)t \end{pmatrix}, t \in [0,1]$$

Intervalle ändern für Kreisabschnitte

Allgemeiner Kreis mit Mittelpunkt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $r=R$, $t \in [0, 2\pi]$

positive Durchlaufrichtung ⊕

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + R\cdot\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + R\cos(t) \\ b + R\sin(t) \end{pmatrix}$$

negative Durchlaufrichtung ⊖

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a + R\cos(-t) \\ b + R\sin(-t) \end{pmatrix}$$

Allgemeine Funktionen

Startpunkt/Richtung beachten

$$\boxed{\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1 + (x_2 - x_1)t \\ f(x_1 + (x_2 - x_1)t) \end{pmatrix}}, t \in [0,1]$$

$(x_1, f(x_1))$ $(x_2, f(x_2))$

- Bsp. $f(x) = \sqrt{x}$ von $(4,2)$ nach $(0,0)$

  $t \in [0,1]$: $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 4+(0-4)t \\ \sqrt{4+(0-4)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4t \\ \sqrt{4-4t} \end{pmatrix}$

- Alle Parametrisierungen können mit Start- und Richtungsvektor angegeben werden.

$$\gamma(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Start}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}}_{\text{Richtung}}$$

Umparametrisierung

$I: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\tilde{I}: [\frac{2}{3}, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\tilde{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\rightarrow [a,b] \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \frac{t-a}{t-b} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$