Lösung E&M Winter 2014

1 Reflexion an ebener Grenzfläche

1.
$$e_z = \sin\theta$$

2.
$$\begin{bmatrix}\cos\theta\\ i\\ \sin\theta\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ i\\ 0\end{bmatrix}}_{s} + \underbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta\\ 0\\ \sin\theta\end{bmatrix}}_{p}$$

3.
$$\mathbf{E}_r = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(r^s(\theta)\begin{bmatrix}0\\ i\\ 0\end{bmatrix} + r^p(\theta)\begin{bmatrix}-\cos\theta\\ 0\\ \sin\theta\end{bmatrix}\right)e^{ik(\sin\theta x+\cos\theta z)}$$
$$\mathbf{E}_t = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left([1+r^s(\theta)]\begin{bmatrix}0\\ i\\ 0\end{bmatrix} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}[1+r^p(\theta)]\begin{bmatrix}\cos\theta\\ 0\\ \sin\theta\end{bmatrix}\right)e^{ik(\sin\theta x-\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}z)}$$

4.
$$|r^s| = |r^p|$$

5. Totalreflexion tritt auf, wenn die transmittierte Welle evaneszent wird. Da k_z^t immer reell $\Rightarrow$ keine Totalreflektion möglich in diesem Fall.

6.
$$\frac{P_r}{P_{in}} = \frac{1}{2}\left[|r^s(\theta)|^2 + |r^p(\theta)|^2\right]$$

2 Strahlungsstörung

1.
$$\mathbf{E}(-d,0,0) = \frac{pk^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^{ikd}}{d}\left(\frac{1}{k^2d^2} - \frac{i}{kd} - 1\right)(-\hat{z})$$

2.
$$E_\theta^{(\alpha)} = -\frac{p_\alpha k^2 \sin\theta}{4\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^{ikr}}{r}e^{ikdx/r}$$

mit $p_\alpha = |\mathbf{p}_\alpha|$

3.
$$E_\theta = -\frac{k^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{e^{ikr}}{r}\left(p + p_\alpha e^{ikdx/r}\right)$$

4.
$$P_{rad} = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\frac{k^4}{16(\pi\varepsilon_0\varepsilon)^2}\left(p^2 + |p_\alpha|^2 + 2p\Re[p_\alpha]\right)$$
$$p_\alpha = \frac{\alpha p k^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon d}\left(1 + \frac{i}{kd} - \frac{1}{k^2d^2}\right)$$

3 Wellenleiter Moden

Das gegebene Feld entspricht nicht einer TM Mode, Aufgabe schlecht gestellt. Es können jedoch TM-Moden im vorhandenen Wellenleiter propagieren, weshalb die Lösung sich dennoch auf TM Moden bezieht. Das gegebenen H-Feld kann ignoriert werden und das E-Feld wie in (8.56) angenommen werden.

1.
$$E_z = E_0 \sin\left(\frac{n\pi}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}\right)$$
$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]}$$
$$\omega_c = \frac{c\pi}{b}\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 m^2 + n^2}$$

Die dazugehörigen Stetigkeitsbedingungen sind:

$$E_z(0,y) = 0; E_z(x,0) \quad = 0$$
$$E_z(a,y) = 0; E_z(x,b) \quad = 0$$

2. Da das elektrische Feld wie in (8.56) angenommen wird, kann das (richtige) H-Feld berechnet werden:
$$\mathbf{H} = \frac{i\pi}{\mu_0\omega}E_0\left(\frac{1}{b}\sin(x\pi/a)\cos(y\pi/b)\hat{x} - \frac{1}{a}\cos(x\pi/a)\sin(y\pi/b)\hat{y}\right)e^{ik_z z}$$

3.
$$\mathbf{S} = -\frac{i\pi}{\mu_0\omega}|E_0|^2\left(\frac{1}{a}\sin(x\pi/a)\cos(x\pi/a)\sin^2(y\pi/b)\hat{x} + \frac{1}{b}\sin^2(x\pi/a)\cos(y\pi/b)\sin(y\pi/b)\hat{y}\right)$$

4.

$$\int \langle \mathbf{u} \rangle \, da = \frac{1}{16} |E_0|^2 \left(\varepsilon_0 ab + \frac{\pi^2(a^2+b^2)}{ab\mu_0\omega^2} \right)$$

5.

$$\begin{aligned} TM_{11}: \quad & \omega_c^2 = \pi^2 (\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \\ TE_{10}: \quad & \omega_c^2 = \pi^2 * \frac{1}{a^2} \quad (a \geq b) \end{aligned}$$

TEM-Wellen sind nicht möglich in Hohlleitern.

4 Felder einer Leiterschleife

1.

$$k(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\omega\rho} I_0 n \sin(n\phi) \delta(\rho - \rho_0) \delta(z) e^{-i\omega t}$$

2.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{iI_0 n e^{ikr}}{2\varepsilon_0 \omega r} i^n \sin(n\phi) J_n(-k\rho\rho_0/r) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I_0 \rho_0 e^{ikr}}{4r} \Big(\Big[-i^{n+1} \sin([n+1]\phi) J_{n+1}(-k\rho\rho_0/r) + i^{n-1} \sin([n-1]\phi) J_{n-1}(-k\rho\rho_0/r) \Big] \mathbf{x} \\ &+ \Big[i^{n+1} \cos([n+1]\phi) J_{n+1}(-k\rho\rho_0/r) + i^{n-1} \cos([n-1]\phi) J_{n-1}(-k\rho\rho_0/r) \Big] \mathbf{y} \Big) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{iI_0 n e^{ikr} e^{i\omega r/v}}{2\varepsilon_0 \omega r} i^n \sin(n\phi) J_n(-k\rho\rho_0/r) \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 I_0 \rho_0 e^{ikr} e^{i\omega r/v}}{4r} \Big(\Big[-i^{n+1} \sin([n+1]\phi) J_{n+1}(-k\rho\rho_0/r) + i^{n-1} \sin([n-1]\phi) J_{n-1}(-k\rho\rho_0/r) \Big] \mathbf{x} \\ &+ \Big[i^{n+1} \cos([n+1]\phi) J_{n+1}(-k\rho\rho_0/r) + i^{n-1} \cos([n-1]\phi) J_{n-1}(-k\rho\rho_0/r) \Big] \mathbf{y} \Big) \end{aligned}$$