

# Elektromagnetische Felder und Wellen

## Zusammenfassung

Julian Böhler, Sandra Ferreiro

## 1 Einleitung

### 1.1 Elektrodynamik vor Maxwell

#### 1.1.1 Das Gauss'sche Gesetz

$$\int_{\partial V} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \, dV$$

Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Fläche  $\partial V$  ist gleich der totalen im Volumen  $V$  eingeschlossenen Ladung.

#### 1.1.2 Das Faradaysche Gesetz

$$\int_{\partial A} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \, ds = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, da$$

Das Kurvenintegral des E-Felds entlang einer geschlossenen Linie entspricht der zeitlichen Änderung des mag. Flusses durch die Fläche, die diese Linie begrenzt wird.

Falls keine zeitvarianten Magnetfelder vorhanden sind, ist die rechte Seite 0. Dies entspricht der **Maschenregel**:

$$\int_{\partial A} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \, ds = 0$$

#### 1.1.3 Das Ampèresche Gesetz

$$\int_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \, ds = \mu_0 \int_A \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, da$$

Das Kurvenintegral des mag. Feldes entlang einer geschlossenen Linie entspricht dem Strom, der durch die Fläche fließt, die durch die geschlossene Linie begrenzt wird.

Wendet man dieses Gesetz auf eine geschlossene *Oberfläche* (z.B. eines Würfels) an, erkennt man, dass sich der magnetische Fluss gegenüberliegender Seiten genau aufhebt und die linke Seite der Gleichung somit 0 ist. Dies entspricht der **Knotenregel**:

$$0 = \mu_0 \int_A \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da$$

## 1.2 Keine magnetischen Monopole

$$\int_{\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da = 0$$

Der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche ist immer null  $\Rightarrow$  Es gibt keine magnetischen Monopole.

### 1.2.1 Sonstiges

#### Poissongleichung

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$\phi$ : Potential;  $\rho$ : Ladungsdichte

#### Lorentzkraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) dV$$

## 2 Maxwell Gleichungen

### 2.1 Kontinuitätsgleichung

$$\int_{\partial V} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = 0$$
$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0$$

### 2.2 Verschiebungsstrom

Maxwell hat das Ampèresche Gesetz um einen Term erweitert, um die Kontinuitätsgleichung zu erfüllen:

$$\int_{\partial A} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{s} = \mu_0 \int_A \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da + \underbrace{\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da}_{\text{Maxwell}}$$

Dieser Term entspricht einem sich zeitlich ändernden Strom (sog. Verschiebungsstrom).

$$\mathbf{j}_{disp} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

### 2.3 Felder und Material

*Primäre* Ladungen und Ströme befinden sich im freien Raum. Sie sind die Quellen der Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ . *Sekundäre* Ladungen Ströme werden durch die Interaktion dieser Felder mit dem Material induziert.

#### 2.3.1 Das Ohmsche Gesetz

$$\mathbf{j}_{cond} = \sigma \mathbf{E}$$

#### 2.3.2 Polarisation

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) \mathbf{E}$$

$\chi_e = \varepsilon - 1$ : Elektrische Suszeptibilität; zeigt, wie gut polarisierbar ein Material ist.

Polarisationsstromdichte (tritt aufgrund gebundener Ladung auf):

$$\mathbf{j}_{pol}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$$

### 2.3.3 Magnetisierung

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 \mu \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{M} = (\mu - 1) \mathbf{H}$$

$\chi_e = \mu - 1$ : Magnetische Suszeptibilität; zeigt, wie gut magnetisierbar ein Material ist.

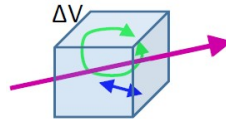
Magnetisierungsstromdichte (tritt aufgrund zirkulierender Ladung auf):

$$\iint_A \mathbf{j}_{mag}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da = \int_{\partial A} \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) ds \stackrel{\text{Stokes}}{\Rightarrow} \mathbf{j}_{mag} = \nabla \times \mathbf{M}$$

### 2.3.4 Aufteilung der Stromdichte

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{tot} &= \mathbf{j}_{cond} + \mathbf{j}_{pol} + \mathbf{j}_{disp} + \mathbf{j}_{mag} \\ &= \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{M} \\ &= \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + (\mu - 1) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung ( $\mathbf{j}_{cond}$  violett,  $\mathbf{j}_{pol}$  blau und  $\mathbf{j}_{mag}$  grün):



## 2.4 Maxwell Gleichungen in Integralform

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da &= \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \\ \int_{\partial A} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) ds &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_A \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da \\ \int_{\partial A} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) ds &= \int_A \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right] \cdot \mathbf{n} da \\ \int_{\partial V} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} da &= 0 \end{aligned}$$

## 2.5 Maxwell Gleichungen in Differentialform

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= 0 \end{aligned}$$

### 3 Wellengleichung

Generell gültige Wellengleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{j} + \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{M}\end{aligned}$$

#### 3.1 Homogene Lösung im freien Raum

Da es im freien Raum weder Materie noch Quellen gibt, werden die rechten Seiten oben zu Null und es folgt:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0$$

Identisch für  $\mathbf{H}$ -Feld. Obige Gleichung ergibt drei unabhängige skalare Gleichungen.

##### 3.1.1 Monochromatische Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \}$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  ist reell und  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  komplex. Monochromatische Felder sind zeitharmonisch, sie oszillieren mit der fixen zeitlichen Frequenz  $\omega$ .

Helmholtz Gleichung

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

mit:  $k = |\mathbf{k}| = \omega/c$ .

##### 3.1.2 Ebene Wellen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}_0 e^{\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \}$$

$+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ : Propagation in  $\mathbf{k}$ -Richtung, outgoing wave

$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ : Propagation in  $-\mathbf{k}$ -Richtung, incoming wave

**Dispersionsrelation:**

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad k_x, k_y, k_z \in \mathbb{R}$$

Da Wellen alle Maxwell Gleichungen erfüllen müssen, braucht es zusätzliche Bedingungen, um  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  zu erhalten:  $\mathbf{k}$  muss **senkrecht** zum E-Feld liegen!

Mit  $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0\mu\mathbf{H}$ , finden wir

$$\mathbf{H} = (\omega\mu_0\mu)^{-1} (\mathbf{k} \times \mathbf{E})$$

Das H-Feld liegt senkrecht zum E-Feld und zum  $\mathbf{k}$ -Vektor:  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{H}$

### 3.1.3 Evaneszente Wellen

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

Für  $(k_x^2 + k_y^2) > k^2$  wird  $k_z$  imaginär. Die Welle verläuft eben in x- und y-Richtung und zerfällt oder wächst exponentiell in z-Richtung. Diese **evaneszenten** Wellen existieren nur in der Nähe von Quellen und verschwinden für  $z \rightarrow \pm\infty$ .

#### Übersicht

ebene Welle	$e^{i[k_x x + k_y y] \pm i k_z z}$	$(k_x^2 + k_y^2 \leq k^2)$
evaneszente Welle	$e^{i[k_x x + k_y y] -  k_z  z }$	$(k_x^2 + k_y^2 > k^2)$

### 3.2 Spektrale Repräsentation

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot e^{i\omega t} dt$$

Ausserdem gilt:  $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, -\omega) = \hat{\mathbf{E}}^*(\mathbf{r}, \omega)$

#### Maxwell Gleichungen in Fourier Form

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \hat{\rho}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \times \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) + \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \cdot \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

#### Dirac Delta

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dt$$

### 3.3 Monochromatische Wellen

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega') = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \delta(\omega' - \omega) + \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) \cdot \delta(\omega' + \omega))$$

Somit werden die Maxwell Gleichungen zu:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \rho(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}(\mathbf{r}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

### 3.4 Interferenz

Ein Detektor misst die Intensität eines Felds:

$$I(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle$$

eben  $I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2$

evaneszent  $I(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} |\mathbf{E}_0|^2 \cdot e^{-2k_z \cdot z}$

Für evaneszente Wellen beträgt Länge des 1/e-Abfalls  $L_z = 1/(2k_z)$ .

#### 3.4.1 Felderpaar

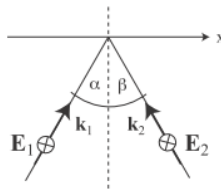
$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2] \cdot [\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2] \rangle \\ &= I_1(\mathbf{r}) + I_2(\mathbf{r}) + 2I_{12}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

mit:  $I_{12}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle$

$I_{12}$  ist die Interferenz. Sie kann positiv oder negativ sein und hängt von der Richtung ab. Über alle Richtungen integriert verschwindet  $I_{12}$ , weshalb die Energie erhalten bleibt.

#### Kohärente Felder

Wie ähnlich sind zwei Felder in Zeit und Raum?



$$I(x) = I_1 + I_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \Re \{ \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^* e^{ikx(\sin \alpha + \sin \beta)} \}$$

Annahme:  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  sind reell und entlang z polarisiert.

$$I(x) = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos [kx(\sin \alpha + \sin \beta)]}_{\text{Interferenz}}$$

**Visibilität** (Stärke der Interferenz)

$$\eta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

mit Maximum  $\eta = 1$  für  $I_1 = I_2$

### **Inkohärente Felder**

oscillieren mit verschiedene Frequenzen:

$$I(x) = I_1 + I_2 + \sqrt{2I_1I_2} \Re\{e^{i[k_1 \sin \alpha + k_2 \sin \beta]x} \langle e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \rangle\}$$

Im Zeitmittel verschwinden die unterschiedlichen Frequenzen und die totale Intensität beträgt:

$$I(x) = I_1 + I_2$$



## 4 Constitutive Relations

### 4.1 Lineare Materiale

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, \omega) &= \mu_0 \mu(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, \omega)\end{aligned}$$

Für komplexe Amplituden zeitharmonischer Felder:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \mu(\omega) \mathbf{H}(\mathbf{r})\end{aligned}}$$

Für zeitabhängige Felder gelten sie jedoch nur im Vakuum ( $\varepsilon(\omega) = \varepsilon$  und  $\mu(\omega) = \mu$ ).

#### 4.1.1 Suszeptibilitäten

$$\begin{aligned}\varepsilon &= (1 + \chi_e) & \mathbf{P}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mu &= (1 + \chi_m) & \mathbf{M}(\mathbf{r}) &= \chi_m(\omega) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r})\end{aligned}$$

#### 4.1.2 Leitfähigkeit

Der Leitungsstrom  $\mathbf{j}_{cond} = \sigma(\omega) \mathbf{E}$  wird von  $\Im\{\varepsilon(\omega)\}$  beigetragen.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_{cond}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \\ &= -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \sigma(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \\ &= -i\omega \varepsilon_0 \underbrace{\left[ \varepsilon(\omega) + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega} \right]}_{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{j}_0(\mathbf{r})\end{aligned}$$

$$\text{Energieverstreung} \Leftrightarrow \Im\{\varepsilon(\omega)\}$$

$$\text{Energiespeicherung} \Leftrightarrow \Re\{\varepsilon(\omega)\}$$

#### Helmholtz Gleichung für isotrope Medien

Isotropes Medium:  $\mu, \varepsilon$  keine Tensoren ( $\rightarrow$  anisotrop).

Ohne Quellen:  $\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 n^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$

$n = \sqrt{\varepsilon \mu}$ : Brechungsindex,  $n = 1$  im Vakuum

## 5 Materialgrenzen

### 5.1 Stückweise Homogene Medien

Inhomogenitäten existieren nur an Grenzen.

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + k_i^2) \mathbf{E}_i &= -i\omega\mu_0\mu_i\mathbf{j}_i + \frac{\nabla\rho_i}{\varepsilon_0\varepsilon_i} \\(\nabla^2 + k_i^2) \mathbf{H}_i &= -\nabla \times \mathbf{j}_i\end{aligned}$$

Dies ist die *Inhomogene Vektor Helmholtz Gleichung*. Da es meistens jedoch keine Quellen hat, verschwindet die rechte Seite.

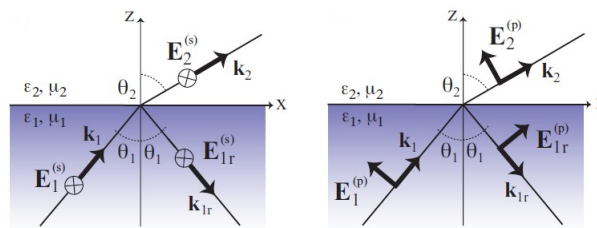
### 5.2 Randbedingungen

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot [\mathbf{B}_i(\mathbf{r}) - \mathbf{B}_j(\mathbf{r})] &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot [\mathbf{D}_i(\mathbf{r}) - \mathbf{D}_j(\mathbf{r})] &= \sigma(\mathbf{r})(= 0) \\ \mathbf{n} \times [\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_j(\mathbf{r})] &= 0 \\ \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_i(\mathbf{r}) - \mathbf{H}_j(\mathbf{r})] &= \mathbf{K}(\mathbf{r})(= 0)\end{aligned}$$

$\sigma, \mathbf{K}$  nur von theoretischer Bedeutung  $\rightarrow = 0$

Obige Gleichungen liefern sechs nicht unabhängige Gleichungen, da die Felder durch die Maxwell Gleichungen voneinander abhängen.

### 5.3 Reflexion and Brechung an Grenzflächen



Einfallende, reflektierte und transmittierte Welle können mit dem Ansatz für ebene Wellen beschrieben werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= \Re\{\mathbf{E}_1 e^{i(k_{x1}x + k_{y1}y + k_{z1}z - \omega t)}\} \\ \mathbf{E}_{1r}(\mathbf{r}, t) &= \Re\{\mathbf{E}_{1r} e^{i(k_{x1r}x + k_{y1r}y - k_{zr1}z - \omega t)}\} \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= \Re\{\mathbf{E}_2 e^{i(k_{x2}x + k_{y2}y + k_{z2}z - \omega t)}\}\end{aligned}$$

Alle haben das gleiche  $\omega$ , da wir in linearen Medien arbeiten.

Randbedingungen an der Grenzfläche  $z = 0$  ergeben:

$$\begin{aligned}k_{x1} &= k_{x1r} = k_{x2} = k_x \\ k_{y1} &= k_{y1r} = k_{y2} = k_y\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  transversale Komponente  $k_{\parallel} = (k_x, k_y)$  bleibt erhalten!

$\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_{1r}$  im selben Medium  $\Rightarrow |\mathbf{k}_1|^2 = |\mathbf{k}_{1r}|^2 = k_1^2 \Rightarrow k_{z_{1r}} = -k_{z_1}$ . Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_i| &= k_i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_i \varepsilon_i} = k_0 n_i \\ k_{z_i} &= \sqrt{k_i^2 - k_{\parallel}^2} = k_i \cos \Theta_i \\ k_{\parallel} &= \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_1 \sin \Theta_1 = k_2 \sin \Theta_2 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung auch *Snells Gesetz* genannt wird:  $n_1 \sin \Theta_1 = n_2 \sin \Theta_2$

### 5.3.1 s- and p-polarisierte Wellen

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^{(s)} + \mathbf{E}_1^{(p)}$$

$\mathbf{E}_1^{(s)}$ : senkrecht zur Einfallsebene

$\mathbf{E}_1^{(p)}$ : parallel zur Einfallsebene

**Inhomogenes Problem: Die Antwort des Systems hängt von der Anregung ab.**

**Wellenimpedanz:**  $Z_i = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_i}{\varepsilon_0 \varepsilon_i}}$

Für die s-polarisierten Felder gilt:

$$\mathbf{E}_i^{(s)} = E_i^{(s)} \mathbf{e}_y \quad i \in \{1, 1r, 2\}$$

$$\mathbf{H}_i^{(s)} = \frac{E_i^{(s)}}{Z_i} \left( -\frac{k_{z_i}}{k_i} \mathbf{e}_x + \frac{k_x}{k_i} \mathbf{e}_z \right) \quad i \in \{1, 1r, 2\}$$

$$r^{(s)} = \frac{\mathbf{E}_{1r}^{(s)}}{\mathbf{E}_1^{(s)}}$$

$$t^{(s)} = \frac{\mathbf{E}_2^{(s)}}{\mathbf{E}_1^{(s)}}$$

Für die p-polarisierten Felder gilt:

$$\mathbf{E}_i^{(p)} = E_i^{(p)} \left( -\frac{k_{z_i}}{k_i} \mathbf{e}_x + \frac{k_x}{k_i} \mathbf{e}_z \right) \quad i \in \{1, 1r, 2\}$$

$$\mathbf{H}_i^{(p)} = -\frac{E_i^{(p)}}{Z_i} \mathbf{e}_y \quad i \in \{1, 1r, 2\}$$

$$r^{(p)} = \frac{\mathbf{E}_{1r}^{(p)}}{\mathbf{E}_1^{(p)}}$$

$$t^{(p)} = \frac{\mathbf{E}_2^{(p)}}{\mathbf{E}_1^{(p)}}$$

Mit den Randbedingungen erhalten wir (für s-Polarisation):

$$\begin{aligned} E_1^{(s)} + E_{1r}^{(s)} &= E_2^{(s)} \\ \frac{1}{Z_1} \left( -\frac{k_{z1}}{k_1} E_1^{(s)} + \frac{k_{z1}}{k_1} E_{1r}^{(s)} \right) &= -\frac{1}{Z_2} \frac{k_{z2}}{k_2} E_2^{(s)} \end{aligned}$$

Lösung dieser Gleichungen sind die **Fresnel Koeffizienten**:

$r^s = \frac{\mu_2 k_{z1} - \mu_1 k_{z2}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}$	$r^p = \frac{\varepsilon_2 k_{z1} - \varepsilon_1 k_{z2}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}}$
$t^s = \frac{2\mu_2 k_{z1}}{\mu_2 k_{z1} + \mu_1 k_{z2}}$	$t^p = \frac{2\varepsilon_2 k_{z1}}{\varepsilon_2 k_{z1} + \varepsilon_1 k_{z2}} \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \varepsilon_2}}$

Es ist auch möglich, dass das ganze Feld transmittiert wird ( $r = 0$ ): Für p-Polarisation bei  $\varepsilon_2 k_{z1} = \varepsilon_1 k_{z2}$ . Für s-Polarisation hingegen wird (bei nicht magnetischem Material) immer etwas reflektiert. ( $r^s \neq 0$ )

## 5.4 Evaneszente Felder

Mindestens eine Komponente von  $\mathbf{k}$  ist imaginär, was nur durch Inhomogenitäten (wie z.B. Grenzflächen oder inhomogene Medien) zustande kommt. Komplexes transmittiertes Feld für das obige Bild:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -E_1^{(p)} t^p(k_x) k_{z2}/k_2 \\ E_1^{(s)} t^s(k_x) \\ E_1^{(p)} t^p(k_x) k_x/k_2 \end{bmatrix} e^{ik_x x + ik_{z2} z}$$

$$k_{z1} = k_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} \quad k_{z2} = k_2 \sqrt{1 - \tilde{n}^2 \sin^2 \theta_1}$$

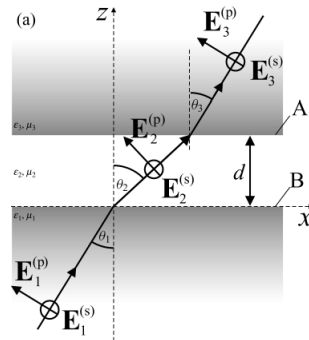
**Relativer Brechungsindex:**  $\tilde{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \mu_1}{\varepsilon_2 \mu_2}}$

Kritischer Winkel  $\theta_c$ : gebrochene Welle propagiert parallel zur Grenzfläche:  $k_{z2} = 0$

$$\theta_c = \arcsin[1/\tilde{n}]$$

Für  $\theta_1 > \theta_c$  entsteht eine evaneszente Welle. Die gesamte Energie wird reflektiert (= *totale interne Reflektion*)

### 5.4.1 Frustrated total internal reflection



(Die reflektierten Wellen fehlen der Übersicht halber.)

Obige Situation ( $n_2 < n_3 < n_1$ ) führt zu drei verschiedenen Szenarien, in welchen die transmittierte Intensität vom Abstand  $d$  abhängt:

1. Für  $\theta_1 < \arcsin(n_2/n_1)$  oder  $k_{\parallel} < n_2 k_0$  propagieren nur ebene Wellen. Die Fernfeld-Intensität ist praktisch unabhängig vom Abstand  $d$ .
2. Für  $\arcsin(n_2/n_1) < \theta_1 < \arcsin(n_3/n_1)$  oder  $n_2 k_0 < k_{\parallel} < n_3 k_0$  ist das Teilfeld im Medium 2 evaneszent, aber im Medium 3 propagiert es wieder. Die transmittierte Intensität nimmt für zunehmendes  $d$  stark ab. Dies wird auch *verhinderte Totalreflexion* genannt.
3. Für  $\theta_1 > \arcsin(n_3/n_1)$  oder  $k_{\parallel} > n_3 k_0$  gibt es nur evaneszente Wellen, keine Intensität wird transmittiert.

## 6 Energie und Impuls

### 6.1 Poyntings Theorem

Erklärt die Beziehung zwischen elektromagnetischen Feldern und deren Energieinhalt.

**Poyntingvektor:** Energieflussdichte

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$
$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}) \} \text{ zeitgemittelt}$$
$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_i} |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 \mathbf{n}_r \text{ im Fernfeld}$$

**Intensität**

$$I(\mathbf{r}) = |\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle|$$

**Energiedichte**

$$W = \frac{1}{2} [\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}] \text{ zeitabhängige Felder}$$
$$\bar{W} = \frac{1}{4} [\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) + \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}^*(\mathbf{r})] \text{ zeitharmonische}$$

Das Oberflächenintegral von  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle$  entspricht der totalen Leistung, die in der eingeschlossenen Fläche generiert oder verloren wird:

$$\boxed{\bar{P} = \int_{\partial V} \langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle \cdot \mathbf{n} da = \int_{\partial V} I(\mathbf{r}) dV}$$

#### 6.1.1 Energietransport Evaneszenter Wellen

Beispiel: Dielektrische Grenzfläche; einfallende ebene Welle mit *totaler internen Reflexion*. Wie fließt die Energie?

1. z-Komponente des Energieflusses

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_z = \frac{1}{2} \Re \{ E_x H_y^* - E_y H_x^* \}$$

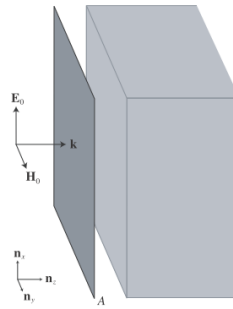
Mit  $\mathbf{H} = \frac{1}{Z \cdot k} [\mathbf{k} \times \mathbf{E}]$  bekommt man  $\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_z = 0$ . Somit transportieren evaneszente Wellen keine Energie parallel zum Normalenvektor der Grenzfläche.

2. x-Komponente des Energieflusses

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \rangle_x = \frac{1}{2} \Re \{ E_y H_z^* - E_z H_y^* \}$$
$$= \frac{\sin \theta_1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} \left( |t^s|^2 |\mathbf{E}_1^{(s)}|^2 + |t^p|^2 |\mathbf{E}_1^{(p)}|^2 \right) e^{-2\gamma z}$$

Somit transportiert eine evaneszente Welle entlang des transversalen Wellenvektors Energie.

## 6.2 Strahlungsdruck



Das Medium wird senkrecht zur Grenzfläche von einer monochromatischen ebenen Welle bestrahlt.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \Re \left\{ \left[ e^{ikz} + r e^{-ikz} \right] e^{-i\omega t} \right\} \mathbf{n}_x$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \Re \left\{ \left[ e^{ikz} - r e^{-ikz} \right] e^{-i\omega t} \right\} \mathbf{n}_y$$

Um den Strahlungsdruck zu berechnen, integrieren wir Maxwells Stress Tensor über eine unendlich ausgedehnte Ebene parallel zur Grenzfläche (Da wir uns nur für den Druck auf der Grenzfläche und nicht für die ganze Kraft, die auf das Medium wirkt, interessieren, müssen wir keine geschlossene Oberfläche  $\partial V$  wählen.):

$$P \mathbf{n}_z = \frac{1}{A} \int_A \langle \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot \mathbf{n}_z da$$

Mit dem Spannungstensor

$$\begin{aligned} \langle \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{T}}(\mathbf{r}, t) \rangle \cdot \mathbf{n}_z &= -\frac{1}{2} \langle \varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2 \rangle \mathbf{n}_z \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \left[ 1 + |r|^2 \right] \mathbf{n}_z \end{aligned}$$

Mit der Intensität  $I_0 = (\varepsilon_0/2) c E_0^2$  erhalten wir  $P = \frac{I_0}{c} [1 + R]$  mit  $R = |r|^2$

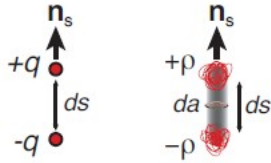
Für ein perfekt reflektierendes Medium haben wir  $R = 1$  und für ein perfekt absorbierendes  $R = 0$ . Somit ist der Strahlungsdruck auf einem perfekt reflektierenden Medium doppelt so gross wie auf einem perfekt absorbierenden.

## 7 Strahlung

Um Strahlung zu haben braucht es *beschleunigte* Ladung. Die kleinste strahlende Einheit ist ein **Dipol**, eine elektromagnetische Punktquelle.

### 7.1 Dipolstrahlung

Dipolmoment



$$\mathbf{p}(t) = q(t)ds$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}(t) = \left[ \frac{\partial}{\partial t}q(t)\mathbf{n}_s \right] ds = [\mathbf{j}_0 da] ds = \mathbf{j}_0 dV$$

wobei  $[\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{n}_s] da$  der Strom ist, der durch die Querschnittsfläche  $da$  fließt.

Die Stromdichte einer elementaren Dipolquelle beträgt ( $\mathbf{r}_0$ : Position des Dipols):

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{p}(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

#### 7.1.1 Vektorpotential eines zeitharmonischen Dipols

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \} \quad \phi(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \phi(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \}$$

$$\begin{cases} [\nabla^2 + k^2] \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mu \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \\ [\nabla^2 + k^2] \phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \rho_0(\mathbf{r}) \end{cases}$$

Teile erste Gleichung in drei unabhängige auf, nutze einen zeitharmonischen Dipol  $\mathbf{p}(t) = \Re \{ \mathbf{p} e^{-i\omega t} \}$  und die skalare Greensche Funktion  $G_0 = iA_i / \omega \mu_0 \mu p_i$ :

$$[\nabla^2 + k^2] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  ist die Antwort an der Stelle  $\mathbf{r}$  auf einen Dipol bei  $\mathbf{r}'$ .

Die Lösung der skalaren Greenschen Funktion ist:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

**Fraunhofer Näherung**

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ik(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'/r)} \quad \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{r}$$



### 7.1.2 Elektrische und Magnetische Dipolfelder

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \omega^2 \mu_0 \mu \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{p} \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= -i\omega \left[ \nabla \times \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right] \mathbf{p} \end{aligned}$$

wobei  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0$  die dyadische Greensche Funktion bezeichnet:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \right] G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

#### Greensche Funktion im Kartesischen System

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0 = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left[ \left(1 + \frac{ikR-1}{k^2 R^2}\right) \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + \frac{3-3ikR-k^2 R^2}{k^2 R^2} \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}}{R^2} \right]$$

$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ;  $\mathbf{R}\mathbf{R}$  ist das äussere Produkt!

Wenn man  $\mathbf{E}$  hat, sollte man  $\mathbf{H} = (\omega\mu_0\mu)^{-1}(\mathbf{k} \times \mathbf{E})$  anwenden.

### 7.1.3 Nah- und Fernfeld

Es ist von Vorteil,  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}$  aufzuteilen:  $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_0 = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{NF} + \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{IF} + \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{FF}$

- *Nahfeld*: ( $R \ll \lambda$ ), nur Terme mit  $(kR)^{-3}$  bleiben übrig:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{NF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{1}{k^2 R^2} \left[ -\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} + 3\mathbf{R}\mathbf{R}/R^2 \right]$$

- *Zwischenfeld*: ( $R \approx \lambda$ ), nur Terme mit  $(kR)^{-2}$  bleiben übrig:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{IF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \frac{i}{kR} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - 3\mathbf{R}\mathbf{R}/R^2 \right]$$

- *Fernfeld*: ( $R \gg \lambda$ ), nur Terme mit  $(kR)^{-1}$  bleiben übrig:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{G}}_{FF} = \frac{e^{ikR}}{4\pi R} \left[ \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{I}} - \mathbf{R}\mathbf{R}/R^2 \right]$$

Notice: Das Zwischenfeld ist  $90^\circ$  ausser Phase, Nah- und Fernfeld sind in Phase.

#### Nicht-verschwindende Feldkomponenten

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{|\mathbf{p}| \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left[ \frac{2}{k^2 r^2} - \frac{2i}{kr} \right] \\ E_\vartheta &= \frac{|\mathbf{p}| \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left[ \frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} - 1 \right] \\ H_\varphi &= \frac{|\mathbf{p}| \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{e^{ikr}}{r} k^2 \left[ -\frac{i}{kr} - 1 \right] \sqrt{\frac{\epsilon_0\epsilon}{\mu_0\mu}} \end{aligned}$$

Da  $E_r$  keine Fernfeldkomponente hat, ist das Fernfeld **transvers**. Im Nahfeld dominiert das E-Feld.

### 7.1.4 Abstrahlcharakteristik

Weil wir eine sphärische Oberfläche wählen, brauchen wir für die Berechnung der Leistung nur die radiale Komponente von  $\langle \mathbf{S} \rangle$

$$\langle S_r \rangle = \frac{1}{2} \Re \{ E_\vartheta H_\varphi^* \}$$

Somit folgt für die Leistung:

$$\bar{P} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \langle S_r \rangle r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

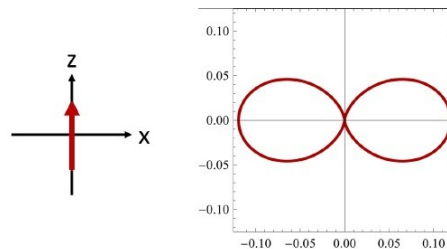
**Abgestrahlte Leistung eines Dipols:**

$$\bar{P} = \frac{|\mathbf{p}|^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{n^3\omega^4}{3c^3} = \frac{p^2\omega k^3}{12\pi\epsilon_0\epsilon}$$

Um die Abstrahlcharakteristik zu beschreiben, berechnen wir die Leistung  $\bar{P}(\vartheta, \varphi)$ , die in einen infinitesimalen Raumwinkel  $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  abgestrahlt wird und dividieren durch  $\bar{P}$ :

$$\frac{\bar{P}(\vartheta, \varphi)}{\bar{P}} = \frac{\langle S_r \rangle r^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \langle S_r \rangle r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi} = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \vartheta$$

Im Fernfeld wird die meiste Energie **senkrecht** zum Dipolmoment abgestrahlt und es gibt keine Strahlung in Richtung des Dipols.



## 7.2 Dipolstrahlung in beliebigen Medien

Die Abstrahlung eines Dipols wird von der Umgebung beeinflusst!

Abstrahlrate:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{2} \int_V \Re \{ \mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E} \} dV$$

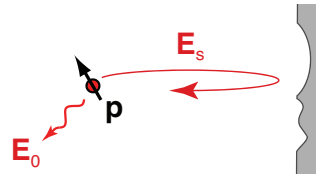
wobei  $V$  das Quellvolumen ist.  $\mathbf{j}$  ist entweder der Quellstrom, der die Felder generiert, oder ein Verluststrom, der mit thermischen Verlusten in Verbindung steht. In jedem Fall

beschreibt  $\mathbf{j}$  sowohl Energiequellen als auch Energieverluste.

Die abgestrahlte Leistung wird zu:  $\bar{P} = \frac{\omega}{2} \Im \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0) \}$

In einem inhomogenen Umfeld (z.B. Antenne nahe am Boden) müssen wir das Dipolfeld mit dem vom Umfeld gestreuten sekundären Feld superponieren:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}_0) + \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0)$$



Die Leitungsabstrahlung kann somit aufgeteilt werden. Den Anteil des primären Dipolfeldes kennen wir bereits:  $\bar{P}_0 = \frac{p^2 \omega k^3}{12\pi \epsilon_0 \epsilon}$

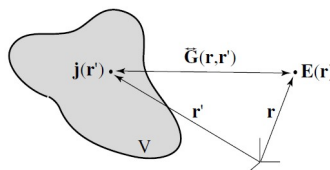
$$\frac{\bar{P}}{\bar{P}_0} = 1 + \frac{6\pi \epsilon_0 \epsilon}{|\mathbf{p}|^2} \frac{1}{k^3} \Im \{ \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_0) \}$$

### 7.3 Felder von beliebigen Quellen

Mit der Greenschen Funktion berechnen wir E-Feld und H-Feld:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= i\omega\mu\mu_0 \int_V \vec{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int_V [\nabla \times \vec{G}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV' \end{aligned}$$

Bedeutung:



Die Greensche Funktion gibt uns das E-Feld am Punkt  $\mathbf{r}$  aufgrund eines Quellpunkts  $\mathbf{j}$  am Quellpunkt  $\mathbf{r}'$

Note: Diese Felder sind nur *Partikulärlösungen*. Für die vollständige Lösung muss man noch die Lösungen der homogenen Wellengleichungen superponieren!

## 7.4 Quellen mit beliebiger Zeitabhängigkeit

Um solche Felder (z.B. Puls) zu bearbeiten, wendet man die Fouriertransformation an.

**Dispersionsfreie Medien:**  $n(\omega) = n, \mu(\omega) = \mu$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}_0(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| n/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \int_V \frac{\rho_0(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| n/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Somit hängen  $\mathbf{A}$  und  $\phi$  von den Quellen  $\mathbf{j}_{tot}$  und  $\rho_{tot}$  am Ort  $\mathbf{r}'$  zur Zeit  $t - \frac{n}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  ab. Für realistische Quellen sind obige Integrale jedoch praktisch unlösbar. → Fourier!

### 7.4.1 Dipolfelder im Zeitbereich

Wir nehmen an, dass sich der Dipol im Vakuum befindet ( $k = \omega/c$  and  $\epsilon = 1$ ):

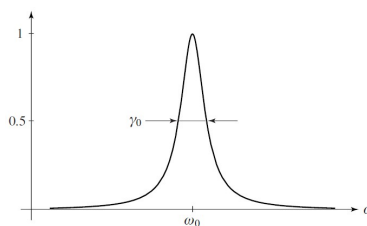
$$\begin{aligned} E_r(t) &= \frac{\cos \vartheta}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{2}{r^3} + \frac{2}{cr^2} \frac{d}{d\tau} \right] p(\tau) \Big|_{\tau=t-r/c} \\ E_\vartheta(t) &= -\frac{\sin \vartheta}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^3} + \frac{1}{cr^2} \frac{d}{d\tau} + \frac{1}{c^2 r} \frac{d^2}{d\tau^2} \right] p(\tau) \Big|_{\tau=t-r/c} \\ H_\varphi(t) &= -\frac{\sin \vartheta}{4\pi \epsilon_0} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left[ \frac{1}{cr^2} \frac{d}{d\tau} + \frac{1}{c^2 r} \frac{d^2}{d\tau^2} \right] p(\tau) \Big|_{\tau=t-r/c} \end{aligned}$$

Man erkennt, dass das Fernfeld durch die Beschleunigung, das Zwischenfeld durch die Geschwindigkeit und das Nahfeld durch die Position der Ladung generiert wird.

## 7.5 Lorentz'sche Leistungsspektrum

Totale Energie pro Einheitswinkel  $d\Omega$  und pro Einheitsfrequenzintervall  $d\omega$ :

$$\frac{dW}{d\Omega d\omega} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{|\mathbf{p}|^2 \sin^2 \vartheta \omega_0^2}{4\pi^2 c^3 \gamma_0^2} \left[ \frac{\gamma_0^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2/4} \right]$$



Obiger Ausdruck wird über alle Frequenzen und alle Richtungen integriert → totale abgestrahlte Energie:

$$W = \frac{|\mathbf{p}|^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\omega_0^4}{3c^3 \gamma_0}$$

## 8 Feldwinkelspektrum

In der Darstellung im Feldwinkelspektrum wird ein beliebiges Feld durch die Summe ebener (und evaneszenter) Wellen mit verschiedenen Amplituden und Ausbreitungsrichtungen beschrieben. Dafür wählen wir eine beliebige  $z$ -Achse und betrachten das E-Feld in einer Ebene mit  $z = \text{const.}$

2D Fouriertransformation des komplexen E-Feldes  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z)$ :

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(x, y, z) e^{-i[k_x x + k_y y]} dx dy$$

wobei  $k_x, k_y$  die räumlichen Frequenzen sind.

Inverse Trafo:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) e^{i[k_x x + k_y y]} dk_x dk_y$$

Da die Helmholtz-Gleichung erfüllt werden muss, definieren wir:  $k_z \equiv \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$ , wobei  $\Im\{k_z\} \geq 0$  und  $k = \omega/c \cdot n$

Das Fourierspektrum  $\hat{\mathbf{E}}$  ändert sich entlang der  $z$ -Achse:  $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) = \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{\pm i k_z z}$ . Das + bezieht sich auf Wellen, die in die positive HE ( $z > 0$ ) propagieren und das - auf die, die in die negative HE ( $z < 0$ ) propagieren. Das E-Feld in der *Objektebene* bei  $z = 0$  multipliziert mit  $e^{\pm i k_z z}$  ergibt das Feld in der *Bildebene* bei  $z = \text{const.}$

### Repräsentation im Feldwinkelspektrum

$$\boxed{\mathbf{E}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{i[k_x x + k_y y \pm k_z z]} dk_x dk_y}$$

Analog für H-Feld. Mit  $\mathbf{H} = (i\mu_0\mu\omega)^{-1}(\nabla \times \mathbf{E})$  finden wir folgende Beziehungen für die Spektren  $\hat{\mathbf{E}}$  und  $\hat{\mathbf{H}}$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}_x &= Z_{\mu\epsilon}^{-1} \left[ (k_y/k) \hat{E}_z - (k_z/k) \hat{E}_y \right] \\ \hat{H}_y &= Z_{\mu\epsilon}^{-1} \left[ (k_z/k) \hat{E}_x - (k_x/k) \hat{E}_z \right] \\ \hat{H}_z &= Z_{\mu\epsilon}^{-1} \left[ (k_x/k) \hat{E}_y - (k_y/k) \hat{E}_x \right] \end{aligned}$$

wobei  $Z_{\mu\epsilon} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\epsilon_0\epsilon}}$  der Wellenimpedanz des Mediums entspricht.

Damit diese Feldwinkelspektren strikte Lösungen der Maxwellgleichungen sind, müssen sie divergenzfrei sein.  $\Rightarrow \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{H}} = 0$

## 8.1 Propagation und Feldfokussierung

Propagator im reziproken Raum:  $\hat{H}(k_x, k_y; z) = e^{\pm i k_z z}$

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z) = \hat{H}(k_x, k_y; z) \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0)$$

Das  $\pm$  deutet darauf hin, dass das Feld in positive und negative  $z$ -Richtung propagieren kann.

Wie bei Green: linear response theory:  $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0)$  ist der Input,  $\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; z)$  der Output und  $\hat{H}$  die Filterfunktion:

Filter  $\hat{H}$ :

$$\begin{aligned} k_x^2 + k_y^2 \leq k^2 & \Leftrightarrow \text{ebene Wellen} \\ k_x^2 + k_y^2 > k^2 & \Leftrightarrow \text{evaneszente Wellen} \end{aligned}$$

Falls die Bildebene genug weit von der Objektebene entfernt ist, verschwindet der Anteil der evaneszenten Wellen. Alle räumlichen Frequenzen mit  $k_x^2 + k_y^2 > k^2$  des originalen Feldes werden also rausgefiltert. Somit entspricht  $\hat{H}$  einem *Tiefpassfilter*. Es gibt immer einen Informationsverlust von Nah- zu Fernfeld.

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y, 0) * H(x, y; z)$$

wobei  $H$  den Propagator im direkten Raum bezeichnet und die inverse Fouriertrafo von  $\hat{H}$  ist:

$$H(x, y; z) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i[k_x x + k_y y \pm k_z z]} dk_x dk_y$$

Das Feld bei  $z = \text{const.}$  wird durch die Faltung des Feldes bei  $z = 0$  mit  $H$  dargestellt.

### 8.1.1 Paraxiale Approximation

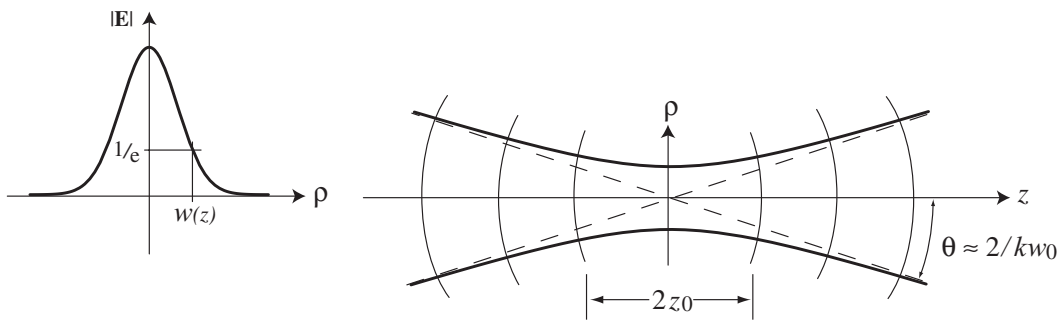
Ausbreitung überwiegend in  $z$ -Richtung:

$\Rightarrow (k_x, k_y) \ll k$ . Nutze  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ :

$$k_z = k \sqrt{1 - (k_x^2 + k_y^2)/k^2} \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}$$

### 8.1.2 Gauss'sche Strahlen

Existieren nicht, nur eine Näherung.



**E-Feld des Gauss'schen Strahls** (erfüllt Maxwell nicht)

$$\mathbf{E}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} e^{-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)}} e^{i[kz - \eta(z) + k\rho^2/2R(z)]}$$

mit

$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}$	Strahlen Taille
$R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$	Wellenfrontradius
$\eta(z) = \arctan z/z_0$	Phasenkorrektur

*Im Bereich  $2z_0$  bleibt die Wellenfront in etwa eine ebene Welle/Phasenfront. Ausserhalb hat man sphärische Phasenfronten (Kugelwelle). Der Wellenfrontradius gibt die Krümmung der Phasenfront an.*

Die transversale Breite des Strahls wird durch  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  definiert, wo die Amplitude um den Faktor  $e$  abgenommen hat:

$$\frac{|\mathbf{E}(x, y, z)|}{|\mathbf{E}(0, 0; z)|} = \frac{1}{e}$$

**Spaghetti-Formeln**

$$z_0 = \frac{k\omega_0^2}{2} \quad \theta = \frac{2}{k\omega_0}$$

Die Rayleigh-Länge  $z_0$  bezeichnet die Länge von der Strahltaile bis dorthin wo der Strahlradius um den Faktor  $\sqrt{2}$  zugenommen hat. Während dieser Länge breitet sich der Strahl ungefähr gerade aus.

*Gouy Phase Shift:* Die Phase des Strahls ändert sich um  $180^\circ$  von  $-\infty$  bis  $\infty$ . Diese Änderung wird durch  $\eta(z)$  beschrieben. Je enger der Fokus desto schneller ändert sich die Phase.

## 8.2 Fernfeld Approximation

Wir suchen das Feld in einem Punkt  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\infty$  unendlich weit von der Objektebene entfernt. Dazu definieren wir den dimensionslosen Einheitsvektor  $\mathbf{s}$  in Richtung von  $\mathbf{r}_\infty$ :

$$\mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

wobei  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  der Abstand von  $r_\infty$  zum Ursprung ist. Da evaneszente Wellen im unendlichen Abstand keinen Beitrag leisten, integrieren wir das Feldwinkelspektrum im Bereich  $k_x^2 + k_y^2 \leq k^2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\infty(s_x, s_y) &= \lim_{kr \rightarrow \infty} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} \hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) e^{ikr[\frac{k_x}{k}s_x + \frac{k_y}{k}s_y \pm \frac{k_z}{k}s_z]} dk_x dk_y \\ &= -2\pi i k s_z \hat{\mathbf{E}}(k s_x, k s_y; 0) \frac{e^{ikr}}{r} \end{aligned}$$

mit  $s_z = \sqrt{1 - (s_x^2 + s_y^2)}$ .  $\mathbf{E}_\infty$  ist der Schneemann und  $\hat{\mathbf{E}}$  das Spektrum davon.

Ersetze  $k_x \rightarrow k s_x$  und  $k_y \rightarrow k s_y \Rightarrow \mathbf{s} = (s_x, s_y, s_z) = \left( \frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k}, \frac{k_z}{k} \right)$

Nur die ebene Welle mit Wellenvektor  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$  des Feldwinkelspektrums bei  $z = 0$  trägt zum Fernfeld in Richtung  $\mathbf{s}$  bei! Alle anderen Wellen heben sich durch destruktive Interferenz auf. Fernfelder können also eine Summe von Strahlen behandelt werden, wobei jeder Strahl durch eine bestimmte ebene Welle des Feldwinkelspektrums im Ursprung charakterisiert wird.

Fourierspektrum  $\hat{\mathbf{E}}$  ausgedrückt durch das Fernfeld:

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x, k_y; 0) = \frac{i r e^{-ikr}}{2\pi k_z} \mathbf{E}_\infty \left( \frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k} \right)$$

Einsetzen ins Feldwinkelspektrum:

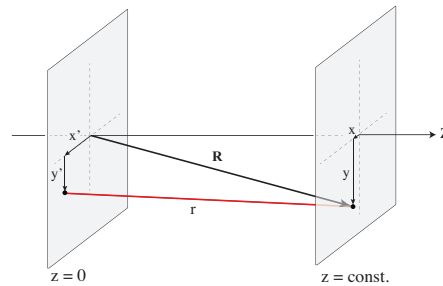
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{i r e^{-ikr}}{2\pi} \iint_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} \mathbf{E}_\infty \left( \frac{k_x}{k}, \frac{k_y}{k} \right) e^{i[k_x x + k_y y \pm k_z z]} \frac{1}{k_z} dk_x dk_y$$

$\mathbf{E}$  und  $\mathbf{E}_\infty$  sind bis auf den Faktor  $1/k_z$  ein Fouriertrafo-Paar bei  $z = 0$ . Mit der Näherung  $k_z \approx k$  sind sie ein perfektes Paar.



### 8.3 Fresnel und Fraunhofer Approximation

Wie weit entfernt ist unendlich?



$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2 = R^2 \left[ 1 - \frac{2(xx' + yy')}{R^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{R^2} \right]$$

Um das Feld im Beobachtungspunkt zu berechnen, müssen wir einzelne Wellen aus verschiedenen Punkten der Quellebene  $(x', y')$  addieren:

$$\int_{z=0} A(x', y') \cdot \frac{\exp(-ikr(x', y'))}{r(x', y')} dx' dy'$$

Da Quelle und Beobachtungspunkt weit auseinanderliegen, können wir im Nenner  $r = R$  setzen. Im Exponenten darf man dies nicht, da sonst Interferenzeffekte verloren gehen.

Wende paraxiale Approximation an:

$$r(x', y') = \underbrace{R - [x'(x/R) + y'(y/R)]}_{\text{Fraunhofer}} + \underbrace{\frac{x'^2 + y'^2}{2R}}_{\text{Fresnel}}$$

Definiere  $D$  als max. Ausbreitung der Quellen in der  $x'y'$ -Ebene. Dann ist  $D/2 = \text{Max} \{ \sqrt{x'^2 + y'^2} \}$ . Für  $R \gg D$  wendet man Fraunhofer an.

Der Übergang Fresnel  $\rightarrow$  Fraunhofer geschieht in einer Distanz  $z$ , die in etwa der Rayleighlänge eines Gauss'schen Strahls entspricht (dort, wo die ebene Welle zur Kugelwelle wird). Mit Strahlentaille  $\omega_0 = D/2$  erhalten wir:

$$z_0 = \frac{1}{8} k D^2$$

## 9 Wellenleiter & Resonatoren

### 9.1 Resonatoren

Das Ziel eines Resonators ist es, elektromagnetische Energie abzugrenzen.

Nimm eine Box mit Seitenlängen  $L_x, L_y$  und  $L_z$ , gefüllt mit einem linearen isotropischen Material  $(\epsilon, \mu)$  und mit perfekt reflektierenden Wänden. Wir suchen nun Lösungen der Helmholtz-Gleichung:  $[\nabla^2 + k^2] E = 0$

1. Ansatz:  $E_x(x, y, z) = E_0^{(x)} X(x)Y(y)Z(z)$ , wobei  $E_0^{(x)}$  eine konstante Amplitude ist. (analog für y- und z-Richtung)
2. Separation der Variablen

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

3. Setze Konstanten auf  $-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$  und somit gilt

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega)$$

4. Erhalte drei unabhängige Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y = \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^2 Z = 0$$

5. Allgemeine Lsg für x-Komponente (analog für y, z)

$$E_x(x, y, z) = E_0^{(x)} [c_{1,x} e^{-ik_x x} + c_{2,x} e^{ik_x x}] [c_{3,x} e^{-ik_y y} + c_{4,x} e^{ik_y y}] [c_{5,x} e^{-ik_z z} + c_{6,x} e^{ik_z z}]$$

6. Nutze Randbedingungen:  $E_x(y=0) = E_x(y=L_y) = 0$  und  $E_x(z=0) = E_x(z=L_z) = 0$
7. Nutze  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$

Somit erhält man:

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= E_0^{(x)} \cos \left[ \frac{n\pi x}{L_x} \right] \sin \left[ \frac{m\pi y}{L_y} \right] \sin \left[ \frac{l\pi z}{L_z} \right] \\ E_y(x, y, z) &= E_0^{(y)} \sin \left[ \frac{n\pi x}{L_x} \right] \cos \left[ \frac{m\pi y}{L_y} \right] \sin \left[ \frac{l\pi z}{L_z} \right] \\ E_z(x, y, z) &= E_0^{(z)} \sin \left[ \frac{n\pi x}{L_x} \right] \sin \left[ \frac{m\pi y}{L_y} \right] \cos \left[ \frac{l\pi z}{L_z} \right] \end{aligned}$$

mit

$$\frac{n}{L_x} E_0^{(x)} + \frac{m}{L_y} E_0^{(y)} + \frac{l}{L_z} E_0^{(z)} = 0$$

**Modestruktur des Resonators**

$$\boxed{\pi^2 \left[ \frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{l^2}{L_z^2} \right] = \frac{\omega_{nml}^2}{c^2} \underbrace{n^2(\omega_{nml})}_{\text{Brechungsindex}} \quad n, m, l \in \mathbb{N}_0}$$

### 9.1.1 Density of the States (DOS)

Betrachte einen Resonator mit:  $L = L_x = L_y = L_z$ :

$$n^2 + m^2 + l^2 = \left[ \frac{\omega_{nml} L n(\omega_{nml})}{\pi c} \right]^2$$

Falls  $n, m, l$  reell sind, entspricht obige Gleichung einer Kugel mit Radius  $r_0 = \left[ \frac{\omega_{nml} L n(\omega_{nml})}{\pi c} \right]$ . Zähle Anzahl  $N$  der Moden innerhalb dieser Kugel (also mit Frequenzen  $\omega < \omega_{nml}$ ): Da  $n, m, l$  positiv sind, müssen wir nur einen Achtel der Kugel betrachten:

$$N(\omega) = \underbrace{\frac{1}{8}}_{n,m,l>0} \cdot \underbrace{\left[ \frac{4\pi}{3} r_0^3 \right]}_{\text{Kugelvolumen}} \cdot \underbrace{2}_{\text{zwei Pol. für jedes } nml}$$

Setze  $r_0$  ein und betrachte das Intervall  $[\omega \dots \omega + \Delta\omega]$ . Somit gilt

$$\frac{dN(\omega)}{d\omega} \Delta\omega = V \frac{\omega^2 n^3(\omega)}{\pi^2 c^3} \Delta\omega$$

Man erkennt, dass es in höheren Frequenzen mehr Moden gibt.

#### Density of states (DOS)

$$\rho(\omega) = \frac{1}{V} \frac{dN}{d\omega} = \frac{\omega^2 n^3(\omega)}{\pi^2 c^3}$$

DOS = Anzahl Moden pro Einheitsvolumen  $V$  und Einheitsfrequenz  $\Delta\omega$ .

$$\Rightarrow N(\omega) = \int_V \int_{\omega_1}^{\omega_2} \rho(\omega) d\omega dV$$

*Beispiel:* Abgestrahlte Leistung eines Dipols mittels DOS berechnen:  $\bar{P} = \frac{\pi\omega^2}{12\epsilon\epsilon_0} |\mathbf{p}|^2 \rho(\omega)$ .

#### Güte

Jeder Resonator erleidet Verluste (z.B. durch Abstrahlung oder Absorption elektromagnetischer Energie an Materialgrenzen). Deshalb werden die diskreten Frequenzen  $\omega_{nml}$  endlich breit mit  $\Delta\omega = 2\gamma$ . Man definiert die Güte  $Q$  als Maß dafür, wie lang ein Resonator Energie speichern kann.

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

Eine Mode ist generell ein Lorentz (Kap.6). Somit ist das Feld im Resonator eine exponentiell abfallende gedämpfte Oszillation:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \exp \left[ \left( i\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q} \right) t \right] \right\}$$

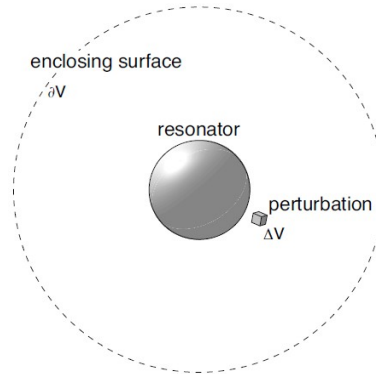
wobei  $\omega_0$  eine der Resonanzfrequenzen  $\omega_{nml}$  ist.

Spektrum der gespeicherten Energiedichte:

$$W_\omega(\omega) = \frac{\omega_0^2}{4Q^2} \frac{W_\omega(\omega_0)}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0/2Q)^2}$$

### 9.1.2 Cavity Perturbation (Störungstheorie eines Resonators)

Eine Störung im Resonator (=cavity) führt zu einer Verschiebung der Resonanzfrequenz.



Im ungestörten System gilt:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_0 &= i\omega\mu_0\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}_0 \\ \nabla \times \mathbf{H}_0 &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}_0\end{aligned}$$

$\omega_0$ : Resonanzfrequenz,  $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ : ungestörte komplexe Feldamplituden

Durch die Störung entsteht eine neue Resonanzfrequenz:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= i\omega\mu_0[\mu(\mathbf{r})\mathbf{H} + \Delta\mu(\mathbf{r})\mathbf{H}] \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon_0[\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E} + \Delta\varepsilon(\mathbf{r})\mathbf{E}]\end{aligned}$$

$\Delta\varepsilon(\mathbf{r}), \Delta\mu(\mathbf{r})$ : Materialeig. des Störungspartikels. Ausserhalb von  $V$  sind diese Konstanten Null.

Änderung der Frequenz durch **Bethe-Schwinger cavity perturbation formula**:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{\int_V [\mathbf{E}_0^* \varepsilon_0 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E} + \mathbf{H}_0^* \mu_0 \Delta\mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}] dV}{\int_V [\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E} + \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}] dV}$$

Ohne Abstrahlverluste ist diese Formel exakt, kann jedoch nicht so angewendet werden, da  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  nicht bekannt sind.

Annahme: Cavity hat einen kleinen Einfluss  $\rightarrow$  Approximation  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ :

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \approx -\frac{\int_{\Delta V} [\mathbf{E}_0^* \varepsilon_0 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0 + \mathbf{H}_0^* \mu_0 \Delta\mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}_0] dV}{\int_V [\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{E}_0 + \mu_0 \mu(\mathbf{r}) \mathbf{H}_0^* \cdot \mathbf{H}_0] dV}$$

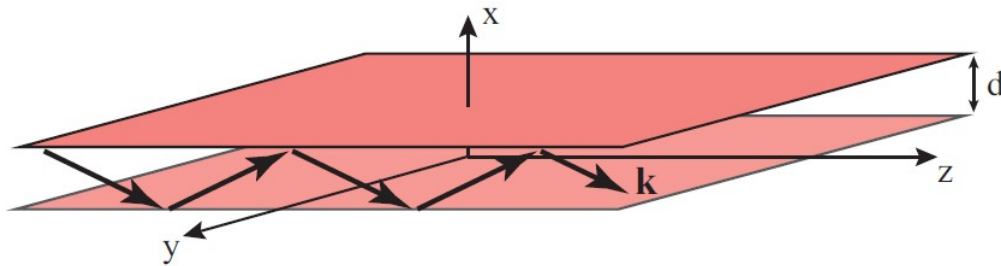
Für ein schwach-dispersives Medium entspricht dies

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{\Delta W}{W_0} \Leftrightarrow \omega = \omega_0 \frac{W_0}{\Delta W + W_0}$$

Durch Vergrössern oder Weglassen von  $\Delta W$  kann man die Frequenz *rot-* oder *blauverschieben*.

## 9.2 Wellenleiter

### 9.2.1 Wellenleiter mit parallelen Platten



Man unterscheidet zwischen zwei Moden:

- **TE-Mode:** Kein E-Feld in Ausbreitungsrichtung  $z$
- **TM-Mode:** Kein H-Feld in Ausbreitungsrichtung  $z$

#### TE-MODEN

Das E-Feld ist parallel zur Plattenoberfläche. Als Ansatz wählt man eine ebene Welle, die in einem Winkel  $\theta$  zur Normalen gegen die untere Platte propagiert:

$$\mathbf{E}_1(x, y, z) = E_0 \mathbf{n}_y e^{-ikx \cos \theta + ikz \sin \theta}$$

An der unteren Platte wird die Welle reflektiert. Das Vorzeichen wechselt, da das totale parallele Feld verschwinden muss:

$$\mathbf{E}_2(x, y, z) = -E_0 \mathbf{n}_y e^{ikx \cos \theta + ikz \sin \theta}$$

Summe der Felder:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = -2iE_0 \mathbf{n}_y e^{ikz \sin \theta} \sin[kx \cos \theta]$$

Nun muss noch die Randbedingung auf der oberen Platte ( $x = d$ ) erfüllt werden:

$E(x, y, d) = 0$ . Dies führt zu einer *Quantisierung des Wellenvektors*. Je nach Mode spricht man von einer TE $_n$ -Mode:

$$\sin[kd \cos \theta] = 0 \Rightarrow kd \cos \theta = n\pi, k \cos \theta = k_x \Rightarrow k_{x_n} = n \frac{\pi}{d}$$

$$k_{z_n} = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{k^2 - n^2 [\pi/d]^2}$$

$n = 0$  führt zur Nulllösung. Für ein reelles  $k_z$  propagiert das Feld in  $z$ -Richtung. Für  $n\pi/d > k$  hat man einen exponentiellen Abfall. Somit ist der Wellenleiter eigentlich ein *Hochpassfilter* mit

**Cut-off frequency:**

$$\boxed{\omega_c = \frac{n\pi c}{dn(\omega_c)} \quad n \in \mathbb{N}}$$

wobei  $n(\omega_c)$  der dispersive Brechungsindex im Medium zwischen den Platten ist. Unterhalb des Cutoffs können keine Wellen propagieren.

Für  $\omega > \omega_c$ :  
 Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \frac{\omega}{k_{z_n}}$   
 Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \frac{d\omega}{dk_{z_n}}$

## TM MODES

Das H-Feld ist parallel zur Plattenoberfläche. Ähnlicher Ansatz wie bei E-Feld:

$$\mathbf{H}_1(x, y, z) = H_0 \mathbf{n}_y e^{-ikx \cos \theta + ikz \sin \theta}$$

Reflektierte Welle:

$$\mathbf{H}_2(x, y, z) = H_0 \mathbf{n}_y e^{ikx \cos \theta + ikz \sin \theta}$$

Summe der Felder:

$$\mathbf{H}(x, y, z) = 2H_0 \mathbf{n}_y e^{ikz \sin \theta} \cos[kx \cos \theta]$$

Randbedingung an oberer Platte:

$$\cos[kd \cos \theta] = 0 \Rightarrow kd \cos \theta = n\pi, k_x = k \cos \theta \Rightarrow k_x = n \frac{\pi}{d}$$

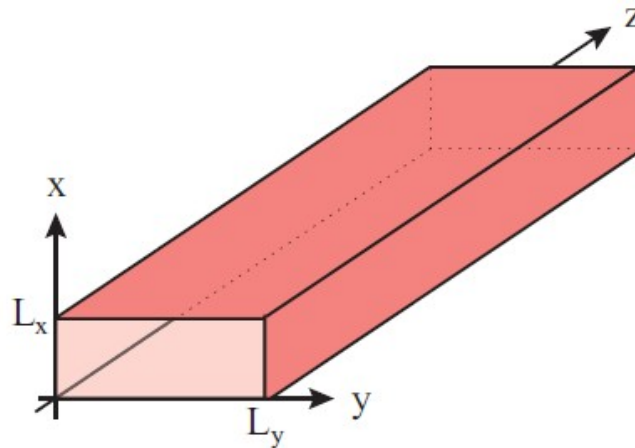
$$k_{z_n} = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{k^2 - n^2 [\pi/d]^2}$$

Im Gegensatz zu *TE* Moden gibt es hier auch eine Lösung für  $n = 0$  ( $\cos(0) \neq 0$ ).

Nur die fundamentale Mode  $TM_0$  hat keine Cutoff Frequenz.

Die Propagationskonstante der  $TM_0$  Mode ist  $k_z = k$  und somit hat diese Mode weder E- noch H-Feld in Ausbreitungsrichtung. Daher ist  $TM_0$  auch *TE* und wird *TEM* genannt.

### 9.2.2 Hohle (metallische) Wellenleiter



Ansatz:  $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}^{xy}(x, y) e^{ik_z z}$ . Man kann das E-Feld in eine transversale und eine longitudinale Komponente aufteilen:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_z = \mathbf{E} \times \mathbf{n}_z + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_z) \mathbf{n}_z$$

Die transversen Feldkomponenten können von den longitudinalen  $E_z^{xy}$  und  $H_z^{xy}$  abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} E_x^{xy} &= Z \frac{ik}{k_t^2} \frac{\partial H_z^{xy}}{\partial y} + \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z^{xy}}{\partial x} \\ E_y^{xy} &= -Z \frac{ik}{k_t^2} \frac{\partial H_z^{xy}}{\partial x} + \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial E_z^{xy}}{\partial y} \\ H_x^{xy} &= -Z^{-1} \frac{ik}{k_t^2} \frac{\partial E_z^{xy}}{\partial y} + \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z^{xy}}{\partial x} \\ H_y^{xy} &= Z^{-1} \frac{ik}{k_t^2} \frac{\partial E_z^{xy}}{\partial x} + \frac{ik_z}{k_t^2} \frac{\partial H_z^{xy}}{\partial y} \end{aligned}$$

### TE-MODEN

$\Rightarrow \mathbf{E}_z^{xy} = 0$  und

$$H_z^{xy} = H_{0z} \cos \left[ \frac{n\pi}{L_x} x \right] \cos \left[ \frac{m\pi}{L_y} y \right] \quad n, m \in \mathbb{N}$$

mit transversaler Wellenzahl

$$k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2}} = \sqrt{k^2 - k_z^2}$$

Somit betragen die Frequenzen der  $TE_{nm}$  Moden:

$$\boxed{\omega_{nm} = \frac{\pi c}{n(\omega_{nm})} \sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2}} \quad n, m \in \mathbb{N}}$$

Nicht vergessen:  $TE_{00}$  existiert nicht  $\Rightarrow n = m = 0$  geht nicht. Die kleinsten Moden sind  $TE_{01}$  und  $TE_{10}$ .

Propagationskonstante (=longitudinale Wellenzahl):

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_t^2} = \sqrt{\frac{\omega_{nm}^2}{c^2} n^2(\omega_{nm}) - \left[ \frac{n^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{m^2\pi^2}{L_y^2} \right]}$$

Auch hier gibt es einen Cutoff für tiefe Frequenzen.

### TM-MODEN

$\Rightarrow \mathbf{H}_z^{xy} = 0$  und

$$E_z^{xy} = E_{0z} \sin \left[ \frac{n\pi}{L_x} x \right] \sin \left[ \frac{m\pi}{L_y} y \right] \quad n, m \in \mathbb{N}$$

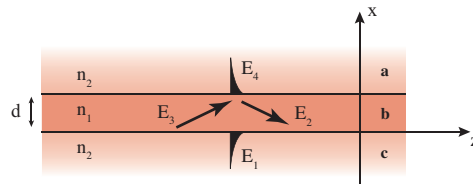
Die kleinste Mode ist  $TM_{11}$ , da  $n = 0$  und  $m = 0$  Nulllösungen ergeben.

## 9.2.3 Optical Waveguides

Für sehr hohe Frequenzen werden Wellenleiter verlustbehaftet (Absorption). Deshalb verwendet man für optische Frequenzen dielektrische Strukturen. Das Prinzip basiert auf totaler interner Reflexion. Damit die Welle an einer Grenzfläche total reflektiert wird, muss sie

- aus dem optisch dichteren Medium einfallen und
- in einem größeren Winkel als  $\theta_c = \arctan[n_2/n_1]$  zur Oberflächennormalen propagieren

Im Gegensatz zum metallischen Fall haben wir hier evaneszente Wellen, die ins optisch dünnere Medium ( $n_2$ ) eindringen.



Wir teilen das Feld auf: 2 ebene Wellen im mittleren Medium und je eine evaneszente Welle im äusseren Medium:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) & x < 0 \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_3(\mathbf{r}) & 0 < x < d \\ \mathbf{E}_4(\mathbf{r}) & x > d \end{cases}$$

### TM MODES

Mit  $\mathbf{k}_1 = [k_{x1}, 0, k_z]$  und  $\mathbf{k}_2 = [k_{x2}, 0, k_z]$  sehen die Teilfelder folgendermassen aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= E_1 \begin{pmatrix} k_z/k_2 \\ 0 \\ k_{x2}/k_2 \end{pmatrix} e^{-ik_{x2}x + ik_z z} & \mathbf{H}_1 &= \frac{E_1}{Z_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_{x2}x + ik_z z} \\ \mathbf{E}_2 &= E_2 \begin{pmatrix} k_z/k_1 \\ 0 \\ k_{x1}/k_1 \end{pmatrix} e^{-ik_{x1}x + ik_z z} & \mathbf{H}_2 &= \frac{E_2}{Z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ik_{x1}x + ik_z z} \\ \mathbf{E}_3 &= E_3 \begin{pmatrix} k_z/k_1 \\ 0 \\ -k_{x1}/k_1 \end{pmatrix} e^{ik_{x1}x + ik_z z} & \mathbf{H}_3 &= \frac{E_3}{Z_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_{x1}x + ik_z z} \\ \mathbf{E}_4 &= E_4 \begin{pmatrix} k_z/k_2 \\ 0 \\ -k_{x2}/k_2 \end{pmatrix} e^{ik_{x2}x + ik_z z} & \mathbf{H}_4 &= \frac{E_4}{Z_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_{x2}x + ik_z z} \end{aligned}$$

Damit die Felder im Medium 2 evaneszent und Medium 1 eben sind, muss  $k_2 < k_z < k_1$  gelten! Wenn man obige Felder in ein Gleichungssystem einsetzt und dieses löst, erhält man:

$$1 + r_{ab}^p(k_z)r_{bc}^p(k_z)e^{2ik_{x1}d} = 0$$

wobei  $r_{ab}^p$  und  $r_{bc}^p$  die Fresnel Koeffizienten für  $p$ -Polarization sind. Die Indexe  $ab$  und  $bc$  beziehen sich auf obiges Bild.

**TE MODES** Für TE-Moden bekommt man

$$1 + r_{ab}^s(k_z)r_{bc}^s(k_z)e^{2ik_{x1}d} = 0$$

wobei  $r_{ab}^s$  und  $r_{bc}^s$  den Fresnel Koeffizienten der  $s$ -Polarization entsprechen.