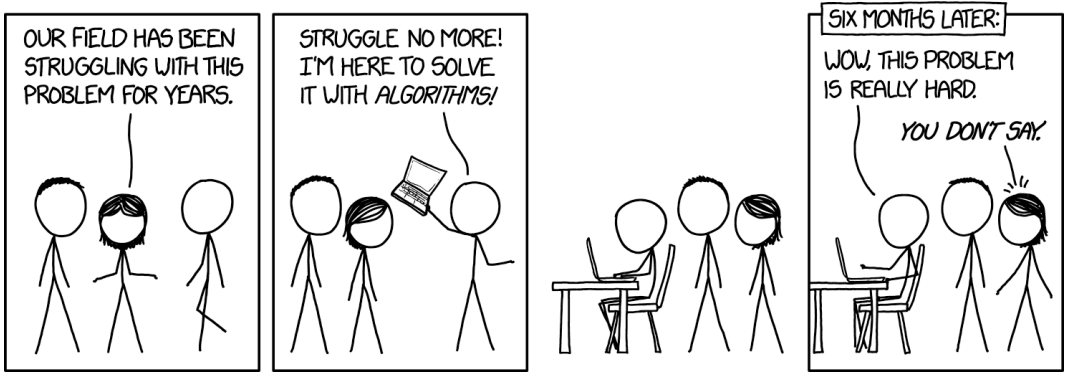
ETH zürich

D&A - Übungsstunde 5

Diese Folien basieren auf denjenigen der Vorlesung, wurden aber durch den Assistenten Adel Gavranović adaptiert und erweitert

Comic der Woche



▸ xkcd 1831

Übersicht

Heutiges Programm

Intro
Follow-up
Feedback zu [code]expert
Wiederholung Theorie
Programmieraufgabe
Hashtabellen, Hashfunktionen und Kollisionen
Outro

n.ethz.ch/~agavranovic

- Link zum Material für die Übungsstunden
- Webseite des Assistenten
- Mail an Assistenten

1. Intro

Intro

- Ihr könnt mir auch zu simpleren C++-Fragen eine Mail schreiben
- Semesterfeedback

2. Follow-up

Follow-up

- Keins?

3. Feedback zu [code]expert

Allgemeines zu [code]expert

- Sehr Gut: Die meisten geben ab
- Sehr Gut: Einleitende Kommentare
- Nicht Gut: meine Korrekturen sind etwas später als gewohnt fertig...

Task "The Master Method"

- Fehler in der Task Description
  - Steht: "$a \geq 1$ and $b > 1$ are *integer constants*"
  - Meint: "$a \geq 1$ and $b > 1$ are *real constants*"

Task "Matrices"

- Task Description war recht unverständlich...
- nur 10 Leute haben sie abgegeben
- war nicht einfach

Übungsrückblick "Comparing Sorting Algorithms"

Bubblesort	min	max
Vergleiche	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Sequenz	egal	egal
Vertauschungen	0	$\Theta(n^2)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$

Übungsrückblick "Comparing Sorting Algorithms"

InsertionSort	min	max
Vergleiche	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$
Vertauschungen	0	$\Theta(n^2)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$

Übungsrückblick "Comparing Sorting Algorithms"

SelectionSort	min	max
Vergleiche	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$
Sequenz	egal	egal
Vertauschungen	0	$\Theta(n)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	$n, n-1, \ldots, 1$

Übungsrückblick "Comparing Sorting Algorithms"

QuickSort	min	max
Vergleiche	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$
Sequenz	kompliziert	$1, 2, \ldots, n$
Vertauschungen	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
Sequenz	$1, 2, \ldots, n$	kompliziert

kompliziert: Folge muss so gestaltet sein, dass der Pivot die Daten in jedem Schritt in zwei etwa gleich grosse Teile aufteilt. Zum Beispiel ($n = 7$): $4, 5, 7, 6, 2, 1, 3$

Stabil und In Situ

In-Situ

- QuickSort verwendet zwischen $\Omega(\log n)$ und $\mathcal{O}(n)$ zusätzlichen Platz, um die rekursiven Aufrufe zu verfolgen.
- MergeSort muss wiederholt Teile des Arrays zusammenführen. Es gibt komplizierte Modifikationen, um MergeSort in-situ zu machen, aber keine, die durch einfache Modifikationen des Standardalgorithmus erreicht werden können.

Stabilität

- Die Stabilität eines Sortieralgorithmus bezieht sich nur auf die Elemente mit dem gleichen Wert. Ordnen Sie jedem Element seine ursprüngliche Position zu und sortieren Sie nach Wert plus Position für Elemente mit gleichen Werten. Maximal ein zusätzlicher Vergleich pro Element (Faktor von 2), daher bleibt die asymptotische Laufzeit gleich.

Fragen/Unklarheiten?

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.

Sei $i \in \mathbb{N}$ die Anzahl eingefügter Elemente und $n_i \in \mathbb{N}$ die Arraygrösse nachdem i eingefügt wurde.

Es gilt

$$n_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \text{ [Start]} \\ 2 \cdot n_{i-1} & \text{falls } i - 1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]} \\ n_{i-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$n_i = 2^{\lceil \log_2 i \rceil}$$

i	n_i
1	1
2	2
3	4
4	4
5	8
6	8
..	..

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.
Reale Kosten

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = 1 \text{ [Start]} \\ 3n_{i-1} + 1 & \text{falls } i - 1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]}^1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

[1] Nach Aufgabenstellung: 2n Initialisierungen + n Kopien + neues Element

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.
Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i &= 6 \cdot \text{Anzahl Elemente in der oberen Hälfte des Arrays} \\ &= 6 \cdot (i - \frac{n_i}{2}) = 6i - 3n_i\end{aligned}$$

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \begin{cases} 6 + 3n_{i-1} - 3 \overbrace{n_i}^{2 \cdot n_{i-1}} & \text{falls } i-1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]} \\ 6 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 7 \geq a_i \text{ (in beiden Fällen)}$$

Amortisierte Analyse: push_back

Strategie: verdoppeln wenn Array voll ist.
Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$
\begin{aligned}
a_i &= t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1} \\
&= \begin{cases} 3n_{i-1} + 1 + 6 - 3n_{i-1} & \text{falls } i-1 \in \{2^k : k \in \mathbb{N}\} \text{ [Array voll]} \\ 1 + 6 & \text{sonst} \end{cases} \\
&\leq 7 \quad \text{für alle } i
\end{aligned}
$$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist.

$$t_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ \frac{n_{i-1}}{2} + \frac{n_{i-1}}{4} = \frac{3}{4} n_{i-1} & \text{sonst, danach } n_i = \frac{n_{i-1}}{2} \end{cases}$$

Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

Sei k_i die Anzahl Elemente im Array im Schritt i

$\Phi_i = 3 \cdot$ Anzahl leerer Elemente in der unteren Hälfte des Arrays $(1, \ldots, \frac{n}{2})$

$= 3 \cdot (\frac{n_i}{2} - k_i)$

$$\Rightarrow 4 \geq a_i \text{ (in beiden Fällen)}$$

Amortisierte Analyse: pop_back

Strategie: halbieren wenn Array viertel leer ist. Finde Potentialfunktion so dass amortisierte Kosten konstant sind:

$$a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$$

$$\Phi_i = 3 \cdot (\frac{n_i}{2} - k_i)$$

$$\Phi_i - \Phi_{i-1} = \begin{cases} 3 & \text{wenn Array mehr als viertel voll ist} \\ 3 \cdot \left(1 + \frac{n_{i-1}}{4} - \frac{n_{i-1}}{2})\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4 \geq a_i \text{ (in beiden Fällen)}$$

Amortisierte Analyse: pop und push

$$\Phi_i = 6 \cdot \text{Anzahl Elemente obere Hälfte} + 3 \cdot \text{Anzahl leere Elemente untere Hälfte}$$

Fragen/Unklarheiten?

Fragen zu [code]expert eurerseits?

4. Wiederholung Theorie

Gutes Hashing

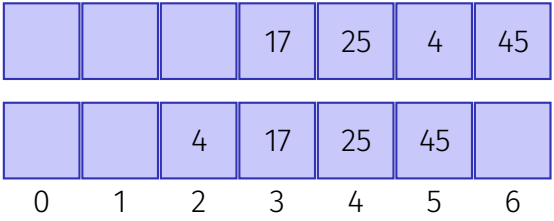
Gutes Hashing…

- verteilt die Menge der Schlüssel möglichst gleichmässig auf die Positionen der Hashtabelle.
- vermeidet beim Sondieren möglichst ein Ablaufen langer belegter Bereiche (siehe primäre Häufung).
- vermeidet, Schlüssel mit gleichem Hashwert auch noch gleich zu sondieren (siehe sekundäre Häufung).

Beispiele Hashing

Füge die Schlüssel $25, 4, 17, 45$ in die Hashtabelle ein. Verwende dabei $h(k) = k \bmod 7$ und sondiere nach rechts, $h(k) + s(j, k)$:

- Lineares Sondieren, $s(j, k) = j$.
- Double Hashing, $s(j, k) = j \cdot (1 + (k \bmod 5))$.



Simple Uniform Hashing

Aussage über Gleichverteilung und Unabhängigkeit der **Schlüssel**.

Eigenschaft von geschlosser Addressierung: einfaches gleichmässiges Hashing $\Rightarrow$ Erwartete Länge der Ketten so gut wie nur möglich: $\leq \alpha = \frac{n}{m}$

Uniform Hashing

Aussage über die Gleichverteilung und Unabhängigkeit der **Sondierungssequenzen der Schlüssel**.

Eigenschaft der offenen Addressierung: Gleichmässiges Hashing $\Rightarrow$ Erwartete Laufzeitkosten $\leq \frac{1}{1-\alpha}$.

Universal Hashing

Aussage über die verfügbaren, zufällig gewählten **Hash-Funktionen**.

$$|\{h \in \mathcal{H} \text{ mit } h(k_1) = h(k_2)\}| \leq \frac{|\mathcal{H}|}{m}$$

Eigenschaft unabhängig von der gewählten Sequenz der Schlüssel: beim Hashing mit Verketten erwartete Kettenlänge $\leq \alpha = \frac{n}{m}$

Vorbedingung für das perfekte Hashing: (probabilistische) Methode zum Finden einer Hashtabelle ohne Kollisionen. Hier muss die Schlüsselmenge vorher bekannt sein.

Quiz: Hashing

Eine Hashtabelle mit 10 Einträgen verwendet offene Adressierung mit der Hash-Funktion $h(k) = k \bmod 10$, mit linearer Sondierung (Sondierung geht nach rechts). Nachdem fünf Werte in die initial leere Hashtabelle eingefügt wurden, sieht die Hashtabelle wie folgt aus.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		32	52	33	74	96			

Welche der folgenden Möglichkeiten bezeichnen/bezeichnet jeweils eine Reihenfolge, in der die Schlüssel in die Hashtabelle eingefüllt werden konnten?

(A) 32, 33, 52, 96, 74

(B) 32, 52, 33, 74, 96 ☺

(C) 32, 52, 74, 96, 33

(D) 96, 32, 52, 33, 74 ☺

5. Programmieraufgabe

Finden eines Sub-Arrays

- Gegeben: Zwei Felder $A = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ und $B = (b_0, \ldots, b_{k-1})$ mit natürlichen Zahlen
- Aufgabe: Finde Position von B in A.
- Naiv: Gehe durch A, vergleiche die k folgenden Einträge mit B
  - $O(nk)$ Vergleiche
- Lösung mit Hashing: Berechne Hash $h(B)$ und vergleiche mit $h((a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}))$.
- Vermeide die Neuberechnung von $h((a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+k-1}))$ für jedes i $\implies$ $O(n)$ erwartet

Sliding Window Hash

- Mögliche Hash-Funktion: Summe aller Elemente:
  - Kann einfach aktualisiert werden: a_i abziehen und a_{i+k} hinzufügen.
  - Aber: schlechte Hash-Funktion
- Besser:

$$H_{c,m}((a_i, \cdots, a_{i+k-1})) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_{i+j} \cdot c^{k-j-1} \right) \bmod m$$

  - $c = 1021$ Primzahl
  - $m = 2^{15}$ **`int`**, keine Überläufe bei Berechnungen

Rechenregeln Modulo

$$(a + b) \bmod m = ((a \bmod m) + (b \bmod m)) \bmod m$$
$$(a - b) \bmod m = ((a \bmod m) - (b \bmod m) + m) \bmod m$$
$$(a \cdot b) \bmod m = ((a \bmod m) \cdot (b \bmod m)) \bmod m$$

Aufgabe: Berechnen Sie

$$12746357 \bmod 11$$

Rechenregeln Modulo

Aufgabe: Berechnen Sie

$$
\begin{aligned}
&12746357 \bmod 11 \\
&= (7 + 5 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^7) \bmod 11 \\
&= (7 + 50 + 3 + 60 + 4 + 70 + 2 + 10) \bmod 11 \\
&= (7 + 6 + 3 + 5 + 4 + 4 + 2 + 10) \bmod 11 \\
&= 8 \bmod 11.
\end{aligned}
$$

Für die zweite Gleichheit haben wir verwendet, dass $10^2 \bmod 11 = 1$.

Sliding Window Hash

```
template <typename Iterator>
Iterator findOccurrence(const Iterator& from, const Iterator& to,
                        const Iterator& begin, const Iterator& end)
{
  const unsigned int M = 32768;
  const unsigned int C = 1021;

  // your code here
  // ...
```

Sliding Window Hash

```
  // elements can be compared using std::equal:
  if(std::equal(window_left, window_right, begin, end))
    return current;

  // if no occurrence is found return end of array
  return to;
}
```

Sliding Window Hash

Gehen Sie sicher, dass

- der Algorithmus c^k nur einmal berechnet,
- alle Werte modulo m berechnet werden, um Überläufe zu vermeiden (verwenden Sie die Rechenregeln für Kongruenzen), und
- alle Werte positiv sind (z.B. durch Addition von Vielfachen von m).

6. Hashtabellen, Hashfunktionen und Kollisionen

Hands-on Beispiel: Wichtigkeit der gut gewählten Hashstrategie

7. Outro

Allgemeine Fragen?

Bis zum nächsten Mal

Schönes Wochenende!